数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 131-141

2次体のイデアルの個数関数を含む指数和について

名古屋大学多元数理　古屋 淳 (JUN FURUYA)

Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1. 序

K を判別式 D の二次体とする. また $F(n)$ をノルムが n となる K の整イデアルの個数を表す数論的関数とする. $F(n)$ は次の表示を持つことが知られている:

$$F(n)=\sum_{d|n}\chi(d),$$

ここで, χ は mod $|D|$ の実原始指標である. この関数 $F(n)$ の挙動は複雑なものであるのでその平均値 $\sum_{n\leq x}F(n)$ がしばしば考察の対象となっている. 例えば Gauss 数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ における イデアルの個数関数は $4^{-1}r(n)$ と表示される. ここで $r(n)$ は不定方程式 $x^2+y^2=n$ の整数解の個数を表す関数である. $\sum_{n\leq x}r(n)$ に関する漸近公式

$$\sum_{n\leq x}r(n)=\pi x+O(x^{1/2})$$

は Gauss によって得られている. この漸近式中の誤差項はその後改良も行われている. この漸近公式における誤差の最良評価を求める, という問題が “Gauss の円問題” と呼ばれる問題である. これは格子点問題の中でも最も古典的なもののうちの一つである.

上述のように, 一般の $|D|$ に対しても $F(n)$ の平均値公式は研究されているが, ここでは $F(n)$ を一般化した関数の平均値を考えてみる. 任意の原始的な Dirichlet 指標 $\chi(\bmod k>1)$ に対し

$$F_{\chi}(n)=\sum_{d|n}\chi(d)$$

と定義する. すなわち, $F(n)$ を与える指標を一般化した $F_{\chi}(n)$ を考え, この関数 $F_{\chi}(n)$ の平均値を考えることにする. $F_{\chi}(n)$ の平均値における誤差項の現在での最良評価は Huxley-Watt [4] によって得られているものである. [4] で得られた結果は以下のものである: ある正定数 A に対して $x\geq Ak$ のとき

$$\sum_{n\leq x}F_{\chi}(n)=L(1,\chi)x+O\left(k^{50/73}x^{23/73}(\log x)^{461/146}\right)$$

となる. $L(s,\chi)$ は $\chi(\bmod k)$ に付随する Dirichlet L-関数とする.

ここで, 次のような数論的関数 $F_{\chi}(n)$ を含む指数和 $R(x;h/q)$ を考えてみる:

$$R(x;h/q)={\sum_{n\leq x}}' F_{\chi}(n)e(hn/q),$$

ここで h, q は互いに素な整数で $q\geq 1$, また $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $e(\alpha)=\exp(2\pi i\alpha)$ と定義する. さらに, 記号 $\sum_{n\leq x}'$ は x が整数のときには $F_{\chi}(x)e(hx/q)$ を $2^{-1}F_{\chi}(x)e(hx/q)$ にすることを意味するものとする. $F_{\chi}(n)=d(n)$ のとき (すなわち $k=1$ のとき, $d(n)$ は約数関

数とする), この和の生成関数, この和から生じる誤差項の Voronoï 公式, 二乗平均などは [1], [6] などで扱われている.

ここでは, $k=1$ のときの種々の結果を $k>1$ の場合へと拡張することを考える. $k>1$ の場合の生成関数

$$F_\chi(s;h/q)=\sum_{n=1}^{\infty}F_\chi(n)e(hn/q)n^{-s}\qquad(\Re s>1)$$

の解析接続, および極での留数の計算は Müller [9, Lemma 1] によって与えられている. 特に, 関数 $F_\chi(s;h/q)$ 全 s-平面に有理型関数として解析接続可能であり, $1<\delta<k$ では整関数になる. また $\delta=1$ または k では, $s=1$ に一位の極を持ち他では正則になる. (留数の正確な値は省略する ([9, Lemma 1] 参照).)

