数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 136-152

$N=1$ Fusion 代数について

古閑義之 (阪大理)

1 導入

よく知られているように Virasoro 代数の minimal series において有理的な頂点作用素代数が現れ, その Fusion 代数の構造定数は [FF] により決定されている. 一方, affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の真空表現も頂点作用素代数の構造を持ち, 特に最高 weight が admissible weight と呼ばれる場合には有理的頂点作用素代数となる. (Fusion 代数の構造は [FM1] により決定.) 更に, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ と Virasoro 代数の表現の間には, 量子化された Drinfeld-Sokolov resuction と呼ばれる対応が知られており, それは同時に Fusion 代数の間の対応も与える [FM2].

よりランクの高い affine Lie 代数, 例えば $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ $(n \geq 3)$ または $\mathcal{W}_n$ 代数の頂点作用素代数の有理性や Fusion 代数の構造決定及びそれらの関連を調べることは, 次の目標のひとつであると思われる. しかしながら, $\mathcal{W}_n$ 代数の表現論が十分に解明されているとはいえず, またいくつかの技術的な問題点もある. そこでランクの低い Lie 超代数の場合, 具体的には $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ 及び $N=1$ Virasoro 超代数について, その頂点作用素(超)代数と Fusion 代数の構造を調べることを試みた [IK1], [IK2]. ここでは, 得られた結果およびその証明について解説したい.

なおこれらの結果は, 神戸大学理学部の庵原謙治さんとの共同研究により得られたものです.

2 準備

Fusion 代数について述べるための準備として, ここでは affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の admissible 表現及び Virasoro 代数の minimal series 表現の最高 weight がどのように parametrize されるかについて簡単に復習しておく. 続いて, affine Lie 超代数 $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ 及び $N=1$ Virasoro 超代数の定義と, その admissible 表現, minimal series 表現の最高 weight の parametrization について述べる.

2.1 admissible 表現

admissible 表現とは [KW] により導入された affine Lie 代数のある既約表現のクラスであり, 顕著な特徴としては指標の modular 不変性が挙げられる. まずその定義を簡単に復習する.

必要な記号を導入する. $\hat{\mathfrak{g}}$ を affine Lie 代数, $\hat{\mathfrak{h}}$ をその Cartan 部分代数, Δ (resp. Π, Δ^+, Δ^{re}) を $\hat{\mathfrak{g}}$ のroot (resp. simple root, positive root, real root) の集合とする. $\hat{\mathfrak{h}}^*$ 上の非退化な symmetric bilinear form [Kac] を $(\cdot,\cdot)$ と書く. $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$ に対して

$\alpha^\vee \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を $\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ で定義する．任意の simple root α_i に対し $(\rho, \alpha_i^\vee) = 1$ を満足する $\rho \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を固定する．

$\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ について, integral root の集合 Δ_Λ とその simple root の集合 Π_Λ を

$$\Delta_\Lambda := \{\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}} | (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\}$$
$$\Pi_\Lambda := \Delta_\Lambda^+ \setminus (\Delta_\Lambda^+ + \Delta_\Lambda^+)$$

で定義する．但し, $\Delta_\Lambda^+ := \Delta_\Lambda \cap \Delta^+$.

定義 2.1 $\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ が次の条件を満足する時, *admissible weight* と呼ぶ.

1. $(\Lambda + \rho, \alpha^\vee) > 0$ $({}^\forall\alpha \in \Delta_\Lambda^+)$,
2. $\mathbb{C}\Pi_\Lambda = \mathbb{C}\Pi$.

更に, *admissible weight* を最高 *weight* とする既約最高 *weight* 表現を *admissible* 表現とよぶ.

注意 2.1 *affine Lie* 超代数 (正確には, 長さ 0 の *odd root* を持たない *affine Lie* 超代数) の場合も, ほぼ同様に *admissible weight* が定義される. 但し, *integral root* の集合 Δ_Λ の定義が若干, 補正が必要. (詳しくは例えば [IK1] をご覧下さい.)

ここで, admissible weight の集合が具体的にどのように与えられるのか $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合を例に述べる．

$\hat{\mathfrak{h}} \subset \hat{\mathfrak{sl}}_2$ を Cartan 部分代数とし $\Lambda_0, \Lambda_1 \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の fundumental weight, また $h_0, h_1 \in \hat{\mathfrak{h}}$ を simple coroot とする．この時 $c = h_0 + h_1$ は $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の center.

$\lambda, k \in \mathbb{C}$ について $\Lambda_{\lambda,k} \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を

$$\Lambda_{\lambda,k} := k\Lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda\alpha_1,$$

とおく．$\langle \Lambda_{\lambda,k}, c\rangle = k$ に注意する．この時,

$$\begin{aligned} &\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^* : \text{admissible weight} \\ &\Leftrightarrow\ \Lambda = \Lambda_{\lambda,k},\ (k = -2 + \frac{p}{q},\ \lambda \in S_{p,q}^{\mathfrak{sl}_2}), \\ &\quad {}^\exists p, q \in \mathbb{Z},\ p \geq 2,\ q \geq 1,\ (p,q) = 1, \end{aligned}$$

但し,

$$S_{p,q}^{\mathfrak{sl}_2} := \left\{ m - s\frac{p}{q} - 1 \middle| 1 \leq m \leq p-1,\ 0 \leq s \leq q-1 \right\}.$$

ここでは上の条件を満足する k を, admissible level と呼ぶことにする．なお, $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の classical part $\mathfrak{sl}_2$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_1$ について, $\dim \mathfrak{h}^* = 1$ より, 以下 $\lambda \leftrightarrow \frac{1}{2}\lambda\alpha_1$ により $\mathbb{C}$ と $\mathfrak{h}^*$ を同一視し, 必要に応じて, $S_{p,q}^{\mathfrak{sl}_2} \subset \mathfrak{h}^*$ とみなす.

2.2 minimal series 表現

Virasoro 代数 Vir は

$$\mathrm{V}ir := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_i \oplus \mathbb{C}C,$$
$$[L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{1}{12}(i^3 - i)\delta_{i+j,0}C,$$
$$[C, \mathrm{V}ir] = \{0\}$$

で定義される Lie 代数であった. $z \in \mathbb{C}$ を central charge, $h \in \mathbb{C}$ を L_0-weight とするとき, minimal series 表現の最高 weight は, 次のように parametrize される.

$$(z,h) : \mathrm{V}ir \text{ の minimal series 表現の最高 weight}$$
$$\Leftrightarrow\ z = 13 - 6\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right),\ h \in S^{\mathrm{V}ir}_{p,q},$$
$$^{\exists}p, q \in \mathbb{Z},\ p, q \geq 2,\ (p,q) = 1,$$

但し,

$$S^{\mathrm{V}ir}_{p,q} := \left\{ \frac{(rq-sp)^2 - (p-q)^2}{4pq} \middle| 1 \leq r \leq p-1,\ 1 \leq s \leq q-1 \right\}.$$

2.3 $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$

ここでは, affine Lie 超代数 $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ について説明したい. 最初に, 有限次元の単純 Lie 超代数 $\mathfrak{osp}(1|2)$ を説明する. $\mathfrak{osp}(1|2)$ は次の生成元と関係式により定義される 5-次元のリー超代数:

$$\mathfrak{osp}(1|2) = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}F,$$
$$|E| = |h| = |F| = \bar{0},\quad |e| = |f| = \bar{1},\ [h,e] = 2e,\ [h,e] = -2f,\ [e,f] = h,$$
$$E = \frac{1}{2}[e,e],\ F = \frac{1}{2}[f,f],\ [E,e] = [F,f] = 0,$$

である. 但し $|x|$ は x の parity を表す.

affine Lie 超代数 $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ は $\mathfrak{osp}(1|2)$ の affinization , 則ち,

$$\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2) = \mathfrak{osp}(1|2) \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

である. 但し, 交換関係は

$$|x \otimes z^r| = |x|\ (x \in \mathfrak{osp}(1|2)),\ |c| = |d| = \bar{0},$$
$$[x \otimes z^r, y \otimes z^s] = [x,y] \otimes z^{r+s} + r\delta_{r+s,0}(x,y)c,$$
$$[d, x \otimes z^r] = rx \otimes z^r,\quad [c, \widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)] = 0.$$

ここでは $(\cdot,\cdot)$ は $\mathfrak{osp}(1|2)$ 上の非退化な supersymmetric invariant bilinear form. つまり, $(x,y) = (-1)^{|x||y|}(y,x)$ 及び $([x,y],z) = (x,[y,z])$ を満足する. 以下では, $(h,h) = 4$ と正規化しておく.

