数理解析研究所講究録 1216 巻 2001 年 170-176

2 階楕円型方程式系の正値解について

広島大・理　寺本 智光 (Tomomitsu Teramoto)

次の 2 階楕円型方程式系の正値解について考える。

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u + f(x,u,v) = 0, \\ \Delta v + g(x,u,v) = 0, \end{cases} \quad x \in \Omega,$$

ここで Ω は 空間全体 $\mathbf{R}^N (N \geq 3)$, 又は $\mathbf{R}^N (N \geq 3)$ の外部領域, f, g は局所 Hölder 連続. この方程式系 (1) の正値解の存在や解の漸近挙動についてはこれまでに色々と研究されている ([3],[4],[6]-[8] 等). (1) の正値解の存在を示すには super-subsolution method 等色々とあるが, この研究では $\mathbf{R}^N$ の積分作用素を用いて解の存在を示している.

最初に Ω が外部領域の場合を考える。f と g に次の条件をおく。

(H) 次を満たすような $F, G \in C(\bar{\mathbf{R}}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$, $\mathbf{R}_+ = (0,\infty)$, が存在する.

$$\begin{aligned} |f(x,u,v)| &\leq F(|x|,u,v) \\ |g(x,u,v)| &\leq G(|x|,u,v) \end{aligned} \quad \text{for all } x \in \Omega, \quad u,v \in \mathbf{R}_+.$$

更に $F(r,u,v)$, $G(r,u,v)$ は u, v に関して非減少.

Theorem 1. f, g は (H) を満たすとする. 更に F, G は次を満たすとする。

$$\int^\infty rF(r,c,c)dr < \infty, \quad \int^\infty rG(r,c,c)dr < \infty$$

for some constant $c > 0$. このとき

$$(2) \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = \text{const} > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = \text{const} > 0$$

をみたす (1) の正値解 (u,v) が $\Omega_M = \{x \in \mathbf{R}^N; |x| > M\}$ で存在する.

Theorem 2. f, g は (H) をみたすとする. 更に F, G は次を満たすとする.

$$\int^\infty r^{N-1}F(r,cr^{2-N},cr^{2-N})dr < \infty, \quad \int^\infty r^{N-1}G(r,cr^{2-N},cr^{2-N})dr < \infty$$

for some constant $c > 0$. このとき

$$(3) \qquad \lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2}u(x) = \text{const} > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2}v(x) = \text{const} > 0.$$

をみたす (1) の正値解 (u,v) が Ω_M で存在する。

Theorem 3. $f,\ g$ は (H) を満たすとする. 更に $F,\ G$ は次を満たすとする。

$$\int^{\infty} rF(r,c,cr^{2-N})dr < \infty, \quad \int^{\infty} r^{N-1}G(r,c,cr^{2-N})dr < \infty$$

for some constant $c > 0$. このとき

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \text{const} > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2}v(x) = \text{const} > 0.$$

をみたす (1) の正値解 (u,v) が Ω_M で存在する。

Theorem 4. $f,\ g$ は (H) を満たすとする. 更に $F,\ G$ は次を満たすとする。

$$\int^{\infty} r^{N-1}F(r,cr^{2-N},c)dr < \infty, \quad \int^{\infty} rG(r,cr^{2-N},c)dr < \infty$$

for some constant $c > 0$. このとき

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2}u(x) = \text{const} > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = \text{const} > 0.$$

をみたす (1) の正値解 (u,v) が Ω_M で存在する。

証明の概略. 積分作用素 $\mathcal{T}(u,v) = (T_1 u, T_2 v)$ を次で定義する:

$$\begin{cases} T_1[u](x) = 2a + \displaystyle\int_{\Omega_M} \Gamma(x-y)f(y,u,v)dy, \\ T_2[v](x) = 2b + \displaystyle\int_{\Omega_M} \Gamma(x-y)g(y,u,v)dy, \end{cases}$$

ここで

$$\Gamma(x-y) = \frac{1}{N(N-2)\omega_N}|x-y|^{2-N}.$$

Step 1. 積分作用素 $\mathcal{T}$ は次の集合 Y で不動点を持つ.

$$Y = \{(u,v) \in C(\Omega_M) \times C(\Omega_M); a \le u(x) \le 3a,\ b \le v(x) \le 3b, x \in \Omega_M\}$$