$P(x;h/q)$ を $R(x;h/q)$ より生じる誤差項とおく, すなわち

$$P(x;h/q)=R(x;h/q)-x\operatorname*{Res}_{s=1}F_\chi(s;h/q)-F_\chi(0;h/q)$$

とする. 本稿では, この関数 $P(x;h/q)$ の漸近的挙動を調べることを目標とする. 具体的には, $P(x;h/q)$ の非自明な上からの評価及び二乗平均公式を導くことにする. まず, $P(x;h/q)$ の truncated Voronoï 公式を得ることを考える. それは以下の定理のような形になる.

Theorem 1. $h,\ q$ は互いに素な整数で $q\geq 1$, χ は原始的な Dirichlet 指標 (mod $k>1$) とする. さらに $\delta=(k,q)$, $q_1=kq/\delta$ とおく. このとき $x\geq 1$, $N\geq qq_1/x$ に対して

$$P(x;h/q)=p_N(x;h/q)+E_N(x;h/q),$$

ここで

$$p_N(x;h/q)=\frac{C}{\sqrt{2}\pi}q^{1/2}\left(\frac{\delta}{k}\right)^{1/4}x^{1/4}\sum_{n\leq N}d_\chi(n;-\bar{h},q)n^{-3/4}f\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}-\frac{\pi}{4}\Big)$$

かつ

$$d_\chi(n;\bar{h},q)=\sum_{uv=n}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\equiv v\bar{h}(\bmod q)}}^{q_1}\chi(\alpha)e(\alpha u/q_1)$$

とした. このとき $E_N(x;h/q)$ は誤差項で十分小なる任意の実数 $\varepsilon>0$ に対して

$$E_N(x;h/q)\ll x^{\varepsilon}+(qq_1)^{1/2}x^{1/2+\varepsilon}N^{-1/2}+(qq_1)^{1/2}c_1^{1+\varepsilon}N^{\varepsilon}$$

と評価される. $c_1=\min(\delta,k/\delta)^{1/2}$ であり, $\bar{h}$ は $h\bar{h}\equiv 1$ $(mod\ q)$ を満たす最小の正の整数とする. また $C=1$, $f(z)=\cos z$ ($\chi(-1)=1$ のとき), $C=-i$, $f(z)=\sin z$ ($\chi(-1)=-1$ のとき) とする. 記号 $\ll$ に含まれる定数は ε にのみ依存するものである.

Theorem 1 を用いると, 次の 2 つの corollary を示すことができる.

Corollary 1. $c_2=(qq_1)^{1/2}c_1$ とおく. $x\geq c_2$ に対して,

$$P(x;h/q)\ll c_2^{2/3}x^{1/3+\varepsilon}.$$

Corollary 2. $X\geq 1$ に対して

$$\int_1^X|P(x;h/q)|^2dx=C_\chi(\bar{h},q)X^{3/2}+Q(X;h/q)$$

とおく. ここで

$$C_\chi(h,q)=\frac{1}{6\pi^2}q\left(\frac{\delta}{k}\right)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}|d_\chi(n;-\bar{h};q)|^2n^{-3/2}$$

とした. このとき $Q(X;h/q)$ は次のように評価される.

$$Q(X;h/q)\ll c_2^2X^{1+\varepsilon}+(qq_1)^{3/4}c_1^2X^{5/4+\varepsilon}+q_1^2\min(c_2,X)\log^2(q+1).$$

次に, Corollary 2 の $Q(X;h/q)$ の評価を X について改良することを考える. そのためにまず, Meurman の方法 [8, Section 4] を用いて Theorem 1 の誤差項 $E(x;h/q)$ の評価の改良を行う. 関数 $B_\nu(z)$ を $B_\nu(z)=Y_\nu(z)$ ($\chi(-1)=1$ のとき), $B_\nu(z)=J_\nu(z)$ ($\chi(-1)=-1$ のとき), とおく. ここで, $Y_\nu(z)$, $J_\nu(z)$ は Bessel 関数とする. Theorem 1 の誤差項を改良するには, まず無限級数で誤差項を近似する Voronoï 公式が必要となる. それを以下に定理としてまとめる.