主結果の証明のため, $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の三角分解および Verma 加群が必要となるので, ここで記号を準備しておきたい. 簡単のため, $\mathfrak{g} := \mathfrak{osp}(1|2)$, $\hat{\mathfrak{g}} := \widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ おく. 以下 $\hat{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分代数を $\hat{\mathfrak{h}} := \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ と固定し,

$$\hat{\mathfrak{n}}^{\pm} := \mathbb{C}x_{\pm} \oplus \mathfrak{g} \otimes (z^{\pm 1}\mathbb{C}[z^{\pm 1}])$$

とおく. 但し, $x_+ := e$, $x_- := f$. この時, $\hat{\mathfrak{g}}$ は次の三角分解をもつ:

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}^+ \oplus \hat{\mathfrak{h}} \oplus \hat{\mathfrak{n}}^-.$$

更に $\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ に対して, $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の Verma 加群 $M(\Lambda)$ を以下で定義する:
最初に $\hat{\mathfrak{n}}^+ \oplus \hat{\mathfrak{h}}$ の 1-次元表現 $\mathbb{C}\mathbf{1}_\Lambda$ を

1. $h.\mathbf{1}_\Lambda = \Lambda(h)\mathbf{1}_\Lambda$ $(h \in \hat{\mathfrak{h}})$,

2. $x.\mathbf{1}_\Lambda = 0$ $(x \in \hat{\mathfrak{n}}^+)$,

で導入し, その誘導表現として $M(\Lambda)$ を

$$M(\Lambda) = Ind^{\hat{\mathfrak{g}}}_{\hat{\mathfrak{n}}^+ \oplus \hat{\mathfrak{h}}} \mathbb{C}\mathbf{1}_\Lambda$$

で定義する. $\alpha \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を $\alpha(h) = 2$, $\alpha(c) = \alpha(d) = 0$ で定義される $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の root, $\delta \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を positive な imaginary root の生成元とすると $M(\Lambda)$ は次の weight 分解をもつ:

$$M(\Lambda) = \bigoplus_{j, i+2j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M(\Lambda)_{i\alpha + j\delta},$$
$$M(\Lambda)_\beta := \{x | h.x = (\Lambda - \beta)(h)x \ (^\forall h \in \hat{\mathfrak{h}})\}.$$

2.4 $N = 1$ Virasoro 超代数

続いて, $N = 1$ Virasoro 超代数を導入する. $\epsilon \in \{\frac{1}{2}, 0\}$ とする. $N = 1$ Virasoro 超代数

$$\mathrm{Vir}_\epsilon := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_i \oplus \bigoplus_{j \in \mathbb{Z} + \epsilon} \mathbb{C}G_j \oplus \mathbb{C}C$$

は次の交換関係で定義される Lie 超代数:

$$\begin{aligned}
&|L_i| = |C| = \bar{0}, \ |G_j| = \bar{1}, \\
&[L_i, L_j] = (i - j)L_{i+j} + \frac{1}{12}(i^3 - i)\delta_{i+j,0}C, \\
&[G_i, L_j] = (i - \frac{1}{2}j)G_{i+j}, \\
&[G_i, G_j] = 2L_{i+j} + \frac{1}{3}(i^2 - \frac{1}{4})\delta_{i+j,0}C, \\
&[C, \mathrm{Vir}_\epsilon] = \{0\},
\end{aligned} \tag{1}$$

である. $\mathrm{Vir}_{\frac{1}{2}}$ は Neveu-Schwarz 代数, Vir_0 は Ramond 代数と呼ばれる.

2.5 admissible 表現及び minimal series 表現

上で導入した, $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ と Vir_ϵ の admissible weight と minimal series 表現の最高 weight の parametrization を与えることにする.

$\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$: 簡単のため, $x \otimes 1 \in \widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ と $x \in \mathfrak{osp}(1|2)$ を同一視する. $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ のコルート h_0, h_1 を $h_0 := \frac{1}{2}(c-h)$, $h_1 := h$ととる. fundumental weight $\Lambda_0, \Lambda_1 \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ 及び simple root $\alpha_0, \alpha_1 \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ は $\langle \Lambda_i, h_j \rangle = \delta_{i,j}$ $(i,j = 0,1)$,

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha_0, h_0 \rangle & \langle \alpha_1, h_0 \rangle \\ \langle \alpha_0, h_0 \rangle & \langle \alpha_1, h_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

満たす. $\lambda, k \in \mathbb{C}$ について $\Lambda_{\lambda,k} \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を

$$\Lambda_{\lambda,k} := \frac{1}{2}k\Lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda\alpha_1,$$

とおく. $\langle \Lambda_{\lambda,k}, c \rangle = k$ に注意する. この時,

$$\begin{aligned} &\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^* : \text{admissible weight} \\ &\Leftrightarrow \ \Lambda = \Lambda_{\lambda,k}, \ (k = -3 + \frac{p}{q}, \ \lambda \in S^{\mathfrak{osp}}_{p,q}), \\ &\quad {}^\exists p,q \in \mathbb{Z}, \ p \geq 2, \ q \geq 1, p \equiv q \pmod 2, \ \left(\frac{p-q}{2}, q\right) = 1, \end{aligned}$$

但し,

$$S^{\mathfrak{osp}}_{p,q} := \left\{ m - s\frac{p}{q} - 1 \ \middle| \ \begin{array}{l} 1 \leq m \leq p-1, \ 0 \leq s \leq q-1, \\ m + s \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right\}.$$

ここでは上の条件を満足する k を admissible level とよぶ. また $\mathfrak{sl}_2$ の場合と同様に, 必要に応じて, $\lambda \leftrightarrow \frac{1}{2}\lambda\alpha_1$ により $S^{\mathfrak{osp}}_{p,q} \subset (\mathbb{C}h)^*$ みなす.

$\mathrm{V}ir_\epsilon$: minimal series 表現の最高 weight (z,h) は, 次のように parametrize される. 但し $z \in \mathbb{C}$ を central charge, h を L_0-weight とする.

$$\begin{aligned} &(z,h) : \mathrm{V}ir_\epsilon \text{ の minimal series 表現の最高 weight} \\ &\Leftrightarrow \ z = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right), \ h \in S^{\mathrm{V}ir_\epsilon}_{p,q}, \\ &\quad {}^\exists p,q \in \mathbb{Z}, \ p,q \geq 2, p \equiv q \pmod 2, \ \left(\frac{p-q}{2}, q\right) = 1, \end{aligned}$$

但し,

$$S^{\mathrm{V}ir_\epsilon}_{p,q} := \left\{ \frac{(rq-sp)^2 - (p-q)^2}{8pq} + \frac{1}{16}(1-2\epsilon) \ \middle| \ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq p-1, \ 1 \leq s \leq q-1 \\ s + t \equiv 1 - 2\epsilon \pmod 2 \end{array} \right\}$$

3 Fusion 代数

このセクションの目的は, Fusion 代数の一つの定式化について述べることである. 但し, Ramond 代数の表現も含めて取り扱えるような頂点作用素超代数の定式化が現在までのところ知られていないようであるため, 以下で述べるような [FF] による定義を用いる.

