数理解析研究所講究録 1218 巻 2001 年 26-56

頂点作用素代数における C_2 有限性

永友　清和(Kiyokazu Nagatomo)

大阪大学大学院理学研究科

(Graduate School of Science, Osaka University)

要約　頂点作用素代数を Borcherds の恒等式により導入し，後の議論に必要な基礎的事柄を証明付きで述べる．つぎに Borcherds の恒等式の取り扱いの練習問題として非常によい，ある種の生成元に関する Poincare-Birkhoff-Witt 型の定理を証明する．その後，この定理と C_2 有限性からの帰結について述べる．具体的には有限個の生成元の存在，指標の収束の証明を与える．さらに頂点作用素代数の表現論における Zhu 代数の役割を説明した上で C_2 有限性との関係について言及する．また指標のモジュラー不変性を解説し，C_2 有限性とモジュラー不変性の応用として頂点作用素代数の中心電荷の評価を与える．最終部分で regular な頂点作用素代数の概念を導入し，C_2 有限性との関連性について述べる．最後に Virasoro 頂点作用素代数(極小系列)の場合に C_2 有限性の証明を与える．

目次

序

頂点作用素代数における C_2 有限性はトーラス上の相関関数(あるいは表現の指標)のモジュラー不変性を保証するための条件の一つとして Y. Zhu により [Z] において導入された．もっとも同等の条件は共形場理論の枠組みの中で Zhu 以前から考察されている．実際，アフィン・リー環の可積分表現から構成されるWZNW模型，Virasoro 代数の極小表現から構成される極小模型の共形ブロックの有限性はべき零部分リー環の余不変量の有限性 (C_2 有限性と同等)に帰着される．C_2 有限性は非常に一般な枠内における共形場理論の共形ブロックの有限性を保証するものと予想されている[1]．この解説ではこの予想を証明するための基礎となる事柄を平易に解説することを目的とするが，同時に頂点作用素代数の理論の入門への一助となることも期待している．

1　頂点作用素代数

1.1　頂点代数

以下考えるベクトル空間はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．

[1]最近この予想は部分的に解決された [AN].

定義 1. ベクトル空間 V が以下の条件をみたす可算個の2項線型演算

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (a, b) & \longmapsto & a(n)b \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

をもつとき**頂点代数**とよばれる：

V1) **フィールド条件**　任意の $a, b \in V$ に対しある正の整数 n_0 が存在して $a(n)b = 0$ がすべての $n \geq n_0$ で成り立つ.

V2) **Borcherds の恒等式**　整数 p, q, r と $a, b, c \in V$ に対し

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a(r+i)\,b)(p+q-i)c$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \left(a(p+r-i)(b(q+i)\,c) - (-1)^r b(q+r-i)(a(p+i)\,c)\right)$$

が成り立つ.

V3)　V の要素 $\mathbf{1}$(**真空ベクトル**)ですべての $a \in V$ に対し

$$a(n)\mathbf{1} = \begin{cases} 0 & (n \geq 0), \\ a & (n = -1) \end{cases}$$

を満たすものが存在する.

V を頂点代数とするとき，線型写像 $T : V \to V$ を $Ta = a(-2)\mathbf{1}$ により定義する.

ノート 2. V から V への線型写像の全体のなす線型空間を $\mathrm{End}\,V$ とあらわす. $a \in V$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し，対応 $b \to a(n)b$ は V から V への線型写像である. この線型写像を $a(n)$ とあらわすことにする. つまり，$a(n) \in \mathrm{End}\,V$ である.

1.2　頂点代数の性質

頂点代数における議論の中で頻繁に使用される Borcherds の恒等式から導かれるいくつかの公式を与えておこう.

補題 3. V を頂点代数とする．このとき $a, b \in V$ と $n, p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対し次が成り立つ．

(1) $T\mathbf{1} = 0$.

(2) $a(n)\mathbf{1} = 0\,(n \geq 0)$ また $a(n)\mathbf{1} = T^{(-n-1)}a\,(n \leq -1)$ である．ここで $T^{(k)} = T^k/k!$ とした．

(3) $\mathbf{1}(n)a = 0\,(n \neq -1)$ また $\mathbf{1}(n)a = a\,(n = -1)$ である．

(4) $(Ta)(n)b = -na(n-1)b$，つまり $\mathrm{End}\,V$ の要素として $(Ta)(n) = -na(n-1)$ である．

(5) Borcherds の commutator formula：

$$[a(p), b(q)] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a(i)b)(p+q-i).$$

(6) Associativity formula：

$$(a(r)b)(q) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \left(a(r-i)b(q+i) - (-1)^r b(q+r-i)a(i) \right).$$

(7) Skew symmetry：

$$b(n)a = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{n+i+1} T^{(i)}(a(n+i)b).$$

証明. (1) Borcherds の恒等式において $a = b = c = \mathbf{1}$ かつ $p = q = r = -1$ とおくと

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1}{i} (\mathbf{1}(i-1)\,\mathbf{1})(-i-2)\mathbf{1}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-1}{i} \left(\mathbf{1}(-i-2)(\mathbf{1}(i-1)\,\mathbf{1}) + \mathbf{1}(-i-2)(\mathbf{1}(i-1)\,\mathbf{1}) \right).$$

である．よって条件 V3) に注意すれば $\mathbf{1}(-2)\mathbf{1} = 2\mathbf{1}(-2)\mathbf{1}$ となり $\mathbf{1}(-2)\mathbf{1} = 0$ をえる．つまり $T\mathbf{1} = \mathbf{1}(-2)\mathbf{1} = 0$ である．次に $b = c = \mathbf{1}$ かつ $p = 0,\ q = -2,\ r = n$

$$
\begin{aligned}
&(a(n)\mathbf{1})(-2)\mathbf{1}\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}\left(a(n-i)(\mathbf{1}(i-2)\mathbf{1})-(-1)^n\mathbf{1}(n-2-i)(a(i)\mathbf{1})\right)\\
&\qquad(\text{条件 V 3) を用いる})\\
&=-na(n-1)\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

つまり $T(a(n+1)\mathbf{1})=-(n+1)a(n)\mathbf{1}$ がすべての $n\in\mathbb{Z}$ に対して成り立つ．よって $n\leq -2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a(n)\mathbf{1}&=\frac{1}{(-n-1)}T(a(n+1)\mathbf{1})\\
&=\frac{1}{(-n-1)(-n-2)}T^2(a(n+2)\mathbf{1})\\
&\ \ \vdots\\
&=\frac{1}{(-n-1)!}T^{-n-1}(a(-1)\mathbf{1})\\
&=T^{(-n-1)}(a)
\end{aligned}
$$

を得る．以上で (2) が $n\leq -2$ のときに証明された．$n\geq -1$ のときは条件 V3) に他ならない．

Borcherds の恒等式において $b=c=\mathbf{1}$ かつ $p=-1$, $q=n$, $r=0$ とおくと

$$
\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-1}{i}(a(i)\mathbf{1})(n-1-i)\mathbf{1}=a(-1)(\mathbf{1}(n)\mathbf{1})-\mathbf{1}(n)(a(-1)\mathbf{1})
$$

となるので $\mathbf{1}(n)a=a(-1)(\mathbf{1}(n)\mathbf{1})$ が成り立つ．よって (1) と (2) から (3) が結論される．

