

## 走化性モデルの非線形偏微分方程式

永井 敏隆

広島大学大学院理学研究科

本講演では次の非線形偏微分方程式

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u - \chi u \nabla v) \quad x \in \Omega, t > 0,$$

$$(2) \quad \tau \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \gamma v + \alpha u \quad x \in \Omega, t > 0$$

を境界条件

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0$$

および初期条件

$$(4) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad x \in \Omega$$

のもとで考える.  $\Omega$  は滑らかな境界  $\partial\Omega$  をもつ  $\mathbb{R}^n$  の有界領域で,  $\partial/\partial \mathbf{n}$  は  $\partial\Omega$  上の点における外向き法線方向の微分を表し,  $\chi, \tau, \gamma, \alpha$  は正定数とする. 初期関数  $u_0, v_0$  は滑らかで非負で,  $(u(x, t), v(x, t))$  は非負な古典解とする.

この非線形偏微分方程式は, 細包性粘菌の集合体形成の数学モデルとして 1970 年に Keller-Segel[11] により提出されたものである. 細包性粘菌は, 栄養状態が良い環境ではほぼ一様に分布しているが, 環境の栄養状態が悪くなると粘菌自らも分泌するある種の化学物質の濃度の高い方向に動き土筆形状の集合体を形成することが知られている. 化学物質の濃度の高い方向に動くことを**走化性**と呼ぶ. (1),(2)において,  $u(x, t)$  は場所  $x$ , 時間  $t$  での細包性粘菌の個体数を表し,  $v(x, t)$  は化学物質の濃度を表す. (1)の右辺の第1項  $\Delta u$  は粘菌のランダムな動きを表し, 第2項  $-\chi \nabla \cdot u \nabla v$  は走化性を表す. (2)の右辺の第1項  $\Delta v$  は化学物質の拡散を表し, 第2項  $-\gamma v$  は化学物質の消費, 第3項  $\alpha u$  は粘菌自身による化学物質の分泌を表している.

1973年に Nanjundiah[16]は, (1)-(4)の解は有限時間でデルタ関数的な形状で爆発する可能性があるとの予想をした. デルタ関数的特異性を

示す有限時間爆発を**走化性の崩壊 (chemotactic collapse)**と呼ぶ。デルタ関数的な形状の形成は土筆形状の集合体形成を説明していると考えられる。Nanjundiahの予想について、走化性の崩壊は空間次元と初期時刻における粘菌の全個体数に依存するとの予想が1981年にChildress-Percus[2]によりなされた。

本稿では、Childress-Percusの予想についての数学的研究について述べる。(1)-(4)の非負解の時間局所的一意存在に関して、Yagi[18]はより一般的な非線形性のもとで示した。次は、(1)-(4)の非負な古典解 $(u(x, t), v(x, t))$ の基本的な性質である。

- (i)  $\int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx.$
- (ii)  $(u, v)$ の最大存在時間 $T_m$ が有限ならば、 $\lim_{t \rightarrow T_m} \sup_{\Omega} u(x, t) = +\infty.$
- (iii) 初期関数 $(u_0(x), v_0(x))$ が $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < L\}$  ( $0 < L < \infty$ )で球対称ならば、 $(u(x, t), v(x, t))$ は空間変数 $x$ に関して球対称関数である。

空間次元 $1$  ( $n = 1$ )のとき、(1)-(4)の非負解は時間大域的に存在し有界である。 $n = 2$ の場合、非負解の時間大域的存在に関して次の結果がある。

**定理 1** 次の条件(C1), (C2)

(C1)  $n = 2$ で、初期関数 $u_0$ は  $\int_{\Omega} u_0(x) dx < \frac{4\pi}{\alpha\chi}$  を満たす

(C2) 初期関数 $u_0, v_0$ は $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < L\}$  ( $0 < L < \infty$ )で球対称で  $\int_{\Omega} u_0(x) dx < \frac{8\pi}{\alpha\chi}$  を満たす

いずれかのもとで非負解は時間大域的に存在し有界である。

この定理は、条件(C1)のもとでBiler[1], Gajewski-Zacharias[3], Nagai-Senba-Yoshida[15]により独立に示され、条件(C2)のもとでは[15]で示された。