$\mathfrak{g}$ を$\mathbb{C}$上有限次元の単純 Lie (超)代数とし, 以下 affine Lie (超)代数 $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ の Fusion 代数の定義について述べたい. 但し, 続くセクションで必要となるのは, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{osp}(1|2)$ の場合である. なお, Virasoro 代数及び $N = 1$ Virasoro 代数の場合も定義はほぼ同様なので, これらの場合は [FF] (または [IK2]) を見て下さい.

$\mathbb{C}P^1$ の有限集合 E に対し, Fusion 代数は次の超リー代数 $\mathfrak{g}(E)$ の coinvariant を用いて定義される:

$$\mathfrak{g}(E) := \{f : \mathbb{C}P^1 \to \mathfrak{g} | f\text{は}\mathbb{C}P^1 \setminus E\text{上正則な有理型関数}\}.$$

Fusion 代数の定義のため, 最初に $\mathbb{C}P^1$ の各点に付随した $\tilde{\mathfrak{g}}$ とその表現を導入しよう. しばらく $w \in \mathbb{C}P^1$ を固定して話をすすめる. w の局所座標 z_w を

$$z_w = \begin{cases} z - w & \text{if } w \neq \infty, \\ z^{-1} & \text{if } w = \infty. \end{cases}$$

により定義し Lie 超代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_w))$ (但し, $\mathbb{C}((t))$ は $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の t の正べきに関する完備化) の中心拡大として$\mathbb{C}P^1$ の点 w に付随する affine 超 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}_w$ を以下で導入する: $\langle , \rangle_w$ を

$$\begin{aligned} &\langle p(z_w) \otimes x, q(z_w) \otimes y \rangle_w := (x, y) \operatorname{Res}_{z_w=0} p'(z_w) q(z_w) dz_w, \\ &\quad p(z_w),\ q(z_w) \in \mathbb{C}((z_w)), \quad x, y \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

により与えられる $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((z_w))$ の cocycle とし (但し $p'(z_w) = \frac{d}{dz_w} p(z_w)$), この cocycle による1 次元中心拡大を

$$\tilde{\mathfrak{g}}_w := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((z_w)) \oplus \mathbb{C}c$$

とおく.

つぎに $\tilde{\mathfrak{g}}_w$ のVerma 加群, 既約最高 weight 加群を導入する. まず $\tilde{\mathfrak{g}}_w$ の Borel 部分代数 $\tilde{\mathfrak{b}}_w$ を以下のように固定する:

$$\tilde{\mathfrak{b}}_w = \mathfrak{b}_w \oplus (\mathfrak{g} \otimes z_w \mathbb{C}[[z_w]]) \oplus \mathbb{C}c. \tag{2}$$

$\mathbb{C}[[t]]$ は $\mathbb{C}[t]$ の t の正べきに関する完備化で, $\mathfrak{b}_w$ は以下の条件を満足する $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数:

$$w \neq w' \Rightarrow \mathfrak{b}_w \neq \mathfrak{b}_{w'}.$$

注意 **3.1** $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{osp}(1|2)$ の場合, $\mathfrak{g}$ の *Borel* 部分代数の集合と $\mathbb{C}P^1$ の点の集合とが 1 : 1 に対応する. この対応により例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2)$ の場合, 上の条件を満足する $\{\mathfrak{b}_w | w \in \mathbb{C}P^1\}$ を以下のように選ぶことができる:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{b}_w = \mathbb{C}h_w \oplus \mathbb{C}e_w \oplus \mathbb{C}E_w \\ &\quad h_w = h + 2wF,\ e_w = e + wf,\ E_w = E + wh + w^2F, \quad (w \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}), \\ &\quad h_\infty = -h,\ e_\infty = f,\ E_\infty = F, \end{aligned}$$

$\tilde{\mathfrak{g}}_w$ 上の Verma 加群を定義しよう．そのために最初に，$\tilde{\mathfrak{g}}_w$ の 1 次元表現を導入する．$\mathfrak{h}_w$ を $\mathfrak{h}_w \subset \mathfrak{b}_w$ なる $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とし，$\mathfrak{b}_w = \mathfrak{h}_w \oplus \mathfrak{n}_w^+$ (但し，$\mathfrak{n}_w^+$ はべき零 Lie 超代数) とする．$k \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^* \simeq (\mathfrak{h}_w)^*$ について $\tilde{\mathfrak{g}}_w$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_{w,\lambda,k} = \mathbb{C}\mathbf{1}_{w,\lambda,k}$ を

$$\begin{array}{ll} h.\mathbf{1}_{w,\lambda,k} = \lambda(h)\mathbf{1}_{w,\lambda,k}, & h \in \mathfrak{h}_w \\ x.\mathbf{1}_{w,\lambda,k} = 0 & x \in \mathfrak{n}_w^+ \oplus \mathfrak{g} \otimes z_w\mathbb{C}[[z_w]], \\ c.\mathbf{1}_{w,\lambda,k} = k\mathbf{1}_{w,\lambda,k}. & \end{array} \tag{3}$$

により定義し，$\tilde{\mathfrak{g}}_w$ 上の Verma 加群を誘導表現

$$M_{\lambda,k}(w) := \mathrm{Ind}_{U(\tilde{\mathfrak{b}}_w)}^{U(\tilde{\mathfrak{g}}_w)} \mathbb{C}_{w,\lambda,k}$$

として定義する．$M_{\lambda,k}(w)$ の既約商加群を $L_{\lambda,k}(w)$ と書く．

以下，$\mathbb{C}P^1$ の有限集合 $E = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ と $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\} \subset \mathfrak{h}^*$ に対し，$\bigoplus_{i=1}^m L_{\lambda_i,k}(w_i)$ を $\mathfrak{g}(E)$-加群とみなし，$\mathfrak{g}(E)$-加群 としての coinvariant の次元を用いて Fusion 代数を定義する．そのための準備として，$\mathfrak{g}_E := \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_w))$ とおき，cocycle $\langle , \rangle_E = \sum_{i=1}^m \langle , \rangle_{w_i}$ による $\mathfrak{g}_E$ の 1 次元中心拡大を $\tilde{\mathfrak{g}}_E$ と書く．

この時，E の各点での Laurent 展開を考えることにより，Lie 超代数の射

$$T : \mathfrak{g}(E) \longrightarrow \mathfrak{g}_E$$

が得られ，更にこれは，次の射

$$\tilde{T} : \mathfrak{g}(E) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_E \tag{4}$$

に持ち上がる (∵ 留数定理)．我々は，$\bigoplus_{i=1}^m L_{\lambda_i,k}(w_i)$ を自然に $\tilde{\mathfrak{g}}_E$-加群とみなし，$\tilde{T}$ による引き戻しを考えることにより，$\bigoplus_{i=1}^m L_{\lambda,k}(w_i)$ を $\mathfrak{g}(E)$-加群とみなす．更に $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\Phi_m(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) := \dim H_0(\mathfrak{g}(E), \bigotimes_{i=1}^m L_{\lambda_i,k}(w_i))$$

とおく．Φ_2 及び Φ_3 を用いて Fusion 代数を定義しよう．まず，$\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ 及び $\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の値は $\mathbb{C}P^1$ の点の集合 E の取り方にはよらないことを注意しておく．$\tilde{\mathfrak{g}}$ の level $k \in \mathbb{C}$ における Fusion 代数は以下で定義される:

定義 3.1 *$\mathfrak{h}^*$ の部分集合 $\mathcal{S}_k^{\mathfrak{g}}$ をひとつ固定し，$\mathcal{A}_k^{\mathfrak{g}} := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{S}_k^{\mathfrak{g}}} \mathbb{Z}\ell_\lambda$ とおく．$\ell_{\lambda_1}, \ell_{\lambda_2} \in \mathcal{A}_k^{\mathfrak{g}}$ に対して積 $\ell_{\lambda_1} \circ \ell_{\lambda_2}$ を*

$$\ell_{\lambda_1} \circ \ell_{\lambda_2} = \sum_{\lambda_3 \in S_k} N_{\lambda_1,\lambda_2}^{\lambda_3} \ell_{\lambda_3}, \quad N_{\lambda_1,\lambda_2}^{\lambda_3} := \frac{\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\Phi_2(\lambda_3, \lambda_3)}$$

により定義し，$\mathcal{A}_k^{\mathfrak{g}}$ を level k における Fusion 代数とよぶ．

注意 3.2 *以下のセクションで現れる Fusion 代数については，*

$$N_{\lambda_1,\lambda_2}^{\lambda_3} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad ({}^\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{S}_k^{\mathfrak{g}})$$

が成立し積 $\circ$ は $\mathbb{Z}$-加群 $\mathcal{A}_k^{\mathfrak{g}}$ 上 well-defined.