(4) を証明するために $b=\mathbf{1}$ とし $p=n$, $q=0$, $r=-2$ とおいた後に c を b

で置き換える．このとき

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}(a(i-2)\mathbf{1})(n-i)b$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{-2}{i}\left(a(n-2-i)(\mathbf{1}(i)\,b)+\mathbf{1}(-i-2)(a(n+i)\,b)\right).$$

から

$$(a(-2)\mathbf{1})(n)b+n(a(-1)\mathbf{1})(n-1)b=0$$

よって (4) が証明された．

Commutator formula (5) は $r=0$ の場合に他ならない．Associcativity formula (6) は $p=0$ として得られる．

最後に skew symmetry を証明しよう．Borcherds の恒等式において $c=\mathbf{1}$ かつ $p=-1,\ q=0,\ r=n$ とおく：

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(a(n+i)\,b)(-i-1)\mathbf{1}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n}{i}\left(a(n-i-1)(b(i)\,\mathbf{1})-(-1)^n b(n-i)(a(i-1)\,\mathbf{1})\right).$$

したがって

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-1}{i}(a(n+i)\,b)(-i-1)\mathbf{1}=(-1)^{n+1}b(n)a$$

となり (2) から skew symmetry が証明された．ここで

$$\binom{-1}{i}=\frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-i+1)}{i!}=\frac{(-1)(-2)\cdots(-i)}{i!}=(-1)^i$$

であることを用いた． □

Borcherds の恒等式は混みいっていて実際の応用には使いにくい．従って次の補題が非常に有用になる．

補題 4. Commutator formula と associativity formula が成立すれば Borcherds の恒等式がしたがう.

証明. $B(p,q,r)$ を Borcherds の恒等式の各項

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(a(r+i)\,b)(p+q-i)c,$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{r}{i}a(p+r-i)(b(q+i)\,c),$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{r+i}\binom{r}{i}b(q+r-i)(a(p+i)\,c)$$

のいずれかとする. このとき 2 項係数の性質から

$$B(p+1,q,r)=B(p,q+1,r)+B(p,q,r+1)$$

が成り立つ. 例えば

$$B(p,q,r)=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(a(r+i)\,b)(p+q-i)c$$

としたとき

$$\begin{aligned}&B(p+1,q,r)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p+1}{i}(a(r+i)\,b)(p+1+q-i)c\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i}(a(r+i)\,b)(p+q+1-i)c+\sum_{i=0}^{\infty}\binom{p}{i-1}(a(r+i)\,b)(p+q-i+1)c\\&=B(p,q+1,r)+B(p,q,r+1)\end{aligned}$$

となり正しい.

この事実から特に $r=0$ かつ $p=0$ で Borcherds の恒等式が正しいと仮定する(つまり, commutator formula と associativity formula を仮定すると)とすべての p, q, $r\in\mathbb{Z}$ で正しいことが 3 次元空間の格子を図示することにより証明される.

次に associativity formula の特別な場合を後の議論に適した形に書き換えておく.

補題 5. V を頂点代数とする．このとき $a,b\in V$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対し

$$
\begin{aligned}
&a(-n)b(-n)\\
&=(a(-1)b)(-2n+1)-\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n-1}}^{\infty}(-1)^i a(-i-1)b(i+1-2n)-\sum_{i=0}^{\infty}b(-i-2n)a(i)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

証明. Associativity formula において $r=-1$ かつ $q=-2n+1$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(a(-1)b)(-2n+1)\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{-1}{i}\left(a(-i-1)b(i+1-2n)+b(-i-2n)a(i)\right)\\
&=a(-n)b(-n)+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n-1}}^{\infty}a(-i-1)b(i+1-2n)+\sum_{i=0}^{\infty}b(-i-2n)a(i)
\end{aligned}
$$

である. □

1.3 頂点作用素代数

定義 6. 頂点代数 V は次の条件をみたすとき**頂点作用素代数**と呼ばれる.

VOA 1) V が $\mathbb{N}$-graded ベクトル空間であり，各斉次空間は有限次元である．つまり $V=\oplus_{n\in\mathbb{N}}V_n$ かつ $\dim V_n<\infty$ となる．また真空ベクトルは V_0 に属する．元 $a\in V_n$ のとき $n=|a|$ とあらわし，**ウエイト**あるいは**次数**と呼ぶことにする．また $|a|$ と書くときにはいつも a は斉次空間の要素であるものとする.

VOA 2) 次数 2 の要素 $(0\neq)\omega\in V_2$ が存在し $L_n=\omega(n+1)$ と表示するとき Virasoro 代数の交換関係

$$
[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_V\quad(c_V\in\mathbb{C})
$$

が成り立つ．通常 ω は **Virasoro 元**とよばれる．また複素数 c_V は V の **rank** あるいは **central charge**(中心電荷) とよばれる.

VOA 3) 各斉次空間 V_n は L_0 の固有値 n の固有空間である．
VOA 4) $L_{-1} = T$ である．

V が頂点作用素代数であるとき，その公理系から可算個の積構造は L_0 の作用と整合的である．

補題 7. V を頂点作用素代数とする．このとき $a,\, b \in V$ に対し

$$L_0(a(n)b) = (L_0a)(n)b + a(n)(L_0b) - (n+1)(a(n)b)$$

が成り立つ．特に $a \in V_k$, $b \in V_\ell$ のとき $a(n)b \in V_{k+\ell-n-1}$ である．

証明. Borcherds の commutator formula から

$$\begin{aligned}[L_0, a(n)] &= [\omega(1), a(n)] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1}{i} (\omega(i)a)(n+1-i) \\ &= (\omega(0)a)(n+1) + (\omega(1)a)(n) \\ &= (L_{-1}a)(n+1) + (L_0a)(n) \\ &= (Ta)(n+1) + (L_0a)(n) \\ &= -(n+1)a(n) + (L_0a)(n)\end{aligned}$$

ここで補題 3 の (4) から $(Ta)(n+1) = -(n+1)a(n)$ であることを用いた．よって

$$L_0(a(n)b) = [L_0, a(n)]b + a(n)(L_0b) = (L_0a)(n)b + a(n)(L_0b) - (n+1)a(n)b$$

が証明される．特に $a \in V_k$, $b \in V_\ell$ のとき

$$L_0(a(n)b) = ka(n)b + \ell a(n)b - (n+1)a(n)b = (k+\ell-n-1)a(n)b$$

であるから $a(n)b \in V_{k+\ell-n-1}$ となる． □

ノート 8. 頂点作用素代数の定義では Virasoro 元の存在が常に仮定される．しかしながら，以下での多くの議論において Virasoro 代数の交換関係が成立することはほとんど使われない．頻繁に使われる事実は $\mathbb{N}$-graded であること $(V = \oplus_{n\in\mathbb{N}} V_n)$ と補題 7 からの帰結

$$V_k(n)V_\ell \subset V_{k+\ell-n-1}$$

である．また各斉次空間が有限次元であるから V は高々可算次元となる．この事実も有限次元性に関する重要な結果の証明に絡むことが多い．

注意 9. $\omega \in V$ が Virasoro 元であるための必要十分条件は

$$\omega(n)\omega = \begin{cases} 0 & (n \geq 4), \\ (c_V/2)\mathbf{1} & (n = 3), \\ 0 & (n = 2), \\ 2\omega & (n = 1), \\ T\omega & (n = 0) \end{cases}$$

である．またこの条件は skew symmetry により

$$\omega(n)\omega = \begin{cases} 0 & (n \geq 5), \\ (c_V/2)\mathbf{1} & (n = 3), \\ 2\omega & (n = 1) \end{cases}$$