定理1の条件の不等式が成り立たないときどのような事が起こるのであろうか。Herrero-Velázquez[6, 7]は、球対称性の仮定の下で $\int_{\Omega} u_0(x) dx > 8\pi/(\alpha\chi)$ の場合走化性の崩壊が起こりえることを漸近解析の手法を用いて示した。彼らの結果は次の定理として述べられる。

**定理 2**  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < L\}$  ( $0 < L < \infty$ )とし、任意の正数 $T$ を与える。このとき、原点において時刻 $T$ で爆発する(1)-(4)の非負な球対称

解  $(u, v)$  で,  $\int_{\Omega} u_0(x) dx > 8\pi/(\alpha\chi)$  を満たし次の挙動を示すものが存在する.

$$(i) \text{ (漸近挙動)} \quad u(x, T) = \frac{8\pi}{\alpha\chi} \delta_0 + f(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

ここで,  $\delta_0$  は原点でのデルタ関数,  $f$  は  $f \in L^1, \notin L^p (p > 1)$  なる非負な球対称関数.

$$(ii) \text{ (爆発の形状)} \quad u(x, t) \sim \frac{1}{(R(t))^2} \bar{u}\left(\frac{|x|}{R(t)}\right) \quad (t \rightarrow T, |x| = O(R(t))).$$

ここで  $R(t), \bar{u}$  は以下を満たす関数である.

$$R(t) \sim C(T-t)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}|\log(T-t)|^{\frac{1}{2}}} \quad (t \rightarrow T) \text{ for some } C > 0,$$

$$\bar{u}(x) = \frac{8}{\alpha\chi(1+|x|^2)^2}.$$

定理 1 と定理 2 より, 空間 2 次元で  $8\pi/(\alpha\chi)$  は球対称解が有限時間で爆発する可能性があるかどうかの閾値である事を示している. 定理 2 は, 与えられた有限時間で爆発しデルタ関数的な特異性を持つ非負な球対称解の存在を述べているが, 非負解に対して次の問題

**問題 1** 有限時間で爆発するための初期関数に関する条件を与えよ

**問題 2** 爆発時刻を初期関数から決定せよ

は未解決であるように思われる. それでは, 有限時間で爆発する非負解に対して次の問題についてはどうであろうか.

**問題 3** 爆発点の位置を求めよ. 特に, 球対称解の爆発点は原点のみか

**問題 4** 爆発点でデルタ関数的な特異性を持つのか

**問題 5** 爆発時刻での爆発の形状を求めよ

問題 3 と問題 4 に関しては [4, 14] で部分的な結果が得られているが, 問題 5 に関しては未解決である.

**定理 3** ([14])  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < L\}$  のとき, 有限時間で爆発する非負な球対称解の爆発点は原点のみである.

条件  $\int_{\Omega} u_0(x) dx < 4\pi/(\alpha\chi)$  のもとで、定理 1 より非負解は爆発しないが、条件  $4\pi/(\alpha\chi) \leq \int_{\Omega} u_0(x) dx < 8\pi/(\alpha\chi)$  のもとで球対称でない解は有限時間で爆発する可能性がある。このとき、次の定理は爆発点の場所の情報を与える。

**定理 4 ([4])**  $n = 2$ . 条件  $4\pi/(\alpha\chi) \leq \int_{\Omega} u_0(x) dx < 8\pi/(\alpha\chi)$  のもとで非負解は有限時間で爆発すると仮定する。このとき、爆発点は  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  上にある。

$u$  の爆発点  $q$  が孤立しているとは、点  $q$  のある近傍に  $q$  以外の爆発点が無いことをいう。このような爆発点では走化性の崩壊が起こる事を次の定理は示している。

**定理 5 ([14])**  $n = 2$ .  $(u, v)$  は有限時間  $T_m$  で爆発する非負解とする。このとき、点  $q \in \bar{\Omega}$  が  $u$  の孤立爆発点ならば、正数  $m$  で

$$(5) \quad m \geq \begin{cases} \frac{8\pi}{\alpha\chi} & \text{if } q \in \Omega, \\ \frac{4\pi}{\alpha\chi} & \text{if } q \in \partial\Omega \end{cases}$$