4 主結果

$\hat{\mathfrak{sl}}_2$, $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の admissible level 及び Virasoro 代数, $N=1$ Virasoro 超代数のminimal series の central charge における Fusion 代数は, $\mathfrak{sl}_2$ と $\mathfrak{osp}(1|2)$ の量子展開環の表現環を用いて記述することができる. ここでは最初に Virasoro 代数と $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ に関する結果 [FF], [FM1] を述べ, 続いて我々の主結果を与える.

4.1 準備

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ついて, シンボル $\{V_i | 0 \leq i \leq k\}$ を基底とする $\mathbb{Z}$-自由加群を $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2}$ と書き, $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2}$ 上の積 $\dot{\otimes}_k$ を

$$V_i \dot{\otimes}_k V_j := V_{|i-j|} \oplus V_{|i-j|+2} \oplus V_{|i-j|+4} \oplus \cdots \oplus V_{\min\{2k-i-j,\ i+j\}}$$

で定義する. この積に関して $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2}$ は可換な結合代数となる.

注意 4.1　*1.* $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ における *Fusion* 代数は $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2}$ と同型.

同様に $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ついて, シンボル $\{V_i^\sigma | 0 \leq i \leq k,\ \sigma \in \mathbb{Z}^2\}$ を基底とする $\mathbb{Z}$-自由加群を $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ と書き, $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ 上の積 $\dot{\otimes}_k$ を

$$V_i^\epsilon \dot{\otimes}_k V_j^\eta := V_{|i-j|}^{\epsilon+\eta} \oplus V_{|i-j|+1}^{\epsilon+\eta-1} \oplus V_{|i-j|+2}^{\epsilon+\eta} \oplus \cdots \oplus V_{\min\{2k-i-j,\ i+j\}}^{\epsilon+\eta},$$

で定義する. この場合も $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ は可換な結合代数となる.

後で述べるように, Fusion 代数は, 次で定義される $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2}$ または $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2}$ の商代数と同型になる:

$(V_i, V_j), (V_{i'}, V_{j'}) \in \mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2}$ について同値関係 $\approx$ を

$$(V_i, V_j) \approx (V_{i'}, V_{j'}) \Leftrightarrow i + i' = k \wedge j + j' = l$$

で定義する. また $(V_i^\sigma, V_j), (V_{i'}^\tau, V_{j'}) \in \mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2}$ について

$$(V_i^\sigma, V_j) \approx (V_{i'}^{\sigma'}, V_{j'}) \Leftrightarrow i + i' = k \wedge j + j' = l \wedge \sigma + \sigma' = \bar{0}$$

で定義する. この時, $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2} / \approx$ 及び $\mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2} / \approx$ は元々の可換代数の構造から誘導される自然な可換代数の構造をもつ. 以下, (V_i, V_j) を代表元とする $(\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2}) / \approx$ の元を $[(V_i, V_j)]$ と書き, (V_i^σ, V_j) を代表元とする $(\mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2}) / \approx$ の元を $[(V_i^\sigma, V_j)]$ と書く.

このとき,

$$k = \begin{cases} -2 + \frac{p}{q} & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \\ -3 + \frac{p}{q} & \text{if } \mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2) \end{cases}$$

$$\lambda = m - s\frac{p}{q} - 1 \in S_{p,q}^{\mathfrak{g}}$$

について,

$$\Lambda_{\lambda,k} \leftrightarrow [(V_s^{\bar{0}}, V_{m-1})] \tag{5}$$

は level k の admissible weight の集合と $(\mathcal{R}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2})/\approx$ との間の 1 対 1 対応を与えている.

同様に

$$z = \begin{cases} 13 - 6\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) & \text{if } \mathfrak{g} = \mathrm{V}ir \\ \frac{15}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) & \text{if } \mathfrak{g} = \mathrm{V}ir_\epsilon \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} \frac{(rq-sp)^2-(p-q)^2}{4pq} & \text{if } \mathfrak{g} = \mathrm{V}ir \\ \frac{(rq-sp)^2-(p-q)^2}{8pq} + \frac{1}{16}(1-2\epsilon) & \text{if } \mathfrak{g} = \mathrm{V}ir_\epsilon \end{cases}$$

$$(h \in S_{p,q}^{\mathrm{V}ir} \text{ or } \bigcup_{\epsilon=\frac{1}{2},0} S_{p,q}^{\mathrm{V}ir_\epsilon})$$

の場合,

$$(z,h) \leftrightarrow [(V_{r-1}, V_{s-1})] \tag{6}$$

は central charge z の minimal series 表現の最高 weight の集合と $(\mathcal{R}_k^{\mathfrak{sl}_2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_l^{\mathfrak{sl}_2})/\approx$ との間の 1 対 1 対応を与えている. この場合, 同値関係 $\approx$ は minimal series 表現の highest weight における Kac table の対称性に対応していることを注意しておく.

4.2 $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ と $\mathrm{V}ir$ の Fusion 代数

主結果を述べる前に, $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ と $\mathrm{V}ir$ の Fusion 代数の構造について述べておく.

$\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の admissible level $k := -2 + \frac{p}{q}$ $(p,q \in \mathbb{Z}, p \geq 2, q \geq 1, (p,q) = 1)$ における Fusion 代数 $\mathcal{A}_k^{\mathfrak{sl}_2}$ ($\mathfrak{h}^*$ の部分集合 $\mathcal{S}_k^{\mathfrak{sl}_2}$ は $S_{p,q}^{\mathfrak{sl}_2}$ とする) は以下のように記述される:

定理 4.2 ([FM1])

$$\mathcal{A}_k^{\mathfrak{sl}_2} \simeq (\mathcal{R}_{q-1}^{\mathfrak{osp}(1|2)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{p-2}^{\mathfrak{sl}_2})/\approx$$

但し, 同型は, 対応 *(5)* により与えられる.

同様に, $\mathrm{V}ir$ の minimal central charge $z := 13 - 6\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)$ $(p,q \in \mathbb{Z}, p,q \geq 2, (p,q) = 1)$ における Fusion 代数 $\mathcal{A}_z^{\mathrm{V}ir}$ (L_0-weight の集合は minimal series 表現の L_0-weight の集合 $S_{p,q}^{\mathrm{V}ir}$ とする) は以下のように記述される:

定理 4.3 ([FF])

$$\mathcal{A}_z^{\mathrm{V}ir} \simeq (\mathcal{R}_{q-2}^{\mathfrak{sl}_2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{p-2}^{\mathfrak{sl}_2})/\approx$$

但し, 同型は, 対応 *(6)* により与えられる.