と同値である．

1.4 Watts フィルター

この小節では次節で証明する弱 Poincaré-Birkhoff-Witt の定理において重要な役割を果たす Watts フィルターを導入する．これはリー環の Poincaré-Birkhoff-Witt の定理の証明における長さによるフィルター付けに対応する概念である．

定義 10. V を頂点作用素代数とする．非負整数 $g \in \mathbb{N}$ に対し $V^{(g)}$ をベクトル

$$a_1(-n_1)a_2(-n_2)\cdots a_1(-n_r)\mathbf{1} \quad (n_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{r} |a_i| \leq g)$$

で張られる部分ベクトル空間とする．部分ベクトル空間の増大列 $V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset \ldots \subset V^{(g)} \subset \ldots \subset V$ を V の **Watts フィルター**とよぶ．

Watts フィルターが実際に V のフィルター付けであることは次の補題により保証される．

補題 11. 非負整数 $g \in \mathbb{N}$ に対し $\bigoplus_{i=0}^{g} V_i \subset V^{(g)}$ である．特に $V = \cup_{g \in \mathbb{N}} V^{(g)}$ が

証明. 任意の $a \in V$ に対して V 3) から $a = a(-1)\mathbf{1}$ であるから $V_i \subset V^{(i)}$ である. □

頂点作用素の可算個の積と Watts フィルターとの関係で重要な事実を述べておこう.

補題 12. $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$ を頂点作用素代数とする.
(1) $a \in V_k$, $b \in V_\ell$ かつ $c \in V^{(g)}$ のとき $[a(m), b(n)]c \in V^{(k+\ell-1+g)}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ である.
(2) $a, b \in V$ を斉次元とし, $c \in V^{(g)}$ とするとき $(a(-2)b)(n)c \in V^{(g-1+|a(-2)b|)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ である.

証明. (1) Borcherds の commutator formula から

$$[a(m), b(n)]c = \sum_{i=0}^{\infty} (a(i)b)(m+n-i)c$$

である. ここで補題 7 から $|a(i)b| = |a| + |b| - i - 1 \leq |a| + |b| - 1$ であることに注意すれば $[a(m), b(n)]c \in V^{(k+\ell-1+g)}$ がわかる.

(2) Associativity formula から

$$(a(-2)b)(n)c = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-2}{i} \left(a(-i-2)b(i+n) - b(n-2-i)a(i)\right) c$$

となる. 一方 $(a(-2)b)(n)c \in V^{(g+|a|+|b|)}$ であるから $|a(-2)b| = |a| + |b| + 1$ に注意して $(a(-2)b)(n)c \in V^{(g+|a|+|b|)} = V^{(g-1+|a(-2)b|)}$ を得る. □

2 Weak Poinceré-Birkhoff-Witt の定理

一般に Poinceré-Birkhoff-Witt の定理というとき, その内容はある集合系が

- 生成系である.
- 基底の生成法を与える.

という 2 つの内容を含む. ここでいう weak Poinceré-Birkhoff-Witt の定理における "weak" は生成系ではあるが一般には基底を与えないという意味で使うことにす

2.1 Zhu の $C_2(V)$

定義 13. 頂点作用素代数 V に対し，$C_2(V)$ を $a(-2)b\,(a,\,b\in V)$ の張る部分ベクトル空間とする．

補題 14. (1) $C_2(V)$ は V の graded subspace である．すなわち

$$C_2(V)=\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} C_2(V)\cap V_n$$

が成り立つ．
(2) $\mathbf{1}\notin C_2(V)$ である．
(3) $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ のとき，$\omega\notin C_2(V)$ である．

証明. (1) は $a,\,b\in V$ が斉次元であるとき $a(-2)b$ も斉次元であることから正しい．

(2) $\mathbf{1}\in C_2(V)$ と仮定する．$C_2(V)$ は graded であるから $\mathbf{1}$ は次数が 0 の $C_2(V)$ の要素 $a(-2)b$ の 1 次結合である．ところが $|a|,|b|\geq 0$ であるから

$$|a(-2)b|=|a|+|b|+1\neq 0$$

となり矛盾を生じる．

(3) $\omega\in V_2$ であるから，$\omega\in C_2(V)$ と仮定すると ω は斉次元 $a,\,b\in V$ で $a(-2)b$ の次数 2 であるようなものの 1 次結合としてあらわされる．さて

$$|a(-2)b|=|a|+|b|+1=2$$

とすると $|a|=0,|b|=1$ あるいは $|a|=1,|b|=0$ である．$|a|=0$ とすると仮定から $a=\mathbf{1}$ としてよいから $a(-2)b=0$ である．よって $|a|=1,|b|=0$ と仮定してよい．このとき $\omega=a(-2)\mathbf{1}$ と表示される．さて $\omega=Ta=L_{-1}a$ である．一方，$L_{-1}=\omega(0)=(Ta)(0)=0$ であるので $\omega=0$ となり矛盾する． □

2.2 Weak Poincaré-Birkhoff-Witt の定理

さて本稿の主定理である Weak Poincaré-Birkhoff-Witt の定理を先に述べて，証明に移ろう．これは [GN, Proposition 8] において証明されたものである．

定理 15. $V = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n$ を条件 $\dim V_0 = 1$ をみたす頂点作用素代数とする．V の graded 部分ベクトル空間 U が条件 $V = U + C_2(V)$ をみたすものとする．このとき V はベクトル

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_{i_1}(-n_1)\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_r}(-n_r)\mathbf{1} & (\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}\in U) \\ n_1 > n_2 > \ldots > n_r > 0 \end{cases}$$

の線型結合で生成される．

注意 16. [KL] において，同様な Weak Poincaré-Birkhoff-Witt の定理が証明されているが，そこでは一般に

$$n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r > 0$$

となっている．定理 15 においては等号がないので非常に強い結果を導くことを後の応用の場合にあきらかにする．

定義 17. 頂点作用素代数 V において $C_2(V)$ が余次元有限であるときつまり，商ベクトル空間 $V/C_2(V)$ が有限次元であるとき V は C_2 有限であるとよばれる．

定義 18. V を頂点作用素代数とし U をその部分空間とする．V がベクトル

$$\begin{cases} \alpha_{i_1}(-n_1)\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_r}(-n_r)\mathbf{1} & (\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}\in U) \\ n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

の線型結合であるとき V は U で生成されるといわれる．特に U が有限次元であるとき V は**有限生成**であるとよばれる．

定理 15 の系として次の重要な事実を得る：

系 19. C_2 有限な頂点作用素代数は有限生成である．

証明. 部分ベクトル空間 $C_2(V)$ は garaded であったので，その斉次空間への分解を $C_2(V) = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} C_2(V)_n$, $C_2(V)_n = C_2(V)\cap V_n$ とすると，直和分解

$$V/C_2(V) = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n/C_2(V)_n$$

が成り立つ．この直和分解が成り立つことは次のようにしてわかる．同型写像 $V/C_2(V) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n/C_2(V)_n$ を

$$V_n \ni a \longmapsto a + C_2(V) \in V_n/C_2(V)_n$$

により定義する．この写像は well-defined である．つまり，$a-b \in C_2(V)$ $(a, b \in V_n)$ であれば $a-b \in C_2(V)_n$ となるので $a + C_2(V)_n = b + C_2(V)_n$ である．この写像が単射かつ全射であることを確かめることは難しくない．