(I) $\mathcal{T} : Y \to Y$. $(u,v) \in Y$ に対し

$$\begin{aligned} |T_1[u](x) - 2a| &= \left| \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y)f(y,u,v)dy \right| \\ &\le \int_{|y|\ge M} |x-y|^{2-N}F(|y|,3a,3b)dy \\ &\le \int_M^{|x|} F(r,3a,3b) \int_{|y|=r} |x-y|^{2-N}dSdr \\ &\quad + \int_{|x|}^{\infty} F(r,3a,3b) \int_{|y|=r} |x-y|^{2-N}dSdr \\ &\le \int_M^{|x|} r^{N-1}|x|^{2-N}F(r,3a,3b)dr + \int_{|x|}^{\infty} rF(r,3a,3b)dr \\ &\le \int_M^{\infty} rF(r,3a,3b)dr. \end{aligned}$$

F の条件より M を十分大きくとると $|T_1[u](x)-2a| \le a$ とできる。同様にして $b \le T_2[v](x) \le 3b$ となる。 従って $T(u,v) \in Y$ である。

(II)「T は連続」, (III)「$T(Y)$ は相対コンパクト」も示すことができる ([1] 参照). 従って Schauder-Tychonoff の不動点定理より Y に T の不動点が存在する, すなわち

$$T_1[u](x) = u(x) = 2a + \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) f(y,u,v) dy,$$

$$T_2[v](x) = v(x) = 2b + \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) g(y,u,v) dy.$$

Step 2. Step 1 で得られた不動点が (1) の解であることを示す. $x \in \Omega_M$ を任意に固定する. $L > |x|$ を取る。u_1, u_2 を次のようにおく;

$$u_1(x) = \int_{\Omega_{M,2L}} \Gamma(x-y) f(y,u,v) dy,$$
$$u_2(x) = \int_{\Omega_{2L}} \Gamma(x-y) f(y,u,v) dy,$$

ここで

$$\Omega_{M,2L} = \{y \in \mathbf{R}^N; M < |y| < 2L\}.$$

文献 [5] より次のことがわかる.

$$\Delta u_1(x) + f(x,u,v) = 0,\ \Delta u_2(x) = 0.$$

$u = 2a + u_1 + u_2$ だから x で $\Delta u + f = 0$ となる. $x \in \Omega_M$ は任意なので Ω_M で $\Delta u + f = 0$ となる. 同様にして $\Delta v + g = 0$ も示すことができる。

(2) は

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) f(y,u,v) dy = 0,$$
$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) g(y,u,v) dy = 0$$

から示される.□

Theorem 2 は積分作用素 T と 集合 Y を次のように定義すると Theorem 1 と同様にして示すことができる.

積分作用素 $T = (T_1, T_2)$, 集合 Y を次で定義する.

$$\begin{cases} T_1[u](x) = \dfrac{2a}{|x|^{N-2}} + \displaystyle\int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) f(y,u,v) dy \\ T_2[v](x) = \dfrac{2b}{|x|^{N-2}} + \displaystyle\int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) g(y,u,v) dy \end{cases}$$

$$Y = \left\{ (u,v) \in C(\Omega_M) \times C(\Omega_M);\ \begin{array}{l} a|x|^{2-N} \le u(x) \le 3a|x|^{2-N}, \\ b|x|^{2-N} \le v(x) \le 3b|x|^{2-N}, \end{array}\ x \in \Omega_M \right\}$$

(3) は $a \leq |x|^{N-2}u(x) \leq 3a,\ b \leq |x|^{N-2}v(x) \leq 3b$ と

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2} \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) f(y,u,v)dy = \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{\Omega_M} f(y,u,v)dy$$
$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2} \int_{\Omega_M} \Gamma(x-y) g(y,u,v)dy = \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{\Omega_M} g(y,u,v)dy$$

から示される.

Theorem 3, Theorem 4 も同様にして証明する.

次に Ω が全空間 $\mathbf{R}^N$ の場合を考える. 更に $f = p(x)v^\alpha,\ g = q(x)u^\beta$ として考える。

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \Delta u + p(x)v^\alpha = 0, \\ \Delta v + q(x)u^\beta = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで $N \geq 3,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$ は定数, $p(x) > 0,\ q(x) > 0$ は局所 Hölder 連続.