4.3 $\hat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ と $\mathrm{V}ir_\epsilon$ の Fusion 代数

本稿の主結果は以下の通り:

p,q を条件 $p \geq 2$, $q \geq 1$, $p \equiv q \pmod 2$, $(\frac{p-q}{2}, q) = 1$ を満足する正の整数とする, つまり, $k := -3 + \frac{p}{q}$ は $\hat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の admissible level. この時, Fusion 代数 $\mathcal{A}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ ($\mathfrak{h}^*$ の部分集合 $\mathcal{S}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ は $S_{p,q}^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ とする) は以下のように記述される:

定理 4.4 ([IK1])

$$\mathcal{A}_k^{\mathfrak{osp}(1|2)} \simeq (\mathcal{R}_{q-1}^{\mathfrak{osp}(1|2)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{p-2}^{\mathfrak{sl}_2})/\approx$$

但し, 同型は, 対応 *(5)* により与えられる.

この結果に関して一つコメントしたい. 得られた Fusion 代数の具体的な記述は $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合と同様であるが, 正整数 p, q の取り方が $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合と異なるため, 例えば $p \equiv q \equiv \bar{0}$ (mod 2) の場合に構造定数に 2 が現れるなど, 状況は $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合より若干複雑になっている. この定理の証明は次のセクションで行う.

次に $N = 1$ Virasoro 超代数の Fusion 代数について得られた予想と部分的な結果について述べる. p, q を条件 $p, q \geq 2$, $p \equiv q$ (mod 2), $(\frac{p-q}{2}, q) = 1$ を満足する正の整数とする. 従って, $z := 13 - 6\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)$ は $\mathrm{V}ir_\epsilon$ の minimal central charge. この central charge における Fusion 代数 $\mathcal{A}_z^{N=1}$ ($L0$-weight の集合は minimal series 表現の L_0-weight の集合 $\bigcup_{\epsilon=\frac{1}{2},0} S_{p,q}^{\mathrm{V}ir_\epsilon}$ とする) については以下の予想を得た:

予想 4.1

$$\mathcal{A}_z^{N=1} \simeq (\mathcal{R}_{q-2}^{\mathfrak{sl}_2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{p-2}^{\mathfrak{sl}_2})/\approx$$

但し, 同型は, 対応 *(6)* により与えられる.

なお, $N = 1$ Virasoro 超代数の Fusion 代数を Neveu-Schwarz セクターに制限したものは部分代数になる. この部分代数に制限した場合, 上の予想は成立する [IK2].

5 証明

このセクションでは, 主結果のうち定理 4.4 の証明について解説したい.

定理 4.4 の証明のためには $\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ 及び $\Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ を決定すればよい. これらの値の決定の為に必要となるのは,

1. $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の admissible 表現の BGG resolution,
2. $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の Verma 加群の singular vector formula

の二つである. まず BGG resolution とは, 既約最高 weight 表現の Verma 加群による resolution であり, $\hat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の場合, $\Lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ admissible weight に対して

$$\cdots \to M(\Lambda_2) \oplus M(\Lambda_{-2}) \to M(\Lambda_1) \oplus M(\Lambda_{-1}) \to M(\Lambda) \to L(\Lambda) \to 0$$

が完全列となる $\Lambda_i \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ $(i \in \mathbb{Z})$ が存在する [IK1]. この完全列が BGG resolution と呼ばれる.

$\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2)$ の値に関しては以下の定理が成立する:

定理 5.1 w_1, w_2 を $\mathbb{C}P^1$ の異なる点とする. また $k = -3 + \frac{p}{q}$ を *admissible level* とする. λ_1, $\lambda_2 \in S_{p,q}^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ について,

$$\dim H_0(\mathfrak{g}(w_1, w_2), L_{\lambda_1,k}(w_1) \otimes L_{\lambda_2,k}(w_2)) = \begin{cases} 1 & \textit{if } \lambda_1 = \lambda_2, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

が成立する.

証明. 先に述べたように$\Phi_2(\lambda_1,\lambda_2)$ の値は $\mathbb{C}P^1$ の点の集合 $E=\{w_1,w_2\}$ の選び方にはよらないので, 簡単のため $w_1:=0$, $w_2:=\infty$ と取ることにしよう. 最初に任意の $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ について

$$\dim H_0(\mathfrak{g}(0,\infty), M_{\lambda_1,k}(0)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))=\delta_{\lambda_1,\lambda_2} \tag{7}$$

を証明する. $\tilde{\mathfrak{b}}_0$ を $w_1=0$ に付随した $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ の Borel 部分代数, $\mathbb{C}_{0,\lambda_1,k}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ の Verma 加群を定義するのに用いた 1-次元表現とする.

$$\mathrm{Ind}_{U(\tilde{\mathfrak{b}}_0\cap\mathfrak{g}(0,\infty))}^{U(\mathfrak{g}(0,\infty))}(\mathbb{C}_{0,\lambda_1,k}\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))=M_{\lambda_1,k}(0)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty).$$

に注意すると, Shapiro の補題より

$$H_0(\mathfrak{g}(0,\infty), M_{\lambda_1,k}(0)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))=H_0(\tilde{\mathfrak{b}}_0\cap\mathfrak{g}(0,\infty),\mathbb{C}_{0,\lambda_1,k}\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))$$

が得られる. さらに

$$\mathfrak{g}(0,\infty)\simeq\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[z,z^{-1}]$$
$$\tilde{\mathfrak{b}}_0=\mathbb{C}h\oplus\mathbb{C}e\oplus\mathbb{C}E\oplus(\mathfrak{g}\otimes z\mathbb{C}[z])$$

より $\tilde{\mathfrak{n}}_0:=[\tilde{\mathfrak{b}}_0,\tilde{\mathfrak{b}}_0]$ とおくと, $\tilde{\mathfrak{b}}_0\cap\mathfrak{g}(0,\infty)=\mathbb{C}h\oplus\tilde{\mathfrak{n}}_0$. 従って,

$$H_0(\tilde{\mathfrak{b}}_0\cap\mathfrak{g}(0,\infty),\mathbb{C}_{0,\lambda_1,k}\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))=H_0(\tilde{\mathfrak{n}}_0,L_{\lambda_2,k}(\infty))^{(\lambda_1)}$$

が成立する. 但し $H_0(\tilde{\mathfrak{n}},L_{\lambda_2,k}(\infty))^{(\lambda_1)}$ は固有値が λ_1 の h の固有空間. 従って定義より

$$\dim H_0(\tilde{\mathfrak{n}}_0,L_{\lambda_2,k}(\infty))^{(\lambda_1)}=\dim(L_{\lambda_2,k}(\infty)/\tilde{\mathfrak{n}}_0L_{\lambda_2,k}(\infty))^{(\lambda_1)}=\delta_{\lambda_1,\lambda_2}.$$

次に (7) と BGG resolution を用いて定理を示そう. 以下 $\lambda_1,\lambda_2\in S_{p.q}^{osp(1|2)}$ とする. まず $L_{\lambda_1,k}(0)$ の BGG resolution

$$\to M_1\oplus M_2\to M_{\lambda_1,k}(0)\to L_{\lambda_1,k}(0)\to 0,$$

から出発する. ただし M_1, M_2 はそれぞれ Verma 加群. この resolution と $L_{\lambda_2,k}(\infty)$ とのテンソル積を考え, さらに coinvariant functor $H_0(\mathfrak{g}(0,\infty),\cdot)$ を作用させると, coinvariant functor の右完全性より

$$\begin{array}{rcl} H_0(\mathfrak{g}(0,\infty),M\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty)) & \to & \\ H_0(\mathfrak{g}(0,\infty),M_{\lambda_1,k}(0)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty)) & \to & \\ H_0(\mathfrak{g}(0,\infty),L_{\lambda_1,k}(0)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty)) & \to & 0 \end{array}$$

を得る. ここで M_1 及び M_2 の最高 weight はどちらも admissible weight でないことに注意すると, (7) より

$$H_0(\mathfrak{g}(0,\infty),(M_1\oplus M_2)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))=0.$$

従って,

$$H_0(\mathfrak{g}(0,\infty),L_{\lambda_1,k}(0)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))\simeq H_0(\mathfrak{g}(0,\infty),M_{\lambda_1,k}(0)\otimes L_{\lambda_2,k}(\infty))$$

となり, (7) とあわせて定理が示された. Q.E.D.