さて V は C_2 有限であるからこの直和は有限，すなわち，適当な正数 r が存在して $V/C_2(V) = \bigoplus_{n=0}^{r} V_n/C_2(V)_n$ となる．各 $n \in N$ に対して $V_n = U_n + C_2(V)_n$ となる V_n の部分ベクトル空間 U_n を選び $U = \bigoplus_{n=0}^{r} U_n$ とすれば U は有限次元で $V = U + C_2(V)$ をみたす．よって，定理 15 から V は U で生成される． □

2.3 補題

この節では頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ は条件 $\dim V_0 = 1$ をみたし，V の graded 部分ベクトル空間 U は条件 $V = U + C_2(V)$ をみたすものとする．

補題 20. $(g, N) \in \mathbb{N}^2$ とする．Watts フィルターの部分ベクトル空間 $V^{(g)}$ は

$$\begin{cases} \alpha_{i_1}(-n_1)\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_r}(-n_r)\mathbf{1} & (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} \in U) \\ n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r > 0, & \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{i_j}| \leq g \end{cases} \tag{2}$$

の線型結合である．ただし

$$n_i = n_{i+1} \text{ ならば } n_i > N \tag{3}$$

である．

補題 20 が正しいと仮定して，定理 15 を証明しよう．$n \in \mathbb{N}$ に対して各斉次空間 V_n の要素が (1) のベクトルの線型結合であることを示せばよい．補題 20 において $g = n$, $N = n + 2$ とすれば，V_n の要素は (2) のベクトルの線型結合で，さらに次数に関する条件

$$n = \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{i_j}| + \sum_{j=1}^{r} (n_j - 1) \geq \sum_{j=1}^{r} (n_j - 1)$$

をみたしている．$n_j \geq 1$ であったから $n \geq n_j - 1$ がすべての j に対して成り立つ．よって $N = n + 2 \geq n_j + 1 > n_j$ である．したがって，補題 20 における制限 (3) から $n_j > n_{j+1}$ となる．以上で定理 15 が証明された．

2.4 補題の証明

集合 $\mathbb{N}^2$ に次の自然な辞書式順序を導入する： $g < g'$，または $g = g'$ かつ $N < N'$ のとき $(g, N) < (g', N')$ とする．この全順序により $\mathbb{N}^2$ は整列集合となるので数学的帰納法が適用される．以下用いる帰納法の仮定が明確にわかるように $(g, N) \in \mathbb{N}^2$ のときの補題 20 を $S(g, N)$ としよう．

$V^{(0)} = V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ であるから $g = 0, N = 0$ のときには正しい．

$(g, N) \in \mathbb{N}^2$ を固定し，これより小さい $\mathbb{N}^2$ の元に対しては補題は正しいと仮定しよう．はじめに $N = 0$ のときを考える．Watts フィルターの定義から $V^{(g)}$ はベクトル

$$a_{i_1}(-n_1)a_{i_2}(-n_2)\cdots a_{i_r}(-n_r)\mathbf{1} \quad (\sum_{i=1}^{r} |a_i| \leq g)$$

の線型結合である．補題 12 の (1) と帰納法の仮定 $S(g-1, 0)$ から a_i の順序を入れ換えて $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r > 0$ の場合を考えれば十分である．ここで最後の不等式は $a(n)\mathbf{1} = 0\,(n \geq 0)$ からの帰結である．このとき更に，補題 12 の (2) と帰納法の仮定 $S(g-1, 0)$ から，各 a_i を 部分空間 U に属するベクトルで置き換えることができる．よって $S(g, 0)$ は正しい．

つぎに $N > 0$ の場合を考えよう．帰納法の仮定 $S(g, N-1)$ より $V^{(g)}$ の要素はベクトル

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_{i_1}(-n_1)\cdots\alpha_{i_r}(-n_r)\alpha_{i_{r+1}}(-N)^k\alpha_{i_{r+2}}(-n_{r+2})\cdots\alpha_{i_s}(-n_s)\mathbf{1}, \\ \alpha_{i_j} \in U, \quad n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r > N > n_{r+2} > \ldots > n_s > 0 \end{cases}$$

の線型結合である[2]．$k \leq 1$ であれば $S(g, N)$ の制限 (3) をみたすので $k \geq 2$ の場合を考えればよい．$r \neq 0$ かつ $|\alpha_{i_1}| = \ldots = |\alpha_{i_r}| = 0$ と仮定すると $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ か

[2]実際には $\alpha_{i_{r+1}}(-N)^k$ は異なる α_j の積であるがここでは簡単のために同じものである場合を考える．以下の議論は一般の場合でも正しい．

つ $\mathbf{1}(-n)=0\,(n>1)$ であるから，このベクトル自体が 0 となる．よって $r\neq 0$ の場合には，

$$\alpha_{i_{r+1}}(-N)^k\alpha_{i_{r+2}}(-n_{r+2})\cdots\alpha_{i_s}(-n_s)\mathbf{1}\in V^{(g-1)}$$

と仮定してよい．このベクトルに帰納法の仮定 $S(g-1,N)$ を適用すれば ベクトル (4) は $S(g,N)$ の条件 (3) をみたすベクトルの線型結合であらわされる．

以上から $r=0$ かつ $k\geq 2$ の場合を考えればよい．簡単のために $\alpha=\alpha_{i_1}$ とおくと，補題 5 から

$$\alpha(-N)^2=$$
$$(\alpha(-1)\alpha)(-2N+1)-\sum_{\substack{i=0\\ i\neq N-1}}^{\infty}(-1)^i\alpha(-i-1)\alpha(i+1-2N)-\sum_{i=0}^{\infty}\alpha(-2N-i)\alpha(i)$$

であるから，ベクトル

(5) $\quad(\alpha(-1)\alpha)(-2N+1)\alpha(-N)^{k-2}\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_s}(-n_s)\mathbf{1},$

(6) $\quad\alpha(-N-i)\alpha(-N+i)\alpha(-N)^{k-2}\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_s}(-n_s)\mathbf{1}\quad(i>0)$

を考えれば充分であることが，等式

$$\alpha(-i-1)\alpha(i+1-2N)=\alpha(-N+N-i-1)\alpha(-N+i+1-N),$$
$$\alpha(-i-2N)\alpha(i)=\alpha(-N-N-i)\alpha(-N+N+i)$$

からしたがう(必要に応じて順序を入れ換える)．(5) において $|\alpha(-1)\alpha|=0$ とすると $|\alpha|=0$ となるので (5) のベクトルは条件をみたす．また (6) において $|\alpha|=0$ の場合にも考える必要はない．よって

$$\alpha(-N)^{k-2}\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_s}(-n_s)\mathbf{1}\in V^{(g-1)}$$
$$\alpha(-N+i)\alpha(-N)^{k-2}\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_s}(-n_s)\mathbf{1}\in V^{(g-1)}\quad(i>0)$$

と仮定してよい．このとき，帰納法の仮定 $S(g-1,N)$ と $N+i>N$ より (6) は条件をみたす．また $N>1$ のとき同じく (5) も条件をみたす．最後に (5) において $N=1$ の場合を考える．つまり

$$\alpha(-1)^k\mathbf{1}$$

の場合を考えなければならない．しかし，この場合にはすでに行った操作をくり返すことにより，$k=1$ の場合に帰着される．以上で補題 20 の証明を終わる．

Zhu の $C_2(V)$ の類似として $n \geq 2$ に対して V の部分ベクトル空間 $C_n(V)$ を $a(-n)b\,(a,\,b \in V)$ で生成されるベクトル空間とする．このとき $(Ta)(n) = -na(n-1)$ を用いて

$$C_2(V) \supset C_3(V) \supset \ldots \supset C_n(V) \supset \ldots$$

であることがわかる．一般に $V/C_2(V) \subset V/C_n(V)$ であるから，C_2 有限であっても $C_n(V)$ が V で余次元有限であるとは結論できない．それにも関わらず次の補題が成立する．