を満たすものと点  $q$  のある閉近傍  $\Omega(x_0, \varepsilon) = \{x \in \bar{\Omega} \mid |x - q| \leq \varepsilon\}$  上の非負関数  $f \in L^1(\Omega(x_0, \varepsilon)) \cap C(\Omega(x_0, \varepsilon) \setminus \{q\})$  が存在して

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(\cdot, t) = m\delta_q + f \quad \text{weak star in } \mathcal{M}(\Omega(x_0, \varepsilon))$$

となる。ここで、 $\delta_q$  は爆発点  $q$  でのデルタ関数で、 $\mathcal{M}(\Omega(x_0, \varepsilon))$  は  $\Omega(x_0, \varepsilon)$  上のラドン測度の空間。

爆発点の孤立性が示されれば、有限時間で爆発する非負解は爆発点でデルタ関数的な特異性を持つことが示されるが、爆発点の孤立性に関しては未解決である。しかしながら、定理 3 と定理 5 より有限時間で爆発する非負な球対称解は原点でデルタ関数的な特異性を持つことが分かる。

(1)-(4) に関してはかなりの問題が未解決として残っているが、(1)-(4) を単純化した以下で述べる方程式系に関しては研究の進展がみられる。

Jäger-Luckhaus[10] は, (1)-(4) において  $\gamma = O(\tau), \alpha = O(1)$  のとき  $\tau \rightarrow 0$  とした極限系

$$(JL) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u - \chi u \nabla v) & \text{in } \Omega, t > 0, \\ 0 = \Delta v + \alpha(u - \bar{u}_0) & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega, t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{on } \Omega, \\ \int_{\Omega} v(x, t) dx = 0 \end{cases}$$

を考え, 走化性モデルの解の有限時間爆発に関する最初の数学的結果を与えた. ここで,  $\bar{u}_0$  は  $u_0$  の  $\Omega$  での平均で  $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_0(x) dx$  で与えられる.  $\Omega$  を滑らかな境界をもつ  $\mathbb{R}^2$  の有界領域としたとき,  $\int_{\Omega} u_0(x) dx$  が小さければ (JL) の解は時間大域的に存在し,  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < L\}$  ( $0 < L < \infty$ ) での球対称な初期関数に対して  $\int_{\Omega} u_0(x) dx$  が大きければ球対称解は有限時間で爆発することを示した ([10]). (JL) に対して走化性の崩壊が起こること (定理 2) が Herrero-Velázquez[5] により示されている.

[12] において,  $\tau = 0$  とした系

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla u - \chi u \nabla v) & \text{in } \Omega, t > 0, \\ 0 = \Delta v - \gamma v + \alpha u & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega, t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{on } \Omega, \end{cases}$$

を考え,  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < L\}$  ( $0 < L < \infty$ ) として次を示した.

- (i)  $n = 1, 2$ .  $n = 2$  のとき球対称な初期関数は  $\int_{\Omega} u_0(x) dx < 8\pi/(\alpha\chi)$  を満たすとする. このとき, 球対称解は時間大域的に存在し有界である.
- (ii)  $n \geq 2$ . 非自明な初期関数  $u_0$  は球対称とし,  $n = 2$  のとき  $\int_{\Omega} u_0(x) dx > 8\pi/(\alpha\chi)$  を満たすとする. このとき,  $\int_{\Omega} u_0(x)|x|^n dx$  が十分小ならば球対称解は有限時間で爆発する.

$\int_{\Omega} u_0(x)|x|^n dx$  が十分小であることは,  $u_0$  が原点でのデルタ関数に十分近い事を意味する. 球対称解の有限時間爆発には, 空間 2 次元では  $8\pi/(\alpha\chi)$  以上の総個体数を必要とするが, 空間 3 次元以上では総個体数が小さくても起こりえる事を上の定理は示している. 空間 2 次元での球対称でない解に対しては,  $4\pi/(\alpha\chi)$  以上の総個体数で有限時間爆発が起こりえる.