Theorem 5. p と q が次を満たすとする。

$$\int^\infty r^{N-1+\alpha(2-N)} p^*(r)dr < \infty, \quad \int^\infty r^{N-1+\beta(2-N)} q^*(r)dr < \infty,$$

ここで

$$p^*(r) = \max_{|x|=r} p(x),\ q^*(r) = \max_{|x|=r} q(x)$$

このとき

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2}u(x) = \text{const} > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} |x|^{N-2}v(x) = \text{const} > 0$$

をみたす (4) の正値全域解 (u,v) が存在する.

Theorem 6. p と q が次を満たすとする.

$$\int^\infty rp^*(r)dr < \infty, \quad \int^\infty rq^*(r)dr < \infty.$$

このとき

$$\text{(5)} \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$$

を満たす (4) の正値全域解 (u,v) が存在する.

証明の概略. 積分作用素 $T = (T_1, T_2)$ と 集合 Y を次のようにとる;

$$\begin{cases} T_1[u](x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x-y)p(y)v^\alpha dy, \\ T_2[v](x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x-y)q(y)u^\beta dy, \end{cases}$$

$$Y = \left\{ (u,v) \in C(\mathbf{R}^N) \times C(\mathbf{R}^N);\ \begin{matrix} a\phi(|x|) \leq u(x) \leq 2a\phi(|x|) \\ b\phi(|x|) \leq v(x) \leq 2b\phi(|x|) \end{matrix},\ x \in \mathbf{R}^N \right\},$$

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le 1, \\ r^{2-N}, & r \ge 1. \end{cases}$$

Ω が外部領域の場合と同様にして Schauder-Tychonoff の不動点定理より 積分作用素 $\mathcal{T}$ は Y で不動点をもつ. そしてその不動点が (4) の解になる ([2] 参照).□

次に解の漸近挙動について考える. Theorem 5 の条件の下では u と v のどちらも $|x|^{2-N}$ の order で 0 に収束する解の存在を示している. 一方 Theorem 6 の条件の下では 0 に収束する解の存在を示しているだけで, どれくらいの order で 0 に収束するのかわからない. そこで 0 に収束する解の order を考える.

解の挙動を調べるために p と q に次の条件をおく

$$(6) \qquad \begin{aligned} K_1|x|^{-\lambda} \le p(x) \le K_2|x|^{-\lambda} \\ K_3|x|^{-\mu} \le q(x) \le K_4|x|^{-\mu} \end{aligned} \quad \text{at} \ \ \infty,$$

ここで $K_i > 0, i = 1, \cdots, 4$, は定数, $\lambda > 2$, $\mu > 2$ とする.

注意. $\lambda > 2$, $\mu > 2$ だから p, q は Theorem 6 の条件を満たすことがわかる. 従ってこの条件の下では (5) を満たす (4) の正値全域解が必ず存在する.

記号の導入 : '$\sim$' と '$\approx$' を次のように定義する.

$$f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow \lim_{|x|\to\infty} f(x)/g(x) = \text{const} > 0,$$
$$f(x) \approx g(x) \Longleftrightarrow C_1 g(x) \le f(x) \le C_2 g(x) \quad \text{at} \ \ \infty.$$

(4) の解の漸近挙動について次の結果を得た.

Theorem 7. p, q は (6) を満たすとする. (u, v) を (5) を満たす (4) の正値全域解とする. このとき

(i) $\lambda > N - \alpha(N-2)$, $\mu > N - \beta(N-2)$ のとき:

$$u(x) \sim |x|^{2-N}, \ \ v(x) \sim |x|^{2-N}.$$

(ii) $\lambda > N - \alpha(N-2)$, $\mu = N - \beta(N-2)$ のとき:

$$u(x) \sim |x|^{2-N}, \ \ v(x) \approx |x|^{2-N} \log|x|.$$

(iii) $\lambda + \alpha L > N$, $\mu < N - \beta(N-2)$ のとき:

$$u(x) \sim |x|^{2-N}, \ \ v(x) \approx |x|^{2-\mu-\beta(N-2)}.$$

(iv) $\lambda + \alpha L = N$, $\mu < N - \beta(N-2)$ のとき: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\left.\begin{aligned} C_1|x|^{2-N}\log|x| \le u(x) \le C_2(\varepsilon)|x|^{2-N+\varepsilon} \\ C_3|x|^{2-\mu-\beta(N-2)} \le v(x) \le C_4(\varepsilon)|x|^{2-\mu-\beta(N-2)+\varepsilon} \end{aligned}\right. \quad \text{at } \infty.$$