系 21. 頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n \in \mathrm{N}} V_n$ は条件 $\dim V_0 = 1$ をみたし，C_2 有限であるとする．このとき $C_n(V)\,(n \geq 2)$ は V で余次元有限である．

証明. V は C_2 有限であるから $V = U + C_2(V)$ となる有限次元 graded 部分ベクトル空間 U が存在する．$\{\alpha_j\}$ を U の基底とすると V は

$$\begin{cases} \alpha_{i_1}(-n_1)\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_r}(-n_r)\mathbf{1} & (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} \in U) \\ n_1 > n_2 > \ldots > n_r > 0 \end{cases}$$

の線型結合である．$n_1 \geq n$ と仮定すると，このベクトルは $C_n(V)$ に含まれるので $V/C_n(V)$ は $n_1 < n$ であるようなベクトルにより生成されている．しかし，このとき

$$n > n_1 > n_2 > \ldots > n_r > 0$$

かつ α_j は有限個であるので，このようなベクトルは有限個である．したがって $C_n(V)$ は V において余次元有限となる． □

2.5 指標の収束

この小節では定理 15 の応用として，頂点作用素代数の“指標”が収束することを証明しよう．この収束性は例えば [Z] においては指標のみたす微分方程式の存在から証明されいるが，ここでは各次数空間の次元を定理 15 を用いて評価することにより，その収束性を証明することにする．

定義 22. 頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n$ に対し，形式変数 q の形式的べき級数

$$\mathrm{Tr}_V\, q^{L_0-c/24} = \sum_{n=0}^{\infty} \dim\, V_n q^{n-c/24}$$

を V の指標とよぶ.

補題 23. 頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n$ は条件 $\dim V_0 = 1$ をみたし，C_2 有限であるとする.
(1) $\dim\, V/C_2(V) \geq 1$ である.
(2) $k+1 = \dim\, V/C_2(V)$ とおくと

$$\dim V_n \leq \sharp Q(n,k)$$

が成り立つ．ここで $Q(n,k)$ は k 色に色分けされた分割でかつ各分割の成分として同色の同一数があらわれないもの全体の集合である.

証明. (1) は補題 14 の (2) から $\mathbf{1} \notin C_2(V)$ であることから正しい.

次に (2) を示そう．$V = U + C_2(V)$ であるような graded 部分ベクトル空間 U を固定する．$\mathbf{1} \in U$ であるから U の基底で $\mathbf{1}$ を含むものを

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \quad (\alpha_0 = \mathbf{1})$$

とする．定理 15 から V_n はベクトル

$$\alpha_{i_1}(-n_1)\alpha_{i_2}(-n_2)\cdots\alpha_{i_r}(-n_r)\mathbf{1} \quad (n_1 > n_2 > \ldots > n_r > 0) \tag{7}$$

で条件

$$n = \sum_{j=1}^{r} \left(|\alpha_{i_j}| + n_j - 1\right) \tag{8}$$

をみたすものの線型結合である．(8) の各項に色 i_j をつければ (7) から $Q(n,k)$ の要素への写像が定義される．$Q(n,k)$ の要素であって (8) の表示をもつものが与えれたとする．このとき分割を構成する数 i とその色 j に色 j のついた数 $i - |\alpha_j| + 1$ を対応させる．この色付きの数の集合はベクトル (7) を一意的に定めるので，(8) で定義される写像は単射であることがわかる．よって $\dim V_n \leq \sharp Q(n,k)$ である.

定理 24. 頂点作用素代数 $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V_n$ は条件 $\dim V_0=1$ をみたし，C_2 有限であるとする．このとき V の指標 $\mathrm{Tr}_V\, q^{L_0-c/24}$ は $0<|q|<1$ で収束する．もっと詳しく $k+1=\dim V/C_2(V)$ とおくと

$$\mathrm{Tr}_V\, q^{L_0} \le \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n)^k \tag{9}$$

が成り立つ[3]．

証明. 補題 23 の (2) から

$$\mathrm{Tr}_V\, q^{L_0} \le \sum_{n=0}^{\infty} \sharp Q(n,k) q^n$$

である．一方

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n)^k &= \prod_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}q^{nr}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{m_1r_1+\cdots+m_sr_s=n\\ 0\le r_1,\ldots,r_s\le k\\ m_1>\ldots>m_s>0}}\binom{k}{r_1}\cdots\binom{k}{r_s}\right)q^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sharp Q(n,k)q^n\end{aligned}$$

であるので (9) が成り立つ．無限積 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n)$ は $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ が $0<|q|<1$ で収束するので同じ領域で収束する．よって，正項級数 $\mathrm{Tr}_V\, q^{L_0}$ は $0<|q|<1$ で収束する． □

2.6 中心電荷の評価

定理 24 の応用として rational で C_2 有限な頂点作用素代数の中心電荷(central charge) c_V の評価を与えよう．ここでは rational の正確な定義は与えないが，おおよそ "V の表現がすべて完全可約である" ことと理解してもさしつかえない．Rational な頂点作用素代数は，既約表現の同値類が有限個であるなどの著しい性質をもつ．

[3] この不等式は各 q^n の係数が対応する不等式をみたすことを意味する．

定義 25. 関数 $\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ $(q = e^{2\pi i\tau}, \mathrm{Im}\ \tau > 0)$ を Dedekind の η 関数とよぶ．この関数は Poincaré 上半平面 $\mathrm{Im}\ \tau > 0$ で収束し，変換則

$$\eta(\frac{-1}{\tau}) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$$

をみたすことが知られている[4].

定義 26. 頂点作用素代数の既約表現は $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{h+n}$ $(h \in \mathbb{C})$ と L_0 の固有空間に分解する．複素数 h を V の表現 M の **conformal weight** とよぶ．

定理 27. V を C_2 有限な rational 頂点作用素代数とする．このとき V の中心電荷と既約表現の conformal weight は有理数である．

証明は [DLM] の定理 11.3 を参照のこと(付録で証明の概略を与える).

定義 28. V を C_2 有限な rational 頂点作用素代数とする．したがって，既約 V 加群は同型を除いて有限個である．既約 V 加群の conformal weight の最大数[5]を h_V とあらわす．

定理 29. V を C_2 有限かつ rational な頂点作用素代数とする．このとき

$$c_V \leq 24h_V + \frac{1}{2}(\dim V/C_2(V) - 1)$$

が成り立つ．

定理 29 を証明するために，modular 形式からの補題を用意しておこう．

補題 30. 形式変数 q をもつ形式的べき級数を

$$f_2(q) = q^{-1/48}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1/2}), \quad f_3(q) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$$

とおく．このとき f_2 と f_3 は Dedekind の η 関数を用いて

$$f_2(q) = \frac{\eta(\tau/2)}{\eta(\tau)}, \quad f_2(q) = \frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)}$$

---

[4]例えば，T. M. Apostol, Modular Functions and Diriclet Series in Number Theory, Second Edition, Springer-Verlag New York 1990 の47ページ (2) 式をみよ．