Theorem 2. $x>0$ に対して

$$P(x;h/q)=-\left(\frac{\delta}{k}\right)^{1/2}x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}\Big\{C\chi(-1)d_\chi(n;-\bar{h},q)B_1\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)$$
$$+\frac{1}{\pi}(1+\chi(-1))d_\chi(n;\bar{h},q)K_1\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)\Big\}.$$

この無限級数は x が固定された有界領域 $[x_1,x_2]\subset(0,\infty)$ に含まれるとき有界収束し, この区間が整数点を含まなければ一様収束する.

ここで Corollary 2 の評価を X について改良する.

Theorem 3. $Q(X;h/q)$ を Corollary 2 で定義した誤差項とすると

$$Q(X;h/q)\ll c_2^2X\log^4X+c_1^2(qq_1)^{2+\varepsilon}+q_1^2(qq_1)^{1/2}c_1^2\log^2(q+1)$$

となる. さらに, χ が実指標で $\delta=1$ または k のとき, X についてさらに改良が可能で

$$Q(X;h/q)\ll qq_1X\log^2X\log^2k+(qq_1)^{2+\varepsilon}+q_1^2(qq_1)^{1/2}\log^2(q+1)$$

となる.

Remark 1. Theorem 3 は Corollary 2 の X についてのみの改良である. k,q と X の関係によってはこの theorem は Corollary 2 の改良にはならない (例えば $q_1^2=X$ のときなど). 本稿では, $Q(x;h/q)$ の x に関する漸近挙動に注目し, x、k、q に関する一様な評価を求めることを目標とする.

2. 生成関数の性質

まずは記号を導入する. ε を任意に小さい正の実数とする. 整数 h, q は $(h,q)=1$ かつ $q\geq 1$ を満たすものとし, $\bar{h}\pmod q$ を $h\bar{h}\equiv 1\pmod q$ で定義する. 記号 $\ll$, $O(\ )$ に含まれる定数は高々 ε にのみ依存するものとする. χ を modulo $k>1$ の原始的な Dirichlet 指標とし, $\bar{\chi}$ は χ に対して $\chi(n)\bar{\chi}(n)=1$ ($(n,k)=1$ のとき), $\bar{\chi}(n)=0$ (その他の場合) で定義する. さらに, $\delta=(k,q)$, $q_1=kq/\delta$ とおき, 記号 c_1,c_2 をそれぞれ $c_1=\min(k/\delta,\delta)^{1/2}$, $c_2=(qq_1)^{1/2}c_1$ と定義する.

定理を証明するためには, 生成関数の性質を詳しく知る必要がある. 特に解析接続と関数等式および t 方向に対する上からの評価である. ここでは $k>1$ に対し $F_\chi(s;h/q)$ の関数等式を証明することを考える. そのために, 次の Dirichlet 級数を導入する:

$$\tilde{F}_\chi(s;h/q)=\sum_{n=1}^{\infty}d_\chi(n;\bar{h},q)n^{-s}\quad(\Re s>1).$$

Remark 2. 関数 $d_\chi(n;\bar{h},q)$ は $\delta=1$ または k のときは $F_\chi(n)$ を用いて書き下すことができる. 具体的には

$$d_\chi(n;\bar{h},q)=\begin{cases}e(\bar{h}\bar{k}n/q)G(1,\chi)\bar{\chi}(-r)F_{\bar{\chi}}(n) & \text{if } \delta=1,\\ \chi(\bar{h})e(\bar{h}n/q)F_\chi(n) & \text{if } \delta=k,\end{cases}\tag{2.1}$$

である. ここで, $\bar{k}$ は $k\bar{k}\equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$ を満たす最小の自然数であり, r は $k\bar{k}=1+rq$ をみたす整数として定義する. $1<\delta<k$ については, このような $F_\chi(n)$ を用いた表示を得ることはできなかった. しかしながら, $d_\chi(n;\bar{h},q)$ の上からの評価に対しては自明な評価 $d_\chi(n;\bar{h},q)\ll kd(n)/\delta$ よりも精密な評価

$$d_\chi(n;\bar{h},q)\ll\left(\frac{k}{\delta}\right)^{1/2}c_1d(n)$$

を $1\le\delta\le k$ に対して証明することができる.