次に, $\Phi_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ の値を決定しよう. ここでも $\mathbb{C}P^1$ の点の集合 E は $E=\{0,1,\infty\}$ と固定しよう. 値を決定は以下の 2 つの定理に帰着する.

定理 5.2 $k=-3+\frac{p}{q}$ を *admissible level* とする．$\lambda_0,\lambda_1,\lambda_\infty\in S_{p,q}^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ について，

$$\begin{aligned}&\dim H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ L_{\lambda_0,k}(0)\otimes L_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty))\\&=\dim H_0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty))^{(\lambda_0,-\lambda_1)}.\end{aligned}$$

が成立する．但し $\mathfrak{a}$ は次で与えられる $\mathfrak{g}(0,1,\infty)$ のべき零部分代数：

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}&=\{f(z)\in\mathfrak{g}(0,1,\infty)|f(z)\in[\tilde{\mathfrak{b}}_w,\tilde{\mathfrak{b}}_w](w=0,1)\}\\&=((\mathbb{C}e_0\oplus\mathbb{C}E_0)\otimes(z-1))\oplus((\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}E_1)\otimes z)\oplus\mathfrak{g}\otimes z(z-1)\mathbb{C}[z].\end{aligned}$$

また，$H_0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty))^{(\lambda_0,-\lambda_1)}$ は $h_0\otimes(z-1)$ と $h_1\otimes z$ の同時固有空間を表す．

この定理により $\Phi_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ の決定は coinvariant $H_0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty))$ の次元の決定へと帰着される．この coinvariant の次元を与えるのが，以下の定理である：

λ_0, λ_1, $\lambda_\infty\in S_{p,q}^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ に対して，対応 (5) によりこれらの admissible weight に対応する $(\mathcal{R}^{\mathfrak{sl}_2}_{q-2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{R}^{\mathfrak{sl}_2}_{p-2})/\approx$ の元を $[(V^0_{i_0},V_{j_0})]$, $[(V^0_{i_1},V_{j_1})]$, $[(V^0_{i_\infty},V_{j_\infty})]$ とする．

定理 5.3 $k=-3+\frac{p}{q}$ を *admissible level* とする．このとき以下が成立：

(i) $\dim H_0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty))<\infty\quad\Leftrightarrow\quad\lambda_\infty\in\Lambda_k$.

(ii) $\lambda_\infty\in S_{p,q}^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ ならば

$$\begin{aligned}&\dim H_0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty))^{(\lambda_0,-\lambda_1)}\\&=\begin{cases}2 & \textit{if}\ \lambda_0,\lambda_1\in\Lambda_k\ \text{かつ}\ C^0\ \text{と}\ C^1\ \text{の両方が成立}\\1 & \textit{if}\ \lambda_0,\lambda_1\in\Lambda_k\ \text{かつ}\ C^0\ \text{または}\ C^1\ \text{のどちらか一方のみ成立},\\0 & \text{それ以外},\end{cases}\end{aligned}$$

但し条件 C^0, C^1 はそれぞれ次で与えられる：
$\epsilon=0$ または 1 について

$$P^\epsilon=\left\{(i,j)\in(\mathbb{Z})^2\ \middle|\ \begin{array}{l}|i_0-i_1|+\epsilon\le i\le\min(i_0+i_1,2q-i_0-i_1-2)-\epsilon,\\|j_0-j_1|\le j\le\min(j_0+j_1,2p-j_0-j_1-4),\\i_0+i_1+i\equiv\epsilon,\ j_0+j_1+j\equiv0\pmod 2,\end{array}\right\}$$

とおく時，

$$C^0\Leftrightarrow[(i_\infty,j_\infty)\in P^0],\quad C^1\Leftrightarrow[(-i_\infty+q-1,-j_\infty+p-2)\in P^1].$$

定理 5.2 の証明には定理 5.3 が用いられる．ここでは最初に定理 5.3 を仮定して定理 5.2 を証明したい．

定理 5.2 の証明は次の 2 つのステップ分けて行う：

1. $k=-3+\frac{p}{q}$ は admissible level とする．λ_0, λ_1, $\lambda_\infty\in S_{p,q}^{\mathfrak{osp}(1|2)}$ について

$$\begin{aligned}&H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ M_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty))\\&=H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ L_{\lambda_0,k}(0)\otimes L_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)).\end{aligned}$$

2. k, λ_0, λ_1, $\lambda_\infty \in \mathbb{C}$ について

$$\begin{aligned} &H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ M_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) \\ &\quad = H_0(\mathfrak{a}, L_{\lambda_\infty,k}(\infty))^{(\lambda_0,-\lambda_1)}. \end{aligned}$$

第 1 の命題は, 第 2 の命題を用いて証明されるので, 最初に第 2 の命題を示そう. $w=0,1\in\mathbb{C}P^1$ について, $\mathbb{C}_{w,\lambda_w,k}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}_w$ の Verma 加群を定義するために用いた $\tilde{\mathfrak{b}}_w$ の 1-次元表現としよう. また

$$\bar{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a}\oplus(\mathbb{C}h_0\otimes(z-1))\oplus(\mathbb{C}h_1\otimes z)$$

とおく. (h_w ($w\in\{0,1\}$) の定義は注意 3.1) このとき

$$\mathrm{Ind}_{U(\bar{\mathfrak{a}})}^{U(\mathfrak{g}(0,1,\infty))}\{\mathbb{C}_{0,\lambda_0,k}\otimes\mathbb{C}_{1,\lambda_1,k}\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty))\} = M_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty),$$

が成立する. (包含関係 $\subset$ は明らか. 逆の包含関係は weight に関する帰納法により簡単に証明される.) 従って Shapiro の補題を用いることで,

$$\begin{aligned} &H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ M_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) \\ &\quad = H_0(\bar{\mathfrak{a}}, \mathbb{C}_{0,\lambda_0,k}\otimes\mathbb{C}_{1,\lambda_1,k}\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)). \end{aligned}$$

を得る. さらに $\mathbb{C}_{w,\lambda_w,k}$ と coinvariant の定義より

$$H_0(\bar{\mathfrak{a}}, \mathbb{C}_{0,\lambda_0,k}\otimes\mathbb{C}_{1,\lambda_1,k}\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) = H_0(\mathfrak{a}, L_{\lambda_\infty,k}(\infty))^{(\lambda_0,-\lambda_1)},$$

従って第 2 の命題を得る.

次に第 1 の命題を第 2 の命題と BGG resolution を用いて証明しよう.

$$\cdots\to M_1\oplus M_2\to M_{\lambda_0,k}(0)\to L_{\lambda_0,k}(0)\to 0,$$

を admissible 表現 $L_{\lambda_0,k}(0)$ の BGG resolution とする. 先にも注意したように, M_1 と M_2 は admissible weight でない最高 weight をもつ $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ の Verma 加群. この resolution より, 次の完全列が得られる:

$$\begin{aligned} H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ (M_1\oplus M_2)(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) &\to \\ H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ M_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) &\to \\ H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ L_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) &\to 0. \end{aligned}$$

ここで, 第 2 の命題と定理 5.3 より

$$H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ (M_1\oplus M_2)(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) = 0.$$

従って

$$\begin{aligned} &H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ M_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)) \\ &\quad = H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ L_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)), \end{aligned} \tag{8}$$

が成立する.