[5]Conformal weight は有理数であった．

と表示され，変換則

$$f_2(\frac{-1}{\tau}) = \sqrt{2} f_3(\tau) \tag{10}$$

が成り立つ．

証明. 関数 f_2 を η 関数であらわすには

$$\begin{aligned}
\eta(\tau/2) &= q^{1/48} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n/2}) \\
&= q^{1/48} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2}) \quad (n \text{ を偶数と奇数にわける}) \\
&= \eta(\tau) q^{-1/48} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2})
\end{aligned}$$

に注意すればよい．f_3 に関しても同様である．このとき η 関数の変換則から

$$f_2(\frac{-1}{\tau}) = \frac{\eta(-1/2\tau)}{\eta(-1/\tau)} = \frac{(-i\tau \cdot 2)^{1/2} \eta(2\tau)}{(-i\tau)^{1/2} \eta(\tau)} = \sqrt{2} f_3(\tau)$$

が成り立つ． □

さて，定理 29 の証明にうつろう．例によって $k+1 = \dim V/C_2(V)$ とおく．このとき (9) から

$$\mathrm{Tr}_V\, q^{L_0} \leq \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^k = q^{-k/24} f_3(q)^k \tag{11}$$

が成り立つ．頂点作用素代数 V は rational かつ C_2 有限であるから，次に述べる Zhu の modular 不変性定理が成り立つ．また rational であるから V も既約表現の直和に分解されるから以下の議論は V が既約であると仮定してもさしつかえない．

<u>Zhu の modular 不変性定理</u>

既約 V 加群のリスト $(W_0 = V)$ を $W_0, W_1, \ldots, W_r$ とするとき，その指標 $\chi_i(q) = \mathrm{Tr}_{W_i}\, q^{L_0 - c/24}$ $(0 \leq i \leq r)$ の張る線型空間は modular 変換で不変である．

Zhu の modular 不変性定理から，特に S 変換($\tau \mapsto -1/\tau$)に関する不変性

$$\chi_0(\frac{-1}{\tau}) = \sum_{i=0}^{r} a_i \chi_i(\tau) \tag{12}$$

が成り立つ．いま $\tau = iT\,(T > 0)$ の場合を考えると (11) と (10) から

$$\begin{aligned}
\chi_0(\frac{-1}{\tau}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\dim V_n) e^{-\frac{2\pi}{T}(n-c/24)} \\
&\leq e^{c\pi/12T} e^{k\pi/12T} f_3(\frac{-1}{\tau}) \quad ((11)\text{ を使う}) \\
&= e^{\frac{\pi}{12T}(k+c)} 2^{-k/2} f_2(q)^k \quad ((10)\text{ を使う})
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって T が十分大きいとき

$$\chi_0(\frac{-1}{\tau}) \leq 2^{-k/2} f_2(q)^k = 2^{-k/2} q^{-k/48}(1 + O(q^{1/2})) \tag{13}$$

が成立している．一方 (12) から適当な i が存在して

$$\chi_0(\frac{-1}{\tau}) = q^{h_i - c/24}(a_i + O(1)) \quad (a_i \neq 0)$$

となる．よって $T \mapsto \infty$ つまり $q \mapsto 0$ における不等式 (13)

$$q^{h_i - c/24}(a_i + O(1)) \leq 2^{-k/2} q^{-k/48}(1 + O(q^{1/2}))$$

から

$$h_i - \frac{c}{24} \geq -\frac{k}{48}$$

を得る．すなわち

$$c \leq 24h_i + \frac{k}{2} \leq 24h_V + \frac{k}{2}$$

が証明された．

2.7 C_2 有限性と Zhu 代数

頂点作用素代数の表現論において Zhu 代数とよばれる結合代数が非常に重要な役割を果たす．例えば Zhu 代数が有限次元であれば V の既約表現は有限個となる．ここでは C_2 有限であれば Zhu 代数が有限次元であることを証明しよう．

定義 31. 頂点作用素代数 V において $O(V)$ を

$$a \circ b = \sum_{n=0}^{|a|} \binom{|a|}{n} a(n-2)b$$

の線型結合で生成される部分ベクトル空間とする．このとき，商空間 $A(V) = V/O(V)$ は

$$a * b = \sum_{n=0}^{|a|} \binom{|a|}{n} a(n-1)b$$

から誘導される積により結合代数となることが知られている．結合代数 $A(V)$ を **Zhu 代数**とよぶ．Zhu 代数は $A(V)_r = \bigoplus_{n=0}^{r} V_n/O(V)$ とおくことにより filtered algebra となっている．

命題 32. 頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n$ はC_2 有限であるとする．このとき Zhu 代数は有限次元である．

証明. 商空間 $V/C_2(V)$ の斉次な基底を $\{\alpha_j + C_2(V)\}$ とする．このとき $A(V)$ が $\{\alpha_j + O(V)\}$ により張られることを証明すればよい．そ͡うでないと仮定して矛盾を導こう．$A(V)$ の要素で $\{\alpha_j + O(V)\}$ により張られない要素で最低次数のものを

$$u = \sum_j k_j\alpha_j + \sum_r a_r(-2)b_r$$

とする．このとき $a \circ b = a(-2)b + |a|a(-1)b + \cdots$ に注意すれば

$$\widehat{u} = u - \sum_j k_j\alpha_j - \sum_r a_r \circ b_r$$

は $|\widehat{u}| < |u|$ をみたす．よって仮定から $\widehat{u}$ は $A(V)$ において $\{\alpha_j + O(V)\}$ により張られている．このとき u も $\{\alpha_j + O(V)\}$ により張られるので矛盾する． □

3 Regular な頂点作用素代数

以上 C_2 有限性から得られる種々の有限性にまつわる帰結を述べた．この節では C_2 有限性を保証する表現論的条件について論じよう．そのためにはじめに弱加群の概念を導入する．

3.1 弱加群

ベクトル空間 M が頂点作用素代数 V の**弱加群**であるとは写像

$$\begin{array}{ccc} V \times M & \longrightarrow & M \\ (a, v) & \longmapsto & a[n]v \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

が定義され，フィールド条件，$\mathbf{1}[n] = \delta_{n,-1}\,\mathrm{id}_M$ さらに $a,\, b \in V,\, v \in M$ に対し，M 上の Borcherds の恒等式

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a(r+i)\,b)[p+q-i]v$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \left(a[p+r-i](b[q+i]v) - (-1)^r b[q+r-i](a[p+i]v)\right)$$

が成り立つものである．

補題 33. M を頂点作用素代数 V の弱加群とする．このとき $L_n = \omega[n+1]\,(n \in \mathbb{Z})$ は中心電荷 c_V の Virasoro 代数の M 上の表現である．

証明. $\mathrm{End}(M)$ の要素として Borcherds の commutator formula は依然として正しいので，注意 9 を用いればよい． □

M を頂点作用素代数 V の弱加群とする．M 上 L_0 が半単純に作用，つまり，$M = \oplus_{h\in\mathbb{C}} M(h), L_0|_{M(h)} = h\,\mathrm{id}_{M(h)}$ し，各固有空間 $M(h)$ は有限次元であって $M(h+n) = 0$ が十分小さい $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つとき，単に**加群**とよぶ．

定義 34. 頂点作用素代数 V の任意の弱加群が既約加群の直和であるとき，V は **regular** であるとよばれる．

定理 35. 頂点作用素代数 V が regular であれば C_2 有限である．

この定理の詳しい証明は文献 [Li] を読んでいただきたい．ここでは証明のあらすじは与え，頂点作用素代数の反傾表現が意外な役割を果たすことを強調したい．

3.2 頂点作用素代数の反傾表現

反傾表現の主眼はベクトル空間 V の双対空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ 上に V 加群の構造を導入することである．しかし，双対空間は一般には V の表現空間とはならず，restricted dual とよばれる，V^* の比較的小さい部分空間上に V 加群の構造が導入される．