Remark 3. (2.1) 式を考慮すると, $\delta=1$ または k の場合は, Dirichlet 級数 $\tilde{F}_\chi(s;h/q)$ の性質を調べることは $F_\chi(s;h/q)$ の性質を調べることと同じことである. よって, $\tilde{F}_\chi(s;h/q)$ を考えるには $1<\delta<k$ と仮定しても十分であることになる. しかしながら, この関数を統一的に扱うということと証明を繰り返さないことを考慮して $1\le\delta\le k$ に関して関数 $\tilde{F}_\chi(s;h/q)$ の性質を調べることにする.

$\tilde{F}_\chi(s;h/q)$ の解析接続について考える. それは以下の lemma の形になる.

Lemma 1. Dirichlet 級数 $\tilde{F}_\chi(s;h/q)$ は全 s-平面に有理型関数として解析接続可能である. その関数は $s=1$ に一位の極を持ち, その他では正則である. また留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\tilde{F}_\chi(s;h/q)=G(1,\chi)q^{-1}L(1,\bar{\chi})$$

である.

この lemma は $\Re s>1$ において $\tilde{F}_\chi(s;h/q)$ を periodic zeta-関数を用いて表示することによって得ることができる.

ここで, $F_\chi(s;h/q)$ について考える. [6, Theorem 1.1.1] の方法を用いることにより $F_\chi(0;h/q)\ll q_1\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\log(q+1)$ を示すことができる. ただし, φ は Euler 関数とする. さらに [6, Theorem 1.1.1] を用いて $F_\chi(s;h/q)$ の 関数等式を得ることを考える. それを以下に lemma としてまとめる:

Lemma 2. $G(s)=(2\pi)^{2s-2}\Gamma^2(1-s)$ とすると

$$\begin{aligned}F_\chi(s;h/q)=G(s)\left(\frac{\delta}{k}\right)^{s}q^{1-2s}\Big\{&(1+\chi(-1))\tilde{F}_\chi(1-s;h/q)\\&-(e^{\pi is}+\chi(-1)e^{-\pi is})\tilde{F}_\chi(1-s;-h/q)\Big\}.\end{aligned}$$

この Lemma 2 を用いると $\widetilde{F}_\chi(s;h/q)$ の関数等式も得ることができる. $\widetilde{F}_\chi(s;h/q)$ の関数等式は $\widetilde{F}_\chi(s;h/q)$ の $\Re s>1$ での級数表示及びその解析接続, periodic zeta-関数の関数等式を用いて直接的に証明することも可能である. Theorem 2 の証明では, この $\widetilde{F}_\chi(s;h/q)$ の関数等式も用いることになる. 具体的には, Theorem 2 の証明には $\sum_{n\le x} d_\chi(n;\bar{h},q)$ の漸近公式も必要となる.

3. Theorem 1,2,3 の証明の概略

まず, Theorem 1 の証明について考える. T を $T\ge 1$ なるパラメーターとする. Perron の公式より

$$\sum_{n\le x}{}' F_\chi(n)e(hn/q)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} F_\chi(s;h/q)\frac{x^s}{s}ds+O(x^\varepsilon)+O(x^{1+\varepsilon}T^{-1})$$

が得られる. 積分部分について積分路を $\Re s=-\varepsilon$ まで移動する. $-\varepsilon\le\sigma\le 1+\varepsilon$, $|t|\ge 1$ に対する $F(s;h/q)$ の評価

$$F(s;h/q)\ll\Big((qq_1)^{1/2}|t|\Big)^{1-\sigma+\varepsilon}c_1^{(1+\varepsilon-\sigma)/(1+2\varepsilon)}$$

を用いて水平方向の積分を評価し, $F(s;h/q)$ の関数等式を用いて $[-\varepsilon-iT,\varepsilon+iT]$ の積分を変形すると

$$\begin{aligned}P(x;h/q)=&-\frac{q}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}d_\chi(n;-\bar{h},q)n^{-1}j_n(x)+O(x^\varepsilon)+O\Big((qq_1)^{1/2+\varepsilon}c_1^{1+\varepsilon}T^{2\varepsilon}x^{-\varepsilon}\Big)\\&+O(x^\varepsilon T^{-1}),\end{aligned}$$