同様の議論を (8) に適用することにより,

$$\begin{aligned}&H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ L_{\lambda_0,k}(0)\otimes M_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty))\\&\quad=H_0(\mathfrak{g}(0,1,\infty),\ L_{\lambda_0,k}(0)\otimes L_{\lambda_1,k}(1)\otimes L_{\lambda_\infty,k}(\infty)).\end{aligned}\tag{9}$$

を得る. 最後に (8) と (9) を組み合わせて, 第1の命題が得られる. Q.E.D.

次に定理 5.3 の証明の概略について簡単に述べておく. (証明の詳細は [IK1])
Poincaré 双対性により,

$$\dim H_0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty))^{(\lambda_0,-\lambda_1)}=\dim H^0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty)^*)^{(-\lambda_0,\lambda_1)}.$$

であるので, 右辺を決定すればよい. そのために $L_{\lambda_\infty,k}(\infty)$ の BGG resolution

$$\cdots\to M_1\oplus M_2\xrightarrow{d}M_{\lambda_\infty,k}(\infty)\to L_{\lambda_\infty,k}(\infty)\to 0\tag{10}$$

を dualize して得られる完全列

$$\cdots\leftarrow M_1^*\oplus M_2^*\xleftarrow{d^*}M_{\lambda_\infty,k}(\infty)^*\leftarrow L_{\lambda_\infty,k}(\infty)^*\leftarrow 0$$

を考える. 但し $(\cdot)^*$ は full dual. これは $\mathfrak{a}$-加群としての injective resolution であることに注意すると,

$$H^0(\mathfrak{a},L_{\lambda_\infty,k}(\infty)^*)^{(-\lambda_0,\lambda_1)}=((M_{\lambda_\infty,k}(\infty)^*)^{\mathfrak{a}})^{(-\lambda_0,\lambda_1)}\cap\ker d^*$$

を得る. 従って目的のためには, 上の右辺を決定すればよい. まず, Verma 加群が Borel 部分代数の 1-次元表現の誘導表現であるという事実と Shapiro の補題を用いることで

$$\dim\{((M_{\lambda_\infty,k}(\infty)^*)^{\mathfrak{a}})^{(-\lambda_0,\lambda_1)}\}_\sigma=1,\quad({}^\forall\sigma\in\mathbb{Z}^2)$$

が示される. 更に form $\Phi^\sigma\in\{((M_{\lambda_\infty,k}(\infty)^*)^{\mathfrak{a}})^{(-\lambda_0,\lambda_1)}\}_\sigma\setminus\{0\}$ について

$$\begin{aligned}\Phi^\sigma\in\ker d^*\ &\Leftrightarrow\Phi^\sigma(M_1)=\Phi^\sigma(M_2)=\{0\}\\&\Leftrightarrow\Phi^\sigma(S_1.1\otimes\mathbf{1}_{\infty,\lambda,k})=\Phi^\sigma(S_2.1\otimes\mathbf{1}_{\infty,\lambda,k})=0\\&\Leftrightarrow a(S_1).\Phi^\sigma=a(S_2).\Phi^\sigma=0\ \ (a:\text{anti-pode})\end{aligned}$$

である. 但し, $S_i.1\otimes\mathbf{1}_{\infty,\lambda,k}$ ($i=1,2$) は M_a を生成する $M_{\lambda_\infty,k}(\infty)$ の singular vector. ($S_1,S_2\in U(\tilde{\mathfrak{n}}_\infty^-)$, $\tilde{\mathfrak{n}}_\infty^-$ は $\tilde{\mathfrak{g}}_\infty$ の negative part.)

Φ^σ で singular vector が vanish する条件を具体的に書き下す時に, Verma 加群の singular vector formula が必要となる. 最後にこの部分をもう少し詳しく述べる. そのためにまず $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の Loop 加群とよばれる表現を導入する.

定義 5.1 *θ を Grassmann 変数とする (則ち $\theta^2=0$). λ, $\mu\in\mathbb{C}$, に対して $\mathfrak{osp}(1|2)$ の無限次元表現 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\{\mathbb{C}F_i\oplus\mathbb{C}F_i\theta\}$ を以下で定義する:*

$$\begin{aligned}&h.F_i\theta^\gamma=(2\mu+4i-2\gamma-\lambda)F_i\theta^\gamma,\\&e.F_i\theta^\gamma=\gamma F_i\theta^{\gamma-1}+(\mu+2i-\lambda)F_{i+1}\theta^{\gamma+1},\\&f.F_i\theta^\gamma=\gamma F_{i-1}\theta^{\gamma-1}+(\mu+2i)F_i\theta^{\gamma+1},\end{aligned}\tag{11}$$

但し $i\in\mathbb{Z}$ and $\gamma=0,1$. この時 $\tilde{\mathcal{F}}_{\lambda,\mu}:=\mathcal{F}_{\lambda,\mu}\otimes\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ は自然に $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ の level 0 の表現となり, これを Loop 加群と呼ぶ.

条件 $a(S_1).\Phi^\sigma = a(S_2).\Phi^\sigma = 0$ の解析ために上の Loop 加群が用いられる. 実際,

$$\Phi^\sigma_{i,j} := \Phi^\sigma \text{ の } M_{\lambda_\infty,k}(\infty)_{i\alpha+j\delta} \text{ への制限},$$

$$\varphi^\sigma_{i,j} = \begin{cases} \Phi^\sigma_{i,j} & \text{if } i \equiv \epsilon \mod 2, \\ f \otimes z.\ \Phi^\sigma_{i-1,j+1} & \text{if } i \not\equiv \epsilon \mod 2. \end{cases}$$

とおくと, つぎの補題が成立する:

補題 5.4 *$\tilde{\mathfrak{n}}^-_\infty$ ($:\tilde{\mathfrak{g}}_\infty$ の negative part) 加群として*

$$\bigoplus_{j,i+2j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}\varphi^\sigma_{i,j}$$

は Loop 加群 $\tilde{\mathcal{F}}_{\lambda,\mu}$ ($^\exists\lambda,\mu\in\mathbb{C}$) のある商加群と同型.

この補題より $a(S_i).\Phi^\sigma = 0$ ($i = 1, 2$) つまり $\Phi^\sigma \in \ker d^*$ のための条件を求めることは $a(S_i).(F_j \otimes z^m)$ または $a(S_i).F_j\theta \otimes z^m$ の計算に帰着された. 更にここで Loop 加群 $\tilde{\mathcal{F}}_{\lambda,\mu}$ は $\mathfrak{osp}(1|2)$-加群 $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ の affinization であったことを思い出すと, この計算のためには singular vector の evaluation 写像

$$\pi : \widehat{\mathfrak{osp}}(1|2) \longrightarrow \mathfrak{osp}(1|2), \quad x \otimes z^m \mapsto x$$

による像を知れば十分である. これには次の singular vector formula が答えてくれる:

Verma 加群 $M(\Lambda)$ の Shapovalov determinant により, $M(\Lambda)$ が singular vector を持つ条件は level が critical leval -3 でない時, $\Lambda = \Lambda_{\lambda,k} \in \hat{\mathfrak{h}}^*$, $k \in \mathbb{C}\setminus\{-3\}$, $\lambda = m - (k+3)s - 1$ で与えられる. 但し $m, s \in \mathbb{Z}$ で $m + s \equiv 1 \pmod 2$ かつ ($m > 0$, $s \geq 0$) または ($m < 0$, $s < 0$). この時, 以下を満たす singular vector $S_{m,s}1 \otimes \mathbf{1}_\Lambda \in M(\Lambda)$ ($S_{m,s} \in U(\hat{\mathfrak{n}}^-)$) が存在する:

$$S_{m,s}1 \otimes \mathbf{1}_\Lambda \in \begin{cases} M(\Lambda_{\lambda,k})_{\frac{1}{2}m(2\alpha+s\delta)} & \text{if } m > 0,\ s \geq 0, \\ M(\Lambda_{\lambda,k})_{\frac{1}{2}m(-2\alpha+s\delta)} & \text{if } m < 0,\ s < 0. \end{cases}$$

更に, 次の命題が成立する.