**定理 6 ([13])**  $n = 2$  で,  $q \in \bar{\Omega}$  とする. 次の条件 (C3), (C4)

$$(C3) \quad q \in \Omega, \quad \int_{\Omega} u_0(x) dx > \frac{8\pi}{\alpha\chi}$$

$$(C4) \quad q \text{ は } \partial\Omega \text{ の開線分上の点で, } \int_{\Omega} u_0(x) dx > \frac{4\pi}{\alpha\chi}$$

いずれかのもとで,  $\int_{\Omega} u_0(x)|x - q|^2 dx$  が十分小ならば解は有限時間で爆発する.

走化性の崩壊に関して, 爆発点は有限個であることが最近 Senba-Suzuki[17] により示された.

**定理 7 ([17])**  $n = 2$  のとき, 有限時間  $T_m$  で爆発する (P) の解  $(u, v)$  に対して次がなりたつ.

- (i) 爆発点は有限個である.
- (ii) 爆発点を  $q_1, q_2, \dots, q_l$  とすると, 正数  $m_j (1 \leq j \leq l)$  で

$$(6) \quad m_j \geq \begin{cases} \frac{8\pi}{\alpha\chi} & \text{if } q \in \Omega, \\ \frac{4\pi}{\alpha\chi} & \text{if } q \in \partial\Omega \end{cases}$$

を満たすものと非負関数  $f \in L^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{q\})$  が存在して

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(\cdot, t) = \sum_{j=1}^l m_j \delta_{q_j} + f \quad \text{weak star in } \mathcal{M}(\bar{\Omega})$$

となる.

定理 5 の (5) や定理 7 の (6) で等式が成立するかどうか, (JL) や (P) の有限時間爆発解に対する爆発時刻での爆発の形状や爆発点の位置等に関しても未解決である. 空間 3 次元では, 上で述べた爆発の形態以外の爆発が起こりえる事が [8, 9] で予想されており, これからの課題である.

## 参考文献

- [1] P. Biler, Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **8** (1998) 715–743.
- [2] S. Childress and J. K. Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, *Math. Biosci.*, **56** (1981), 217–237.
- [3] H. Gajewski and K. Zacharias, Global behavior of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis, *Math. Nachr.*, **195** (1998), 77–114.
- [4] G. Harada, T. Nagai, T. Senba and T. Suzuki, Concentration lemma, Brezis-Merle type inequality, and a parabolic system of chemotaxis, to appear in *Adv. Differential Equations*.
- [5] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, Singularity patterns in a chemotaxis model, *Math. Ann.*, **306** (1996), 583–623.
- [6] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, Chemotaxis collapse for the Keller-Segel model, *J. Math. Biol.*, **35** (1996), 177–194.
- [7] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, A blow-up mechanism for a chemotactic model, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, **XXIV** (1997), 633–683.
- [8] M. A. Herrero, E. Medina and J. J. L. Velázquez, Finite-time aggregation into a single point in a reaction-diffusion system, *Nonlinearity*, **10** (1997), 1739–1754.
- [9] M. A. Herrero, E. Medina and J. J. L. Velázquez, Self-similar blow-up for a reaction-diffusion system, *J. Comp. Appl. Math.*, **97** (1998), 99–119.
- [10] W. Jäger and S. Luckhaus, On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **329** (1992), 819–824.
- [11] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biol.*, **26** (1970), 399–415.

- [12] T. Nagai, Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **5** (1995), 581–601.
- [13] T. Nagai, Blowup of nonradial solutions to a parabolic-elliptic system modeling chemotaxis in two-dimensional domains, to appear in *J. Inequal. Appl.*
- [14] T. Nagai, T. Senba and T. Suzuki, Chemotactic collapse in a parabolic system of mathematical biology, *Hiroshima Math. J.*, **30** (2000), 463–497.
- [15] T. Nagai, T. Senba and K. Yoshida, Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis, *Funckcial. Ekvac.*, **40**(1997), 411–433.
- [16] V. Nanjundiah, Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology, *J. Theor. Biol.*, **42** (1973), 63–105.
- [17] T. Senba and T. Suzuki, Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic of mathematical biology, to appear in *Adv. Differential Equations*.
- [18] A. Yagi, Norm behavior of solutions to the parabolic system of chemotaxis, *Math. Japonica*, **45** (1997), 241–265.

Department of Mathematics  
Graduate School of Science  
Hiroshima University  
Higashi-Hiroshima, 739-8526, JAPAN  
nagai@math.sci.hiroshima-u.ac.jp