(v) $\lambda = N - \alpha(N-2)$, $\mu = N - \beta(N-2)$ のとき: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\left.\begin{aligned} C_1|x|^{2-N}\log|x| \le u(x) \le C_2(\varepsilon)|x|^{2-N+\varepsilon} \\ C_3|x|^{2-N}\log|x| \le v(x) \le C_4(\varepsilon)|x|^{2-N+\varepsilon} \end{aligned}\right. \quad \text{at } \infty.$$

(vi) $\lambda + \alpha L < N$, $\mu + \beta K < N$ のとき: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\left.\begin{aligned} C_1(\varepsilon)|x|^{-K-\varepsilon} \le u(x) \le C_2(\varepsilon)|x|^{-K+\varepsilon} \\ C_3(\varepsilon)|x|^{-L-\varepsilon} \le v(x) \le C_4(\varepsilon)|x|^{-L+\varepsilon} \end{aligned}\right. \quad \text{at } \infty,$$

ここで $C_i > 0$ は定数, $C_i(\varepsilon) > 0$ は ε に依存する定数,

$$K = \frac{\lambda - 2 + \alpha(\mu - 2)}{1 - \alpha\beta}, \quad L = \frac{\mu - 2 + \beta(\lambda - 2)}{1 - \alpha\beta}.$$

証明の概略. (u, v) が (5) を満たす (4) の正値全域解とする. このとき (u, v) は

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x-y)p(y)v^\alpha dy$$

$$v(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x-y)q(y)u^\beta dy$$

と書ける。

解の上からの評価については次の補題を繰り返し用いる.

Lemma ([9], Lemma 2.3). f は次を満たす局所 Hölder 連続関数とする;

$$|f(x)| \le C|x|^{-l} \quad \text{at } \infty,$$

ここで $C > 0$, $l > 2$ は定数. w を f のニュートンポテンシャルとする, すなわち,

$$w(x) = C_N \int_{\mathbf{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}} dy.$$

このとき 次が成立する:

$$|w(x)| \le \begin{cases} C|x|^{2-N}, & l > N, \\ C|x|^{2-N}\log|x|, & l = N, \\ C|x|^{2-l}, & l < N, \end{cases}$$

ここで $C>0$ は定数.

解の下からの評価についても同様の補題([9] の Lemma 2.6) を用いる.□

Theorem 7 の (iv),(v),(vi) については次のように予想している.

Conjecture. Theorem 7 の仮定の下で次が成立する.

(iv) $u(x) \approx |x|^{2-N} \log |x|, \quad v(x) \approx |x|^{2-\mu-\beta(N-2)}.$

(v) $u(x) \approx |x|^{2-N} \log |x|, \quad v(x) \approx |x|^{2-N} \log |x|.$

(vi) $u(x) \approx |x|^{-K}, \quad v(x) \approx |x|^{-L}.$

参考文献

[1] A. L. Edelson, Asymptotic properties for semilinear equations, Canad. Math. Bull., 32(1989), 34-46.

[2] A. L. Edelson, Entire solutions of singular elliptic equations, J. Math. Anal. Appl., 139(1989), 523-532.

[3] N. Fukagai, On decaying entire solutions of second order sublinear elliptic equations, Hiroshima Math. J., 14(1984), 551-562.

[4] Y. Furusho, Existence of positive entire solutions for weakly coupled semilinear elliptic systems, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 120A(1992), 79-91.

[5] D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, 2nd edition, Springer.

[6] N. Kawano, On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J., 14(1984), 125-158.

[7] N. Kawano and T. Kusano, On positive entire solutions of a class of second order semilinear elliptic systems, Math. Z., 186(1984), 287-297.

[8] N. Kawano and T. Kusano, Positive solutions of a class of second order semilinear elliptic systems in exterior domains, Math. Nachr., 121(1985), 11-23.

[9] Y. Li and W.-M. Ni, On conformal scalar curvature equations in $\mathbf{R}^n$, Duke Math. J., 57(1988), 895-924.