命題 5.5 *1. $m > 0$, $s \geq 0$ の時,*

$$\pi(S_{m,s}) = 2^{-\frac{ms}{2}} \prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{m} \left\{ \prod_{i+j\in 2\mathbb{Z}} P(\frac{i}{2} + \frac{j}{2}t) \prod_{i+j\in 2\mathbb{Z}+1} Q(-\frac{i-1}{2} - \frac{j}{2}t) \right\} f^m,$$

2. $m < 0$, $s < 0$ の時,

$$\pi(S_{m,s}) = 2^{-\frac{ms}{2}} \prod_{j=1}^{-s-1}\prod_{i=1}^{-m} \left\{ \prod_{i+j\in 2\mathbb{Z}} Q(\frac{i}{2} + \frac{j}{2}t) \prod_{i+j\in 2\mathbb{Z}+1} P(-\frac{i-1}{2} - \frac{j}{2}t) \right\} e^{-m}$$

但し, $P(s) := ef + 2s$ and $Q(s) := fe - 2s$.

この命題の証明はここでは省略させて頂く. $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合に D. B. Fuchs により同様の singular vector に関する projection formula が知られていた. なお, higher rank の affine Lie 代数, 例えば $\hat{\mathfrak{sl}}_n$ ($n \geq 3$) に関しては同様の公式は知られておらず, これも higher rank の affine Lie 代数の Fusion 代数が十分に解明されていない一つの理由であると思われる.

6 頂点作用素超代数の有理性

最後に $\widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$ と $N=1$ Virasoro 超代数の頂点作用素超代数の有理性について議論したい．ここでは BGG resolution の応用として得られる, 頂点作用素超代数の表現の完全可約性に関する以下の定理を述べるに留める．なお, $N=1$ Virasoro 超代数の頂点作用素超代数に関しては [KWn], [Ad] の研究がある．

定理 6.1 $\hat{\mathfrak{g}} := \widehat{\mathfrak{osp}}(1|2)$, $\hat{\mathfrak{h}}$ *をその Cartan 部分代数とする．* $\Lambda, \Lambda' \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ *を level* k *の admissible weight とする時, 次が成立:*

$$Ext^1_{(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{h}})}(L(\Lambda), L(\Lambda')) = 0.$$

但し $Ext^n_{(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{h}})}(\cdot,\cdot)$ は $\hat{\mathfrak{h}}$ 対角化可能な $\hat{\mathfrak{g}}$-加群の圏における *Extension bi-functor.*

証明．Verma 加群 $M(\Lambda)$ の極大部分加群をここでは $J(\lambda)$ とする．短完全列

$$0 \longrightarrow J(\lambda) \longrightarrow M(\Lambda) \longrightarrow L(\Lambda) \longrightarrow 0$$

から $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(\cdot, L(\Lambda'))$ を作用させて得られる長完全列

$$\begin{aligned} 0 \to &\mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(L(\Lambda), L(\Lambda')) \to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(M(\Lambda), L(\Lambda')) \to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(J(\Lambda), L(\Lambda')) \to \\ &Ext^1_{(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{h}})}(L(\Lambda), L(\Lambda')) \to Ext^1_{(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{h}})}(M(\Lambda), L(\Lambda')) \to \cdots \end{aligned}$$

を考える．$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(J(\Lambda), L(\Lambda')) = \{0\}$ であることはすぐにわかるので, 定理の証明のためには

$$Ext^1_{(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{h}})}(M(\Lambda), L(\Lambda')) = \{0\} \tag{12}$$

を示せばよい．ここで $\hat{\mathfrak{h}}$ 加群として次の同型が成立することに注意すると [RW], [DGK]:

$$\begin{aligned} &Ext^1_{(\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{h}})}(M(\Lambda), L(\Lambda')) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{h}}}(\mathbb{C}\mathbf{1}_\Lambda, H^1(\hat{\mathfrak{n}}^+, L(\Lambda'))), \\ &H^1(\hat{\mathfrak{n}}^+, L(\Lambda')) \simeq H_1(\hat{\mathfrak{n}}^-, L(\Lambda')), \end{aligned}$$

$H_1(\hat{\mathfrak{n}}^-, L(\Lambda'))$ を知ればよい．更に, $L(\Lambda')$ の BGG resolution

$$\cdots \longrightarrow M(\Lambda'_1) \oplus M(\Lambda'_{-1}) \longrightarrow M(\Lambda') \longrightarrow L(\Lambda') \longrightarrow 0$$

が $\hat{\mathfrak{n}}^-$ 加群としての $L(\Lambda')$ の free (projective) resolution であることより, $\hat{\mathfrak{h}}^-$ 加群としての同型

$$\begin{aligned} H_1(\hat{\mathfrak{n}}^-, L(\Lambda')) =& (M(\Lambda'_1) \oplus M(\Lambda'_{-1}))/\hat{\mathfrak{n}}^-.(M(\Lambda'_1) \oplus M(\Lambda'_{-1})) \\ \simeq& \mathbb{C}\mathbf{1}_{\Lambda'_1} \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}_{\Lambda'_{-1}} \end{aligned}$$

を得る．従って,

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{h}}}(\mathbb{C}\mathbf{1}_\Lambda, H^1(\hat{\mathfrak{g}}^+, L(\Lambda'))) = \{0\},$$

つまり, (12) が得られ, 定理が示された． □

注意 6.2 $N=1$ *Virasoro 超代数の場合も同様の extension の vanishing が BGG resolution を用いて証明される．*

最後になりましたが, 研究会の organizer である大阪大学の永友清和先生とこの研究の共同研究者である神戸大学の庵原謙治さんに感謝します．

References

[Ad] Adamović D., *Rationality of Neveu-Schwarz vertex operator superalgebras.* Int. Math. Res. Not. **17**, (1997), 865-874.

[DGK] Deodhar V.V., Gabber O. and Kac V., *Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras* Adv. Math. **45**, (1982), 92–116.

[FF] Feigin B.L. and Fuchs D.B., *Cohomology of some nilpotent subalgebras of the Virasoro and Kac-Moody Lie algebras*, J. Geom. Phys. **5**, (1988), 209–235.

[FM1] Feigin B. and Malikov F., *Fusion algebra at a rational level and cohomology of nilpotent subalgebras of* $\hat{sl}_2$, Lett. Math. Phys. **31**, (1994), 315–325.

[FM2] Feigin B. and Malikov F., *Modular functor and representation theory of* $\hat{sl}_2$ *at a rational level, Operads: Proceedings of Renaissance Conference,* 357–405, Contemp. Math. **202**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1997).

[IK1] Iohara K. and Koga Y., *Fusion algebras for N=1 superconformal field theories through coinvariants I:*$o\hat{s}p(1|2)$*-symmetry*, to appear J. Reine Angew. Math.

[IK2] Iohara K. and Koga Y., *Fusion algebras for* $N = 1$ *superconformal field theories through coinvariants II:* $N = 1$ *super Virasoro-symmetry*, to appear J. Lie Theory.

[Kac] Kac V.G., *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KW] Kac V.G. and Wakimoto M., *Modular invariant representations of infinite dimensional Lie algebras and superalgebras*, Proc. Natl. Acad. Soc., **35**, (1988), 4956–4960.

[KWn] Kac V. G. and Wang W., *Vertex operator superalgebras and their representations, Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups*, 161–191, Contemp. Math. **175**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1994).

[Mal] Malikov F.G., *Verma modules over Kac-Moody algebras of rank* 2, Leningrad Math. J., **2**, No. 2, (1991), 269–286.

[RW] Rocha-Caridi A. and Wallach N.R., *Projective modules over Graded Lie algebras. I*, Math. Z. **180**, (1982), 151–177.