が得られる. ここで関数 $j_n(x)$ は次で定義されるものである:

$$j_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}\Gamma^2(1-s)\left(e^{\pi i}+\chi(-1)e^{-\pi i}\right)\left(\frac{4\pi^2 nx}{qq_1}\right)^s\frac{ds}{s}.$$

N を $T^2=4\pi^2x(N+1/2)/qq_1$ を満たす十分大なる整数とし $N\ge qq_1/x$ と仮定する. この仮定により $T\ge 1$ なる条件は満たされることになる. 上記の $P(x;h/q)$ の表示において, $\sum_{n>N}$ の部分を評価して, さらに, $n\le N$ に対する $j_n(x)$ の漸近公式

$$j_n(x)=4\pi^2\chi(-1)C\left(\frac{nx}{qq_1}\right)^{1/2}B_1\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)+O\Big(1+(\log\frac{N+1/2}{n})^{-1}\Big)$$

および, $z\in R^+$ における Bessel 関数の漸近展開公式

$$B_1(z)=-\chi(-1)\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}f(z-\pi/4)+O(z^{-1})$$

を用いると Theorem 1 が $N\in\mathbb{N}$ に対して得られる. $N\notin\mathbb{Z}$ に対しては $N\in\mathbb{N}$ に帰着させることにより同様に示すことができる.

Theorem 2 を証明するには, [6, Sections 1.6-1.8] の手法を用いる. 非負整数 a に対し関数 $R_a(x;h/q)$ を次で定義する:

$$R_a(x;h/q)=\frac{1}{a!}\sum_{n\le x}{}' F_\chi(n)e(hn/q)(x-n)^a,$$

ただし, $R_0(x;h/q)=R(x;h/q)$ とする. この関数は $R(x;h/q)$ の Riesz 和である. このとき, $R_1(x;h/q)$ に対して

$$R_1(x;h/q)=\frac{1}{2!}x^2\operatorname*{Res}_{s=1}F_\chi(s;h/q)+\sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{n!(1-n)!}F_\chi(-n;h/q)x^{1-n}+P_1(x;h/q)$$

なる表示を得ることができる. ここで $P_1(x;h/q)$ は次で定義される関数である:

$$\begin{aligned}P_1(x;h/q)=&-\frac{C}{2\pi}\chi(-1)qx\sum_{n=1}^{\infty}d_\chi(n;-\bar{h},q)n^{-1}B_2\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)\\&+\frac{1}{2\pi^2}q(1+\chi(-1))x\sum_{n=1}^{\infty}d_\chi(n;\bar{h},q)n^{-1}K_2\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)\end{aligned}$$

([3, Section 4] 参照). $R_1(x;h/q)$ の定義より, $R_0(x;h/q)=\dfrac{d}{dx}R_1(x;h/q)$ が整数でない正の実数 x について成立する. 従って

$$R_0(x;h/q)=x\operatorname*{Res}_{s=1}F_\chi(s;h/q)+F_\chi(0;h/q)+(P_1(x;h/q))'$$

が整数でない正の実数 x について成立する.

ここで「$P_1(x;h/q)$ は項別微分が可能である」と仮定してみる. すなわち

(3.1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_1(x;h/q)=&-\left(\frac{\delta x}{k}\right)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}\Big\{C\chi(-1)d_\chi(n;-\bar{h},q)B_1\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)\\&+\frac{1}{\pi}(1+\chi(-1))d_\chi(n;\bar{h},q)K_1\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

としてみる. (3.1) 式の右辺は Theorem 2 の主張の右辺と一致した. 従って, 整数でない正の実数 x について項別微分を正当化すればこのような x に関しては Theorem 2 が示されたことになる. さらに, 整数 x に関しても $P(x;h/q)$ が (3.1) 式で表されることを示すとができれば, この theorem は完全に証明できたことになる.