頂点作用素代数 $V = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n$ に対して $*V = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n^*$ を restricted dual とよぶ．このとき $a \in V_h$ の $*V$ への作用を

$$(14) \qquad \langle a^*[n]\alpha, b\rangle = \sum_{i\in\mathrm{N}} (-1)^h \langle \alpha, \frac{1}{i!}(L(1)^i a)(2h-n-i-2)b\rangle$$

により定めると，写像

$$\begin{array}{ccc} V \times *V & \longrightarrow & *V \\ (a,\alpha) & \longmapsto & a^*[n]\alpha \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

は $*V$ 上に V 加群の構造を与えることが知られている([FHL] 参照)．作用素 $L(1)$ は V 上局所べき零に作用しているから (14) においては和は有限となる，よって任意の $\alpha \in V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ に対し well-defined である．すなわち V は V^* 上に作用する．しかしながら，これは V^* が V 加群であることを意味しない．それはフィールド条件が成り立たないからである．そこで

$$D(V) = \{\alpha \in V^* \mid a^*[n]\alpha = 0\,(a \in V, n \gg 0)\}$$

と定義すると，$D(V)$ は V 弱加群であることが証明される．Borcherds の恒等式が成り立つことの証明は反傾表現における証明そのものである．また $D(V)$ の定義から $*V \subset D(V)$ が成り立っている．

定理 35 の証明のあらすじ

頂点作用素代数 V の反傾表現を $*V = \bigoplus_{n\in\mathrm{N}} V_n^*$ とする．V が C_2 有限であることを示すには $(V/C_2(V))^* \subset *V$ であることを示せば十分である(無限次元ベクトル空間の双対空間は非可算次元であるから)．定義から $*V \subset D(V)$ であった．頂点作用素代数 V は regular でなので，任意の弱加群上 L_0 は半単純である．このこと

より $*V = D(V)$ を証明することができる．よって $(V/C_2(V))^* \subset D(V)$ を証明すればよい．ところが一般に

$$(V/C_2(V))^* = \{\alpha \in V^* \mid a^*[m]\alpha = 0 \quad (a \in V, m \geq 2|a| + n - 2)\}$$

が証明されるので，とくに $(V/C_2(V))^* \subset D(V)$ である．以上から $(V/C_2(V))^* \subset *V$ となり $V/C_2(V)$ が有限次元であることが示された．

4 C_2 有限性の実際 – Virasoro 代数の場合

第 3 節でみたように regular な頂点作用素代数は C_2 有限であり，実際，ほとんどすべての C_2 有限な既知の頂点作用素代数は regular であることが知られている．もともと具体的に与えられた頂点作用素代数が regular であることを証明することは容易ではなく，むしろ C_2 有限性を証明する方が具体例においては現実的であると言える．

ここでは極小系列とよばれる Virasoro 代数の既約最高ウエイト表現が C_2 有限であることを証明しよう．この事実は [FF] においてはじめて証明された．

4.1 極小系列

Virasoro 代数を $\mathcal{L} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n$ で表すことにする．最高ウエイト h で中心電荷 c の Verma 加群を $M(h,c)$ とする．ここで興味があるのは中心電荷と最高ウエイトが次で与えられるときである(このタイプの Verma 加群あるいはその既約商加群を極小系列と呼ぶ)：$p, q > 1$ を互いに素な整数とし，

$$c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq},$$
$$h_{r,s} = \frac{1}{4pq}\left[(rq - sp)^2 - (p-q)^2\right] \quad (0 < r < p, 0 < s < q)$$

をおく．このとき Verma 加群 $M(c_{p,q}, h_{r,s})$ の極大部分加群 $J(c_{p,q}, h_{r,s})$ はウエイト $h_{r,s} + rs$ と $h_{r,s} + (p-r)(q-s)$ の 2 つの特異ベクトルで生成される．この 2 つの特異ベクトルを完全に記述する公式は知られていないが，次の部分的な公式(射影表示とよばれる)が知られている．Virasoro 代数の部分リー環 $\mathcal{L}_{\leq -1}$ とそのイデアル $\mathcal{L}_{\leq -3}$ を

$$\mathcal{L}_{\leq -1} = \oplus_{n\leq -1}\mathbb{C}L_n, \quad \mathcal{L}_{\leq -3} = \oplus_{n\leq -3}\mathbb{C}L_n$$

により定義しよう．Verma 加群 $M(c_{p,q}, h_{r,s})$ の最高ウエイト・ベクトルを v とするとき，特異ベクトルは $\sigma_{r,s}v, \sigma_{p-r,q-s}v$ と普遍展開環 $\mathfrak{U}(\mathcal{L}_{\leq -1})$ の要素 $\sigma_{r,s}, \sigma_{p-r,q-s}$ を用いて表示される．普遍展開環 $\mathfrak{U}(\mathcal{L}_{\leq -1})$ から $\mathfrak{U}(\mathcal{L}_{\leq -1}/\mathcal{L}_{\leq -3}) = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}]$ への射影を π とすると $\pi(\sigma_{r,s}) = F_{r,s}(L_{-1}, L_{-2}; p/q)$

$$F_{r,s}(x, y; t) = \prod_{k=0}^{r-1}\prod_{\ell=0}^{s-1} G_{k\ell}^{rs}(x, y; t),$$
$$G_{k\ell}^{rs}(x, y; t) = x^2 - \left\{(r - 2k - 1)t^{1/2} - (s - 2\ell - 1)t^{-1/2}\right\}^2 y$$

と表示される．

4.2 極小系列の C_2 有限性

極小系列の C_2 有限性は本質的に次の補題から証明される．その証明は具体的に計算すれば良い．

補題 36. 2 変数多項式多項式 $F_{r,s}(x, y; p/q)$ と $F_{p-r,q-s}(x, y; p/q)$ は共通零点をもたない．

この補題と以下で説明する Hilbert の零点定理により極小系列の C_2 有限性が証明される．

多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルを I とする．イデアル I から代数多様体

$$V(I) = \{a \in \mathbb{C}^2 \mid f(a) = 0\,(f \in I)\}$$

が定まる．逆に一般に $\mathbb{C}^2$ に含まれる代数多様体 V に対して

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid f|V = 0\}$$

とおくと，$\mathcal{I}(V)$ は $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルである．

補題 37. (Hilbert の零点定理) I を 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルとする．このとき $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$ である．

Hilbert の零点定理をもちいて極小系列が C_2 有限であることを証明しよう．

定理 38. $(h,c) \in \mathbb{C}^2$ を極小系列の中心電荷と最高ウエイトとする．このとき $L(h,c)/\mathcal{L}_{\geq -3}L(h,c)$ は有限次元である．

証明. $c = c_{p,q}$ かつ $h = h_{r,s}$ とする．$P = F_{r,s}(x,y;p/q), Q = F_{p-r,q-s}(x,y;p/q)$ とおく．2変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ において2つの多項式 $P(x,y), Q(x,y)$ の生成するイデアルを (P,Q) とあらわす．このとき $L(h,c)/\mathcal{L}_{\geq -3}L(h,c)$ は自然に多項式環 $\mathbb{C}[L_{-1},L_{-2}] = \mathbb{C}[x,y]$ の商環 $\mathbb{C}[x,y]/(P,Q)$ の部分空間と同一視される．よって $\mathbb{C}[x,y]/(P,Q)$ が有限次元であることを証明すればよい．簡単のために $I = (P,Q)$ とおく．補題 36 から P と Q の共通零点は $(0,0)$ のみであるから，Hilbert の零点定理から

$$x, y \in \sqrt{I}$$

である．したがって $m,n \in \mathbb{N}$ が存在して $x^m, y^n \in I$ となる．よって $\mathbb{C}[x,y]/I$ は有限次元である． □

5 付録

5.1 有理的頂点作用素代数の中心電荷と共形次元の有理性

ここでは [DLM] にしたがって定理 27 の証明の概略を与えよう．[DLM] でも述べられているように証明の方針は [AM] と全く同じである．指標のモジュラー不変性が有効に用いられていることに注目してほしい．

関数 $f(q)$ を頂点作用素代数 V の指標，あるいは既約 V 加群の指標とし，$f(q)$ の線型結合からなるベクトル空間を U とする．Zhu の定理から U は有限次元の $SL(2,\mathbb{Z})$ 加群である．関数 $f(q)$ は q 展開され(べきは有理数とは限らないが)，かつその係数は整数であることに注意する．

群 $\Gamma(2) \subset SL(2,\mathbb{Z})$

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod 2 \right\}$$

とおく．Poincaré 上半平面 $\mathfrak{h}$ の商空間 $\mathfrak{h}/\Gamma(2)$ のコンパクト化上の有理関数体の生

成元として Picard の λ 関数 $\lambda(\tau)$ をとることができる：

$$\lambda(\tau) = 16q^{1/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1+q^{n-1/2}}\right)^8 = \frac{\eta(2\tau)^2\eta(\tau/2)}{\eta(\tau)^3}$$

すなわち，関数 $\lambda(\tau)$ は正則同型

$$\mathfrak{h}/\Gamma(2) \cong \mathbb{P}\setminus\{0,1,\infty\}$$

を与える．微分作用素 $E = d/d\lambda$ を導入しよう．[AM] の Proposition 1 から $k_i \in \mathbb{C}(\lambda)$ が一意的に存在して，ベクトル空間 U は微分方程式

$$E^n y + \sum_{i=1}^{n-1} k_i E^i y = 0$$

の解空間に一致する．

体 $\mathbb{C}$ の自己同型群を $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ とあらわす．$\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と $r(q) = \sum a_n q^n \in U$ に対して

$$r^{\phi}(q) = \sum \phi(a_n) q^{\phi(n)}$$

とおく．このとき $r^{\phi}(q)$ は微分方程式

$$E^n y + \sum_{i=1}^{n-1} k_i^{\phi} E^i y = 0 \tag{15}$$

の解となる．ここで Picard の λ 関数は q の半整数べきで展開され，かつその係数は整数であるので $\lambda^{\phi} = \lambda$ であることを注意する．いずれにせよ，微分方程式 (15) の解は q 展開されるので，とくに $r^{\phi}(q)$ は q 展開される．また，$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ と $SL(2,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{C}(\lambda)$ への作用は可換であるので，微分方程式 (15) の解空間は $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変である．

さて関数 $f(q) \in U$ が

$$f(q) = q^{h-cv/24}\sum_{n\geq N} a_n q^n \quad (a_n \in \mathbb{Z})$$

と q 展開されているものとする．このとき $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ の作用の定義から

$$f(q)^{\phi} = q^{\phi(h-c_V/24)} \sum_{n \geq N} a_n q^n = q^{\phi(h-c_V/24)-(h-c_V/24)} f(q)$$

である．この式の両辺に S 変換を作用させると

$$f^{\phi}|_S = e^{-\alpha/\tau} f|_S, \quad \alpha = 2\pi i \left(\phi(h - c_V/24) - (h - c_V/24)\right)$$

が成立する．ここで $f^{\phi}|_A$ と $f|_S$ は共に q 展開されるから [AM] の $\tau \to i\infty$ における極限の議論から $\alpha = 0$ であることが結論される． この事実と次のよく知られた補題から $\lambda, c_V \in \mathbb{Q}$ であることが証明される．

補題 39. $\theta \in \mathbb{C}$ が有理数でなければ $\mathbb{C}$ の(代数的)自己同型 ϕ で $\phi(\theta) \neq \theta$ となるものが存在する．

補題 39 を V の指標の場合($h = 0$)に適用すれば $c_V/24 \in \mathbb{Q}$ がわかる．また既約表現の指標に適用して $h - c_V/24 \in \mathbb{Q}$ となるから，結局 $c_V, h \in \mathbb{Q}$ が結論される．

5.2 Anderson-Moore の議論

ここでは定理 27 の証明に用いた Anderson-Moore の $\tau \to i\infty$ における議論の詳細を与えておこう．

補題 40. Poincaré 上半平面上で q 展開される関数 f と g がある複素数 α により，関係

$$g = e^{\alpha/\tau} f$$

をみたすとする．このとき $\alpha = 0$ である．

証明. $\alpha \neq 0$ と仮定しよう．関数 f と g の q 展開を

$$f = \sum f_i q^{r_i}, \quad g = \sum g_i q^{s_i}$$

とする．いま $t \in \{r_i, s_j\}$ の実部が他の指数の実部より真に小さいとする．このとき

$$\frac{g - f}{q^t} = \left(\frac{e^{\alpha/\tau} - 1}{q^t}\right) f \tag{16}$$

と表示し，$\tau \to i\infty$ すれば，式 (16) の左辺は 0 でない数に収束するが，右辺は 0 あるいは ∞ に収束するので矛盾を生じる．このような t が一意的でない場合には極限 $\tau \to e^{(\pi/2+\varepsilon)i}\infty$ を考えることにより矛盾を得る． □

参考文献

[AM] Anderson, G., Moore, G.: Rationality in Conformal Field Theory, Commun. Math. Phys. **117**, 441–450(1988)

[AN] Abe, T., Nagatomo, K.: Finiteness of conformal blocks over the projective line, To appear in Fields Institute Communications.

[DLM] Dong, C., Li, H.-S., Mason, G.: Modular-invariance of tace funcions in orbifold theory and Moonshine, Commun. Math. Phys. **214**, 1-56(2000)

[FF] B. L. Feigin, D. B. Fuchs: Verma modules over the Virasoro algebra, Lecture Note in Math., **1060**, 230–245(1984), Cohomology of some nilpotent subalgebras of the Virasoro and Kac-Moody Lie algebras, J. Geom. Phys. **5**, no. 2, 209–235(1988)

[FHL] Frenkel, I.B., Huang, Y., Lepowsky, J.: *On axiomatic approach to vertex operator algebras and modules*, Mem. Amer. Math. Soc. **104**, No.494, 1993.

[GN] Gaberdiel, M. R., Neitzke, A., Rationality, quasirationality and finite W-algebras, hep-th/0009235

[KL] M. Karel and H.-S. Li, Certain generating subspaces for vertex operator algebras, J. Algebra **217**, 393–421(1999)

[Li] Li, H.-S.: Some finiteness properties of regular vertex operator algebras, J. Algebra **212**, 495–514,(1999)

[MN] Matsuo, A., Nagatomo, K.: *Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields*, MSJ Memoirs No. 4, Mathematical Society of Japan, 1999.

[Z] Zhu, Y.: Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. Amer. Math. Soc. **9**, No.1, 237–302(1996)