そこで, (3.1) 式の部分和に関する漸近式を導くことを考える. 固定された 2 つの実数 x_1, x_2 $(0<x_1<x_2<\infty)$ に対して x は区間 $[x_1,x_2]$ に属していると仮定する. さらに $\sum(\alpha,\beta;x)$ を (3.1) 式の右辺の部分和とする, すなわち, $2\le\alpha<\beta<\infty$ に対して

$$\begin{aligned}\sum(\alpha,\beta;x)=&-\left(\frac{\delta}{k}\right)^{1/2}x^{1/2}\sum_{\alpha\le n\le\beta}n^{-1/2}\Big\{C\chi(-1)d_\chi(n;-\bar{h},q)B_1\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)\\&+\frac{1}{\pi}(1+\chi(-1))d_\chi(n;\bar{h},q)K_1\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

とおく. この和を調べるにあたり, 今は α,β に関する挙動を調べればよい. 従ってこの和の漸近公式は k,q に関する一様性を必要としない. 今後, O-constant が k,q に依存することを許す場合には記号 $O()$ の代りに記号 $O_{k,q}()$ を用いることにする.

$\sum(\alpha,\beta;x)$ について考える. この和は次のような形で漸近的に表すことができる.

Lemma 3. m を x に一番近い整数としたとき

$$\sum(\alpha,\beta;x) = -\frac{C\chi(-1)}{2\pi}x^{5/4}F(m)e(\bar{h}m/q)m^{-5/4}\int_{\alpha}^{\beta}t^{-1}\sin\Big(4\pi(\sqrt{x}-\sqrt{m})\sqrt{t/qq_1}\Big)dt \\ + O_{k,q}(\alpha^{-1/4}\log\alpha)$$

となる.

Lemma 3 の成立の仮定の下で次の lemma を示すことができる.

Lemma 4. (3.1) 式中の無限級数は $[x_1,x_2]\subset(0,\infty)$ 上有界収束する. また区間 $[x_1,x_2]$ が整数点を含んでいなければこの級数は一様収束する.

Lemma 4 より, x が整数でない正の実数であるときには項別微分が正当化されたことになる ($P_1(x;h/q)$ の表示式中の無限級数は絶対収束してることを注意しておく). x が自然数のときにも, Lemma 3 および [6, Theorem 1.6] の手法を用いることで Theorem 2 は示すことができる. ([6, Theorem 1.6] 参照.)

Theorem 2 の証明は Lemma 3 と 4 の証明に帰着された. そこでこの 2 つの lemma の証明を考えることにする. まず Lemma 3 を示す. そのためには $\sum'_{n\le x}d_\chi(n;\bar{h},q)$ の漸近公式を用いる必要がある. $\widetilde{P}(x;h/q)$ を次で定義される誤差項とおく:

$$\widetilde{P}(x;h/q) = \sum_{n\le x}{}' d_\chi(n;\bar{h},q) - G(1,\chi)q^{-1}L(1,\bar{\chi})x - \widetilde{F}_\chi(0;h/q).$$

まず, この関数 $\widetilde{P}(x;h/q)$ の非自明な上からの評価を考える. そのためにまず $\widetilde{P}(x;h/q)$ の Voronoï 公式を考え, Corollary 1 の証明法を適用すると $x\ge c_1^{-1}(qq_1)^{1/2}$ に対して

$$\widetilde{P}(x;h/q) \ll c_1^{1/3}q^{2/3}\Big(\frac{k}{\delta}\Big)^{5/6}x^{1/3+\varepsilon}$$

が得られる. また非負整数 a に対し $\widetilde{R}_a(x;h/q)$ を $\sum'_{n\le x}d_\chi(n;\bar{h},q)$ の Riesz 和とする. このとき $R_1(x;h/q)$ を導くときに用いた手法と同様のものを適用すると

$$\widetilde{R}_1(x;h/q) = \frac{1}{2}x^2G(1,\chi)q^{-1}L(1,\bar{\chi}) + \sum_{n=0}^{1}\widetilde{F}_\chi(-n;h/q)\frac{(-1)^n}{n!(1-n)!} + \widetilde{P}_1(x;h/q)$$

が得られる. ここで

$$\widetilde{P}_1(x;h/q) = \frac{C}{2\sqrt{2}\pi^2}\chi(-1)q_1^{5/4}q^{1/4}x^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}F_\chi(n)e(-hn/q)n^{-5/4}f\Big(4\pi\sqrt{nx/qq_1}-\frac{3\pi}{4}\Big) \\ + O_{k,q}(x^{1/2})$$

である. 上記の級数は絶対収束しているので $\widetilde{P}_1(x;h/q)$ に対して評価 $\widetilde{P}_1(x;h/q)\ll_{k,q}x^{3/4}$ を容易に得ることができる.

ここで, Lemma 3 を示す. $\sum(\alpha,\beta;x)$ の定義式において Bessel 関数の漸近展開, $\widetilde{P}(x;h/q)$ の定義式, $\widetilde{P}(x;h/q), \widetilde{P}_1(x;h/q)$ の上からの評価, $\widetilde{P}_1(x;h/q)$ の級数表示を用いると

$$\sum(\alpha,\beta;x) = A'x^{5/4}\sum_{n=1}^{\infty}F_\chi(n)e(hn/q)n^{-5/4}\int_{\alpha}^{\beta}t^{-1}\sin\Big(4\pi(\sqrt{x}-\sqrt{n})\sqrt{t/qq_1}\Big)dt \\ + O_{k,q}(\alpha^{-1/4}\log\alpha)$$

が得られる (A' はある定数). m を x に一番近い整数とおく. このとき上記の級数において $n \neq m$ の部分は $O_{k,q}(\alpha^{-1/2})$, で評価されることがわかり, Lemma 3 は証明される. また Lemma 4 は [6, Theorem 1.5] と同様に示すことができる. 具体的には [6, Theorem 1.5] は [6, Theorem 1.4] を用いて示されているが, [6, Theorem 1.4] の代りに Lemma 3 を用いてこの手法を適用すればよい.

次に Theorem 3 を示す. そのためには $B_1(z)$ の漸近展開

$$B_1(z) = -\chi(-1)\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} f(z-\pi/4) + O(|z|^{-3/2})$$

を $z = 4\pi\sqrt{nx/qq_1}$ として適用し, さらに O-constant は k, n, q, x に関して一様なものを取らなければならない. そのためには z を下から一様に評価する必要があるので $x \geq qq_1$ を仮定することにする. この仮定の下で, [8, Lemma 3] の方法を用いると次の lemma を得ることができる.

Lemma 5. *$qq_1 \leq x$, $x \geq 2$ とする. このとき $2x \leq N \ll x^A$ (A は固定された正定数) に対して, 誤差項 $E_N(x; h/q)$ は*

$$E_N(x; h/q) \ll \begin{cases} (qq_1)^{3/4} c_1 x^{-1/4} & \textit{if } N \gg x^5 \|x\|^{-2}, \\ (qq_1)^{1/2} c_1 x^{\varepsilon} & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

と評価される.

Theorem 3 を証明する. Lemma 5 を用いると

$$\begin{aligned}\int_1^X |P(x; h/q)|^2 dx = \int_1^X |p_N(x; h/q)|^2 dx + O(c_2^2 X) + O(c_1^2 (qq_1)^{2+\varepsilon}) \\ + O(q_1^2 (qq_1)^{1/2} \log^2(q+1))\end{aligned}$$

が $X^7 \ll N \ll X^{14}$ に対して得られる. また

$$\begin{aligned}&\int_1^X |p_N(x; h/q)|^2 dx \\ &= C_\chi(h,q) X^{3/2} + \begin{cases} O(c_2^2 X \log^4 X) & (\chi,\ \delta \text{ は任意}), \\ O(qq_1 X \log^2 X \log^2 k) & (\chi \text{ は実指標で } \delta = 1 \text{ または } k), \end{cases}\end{aligned}$$

なのでこの 2 つの式を組み合わせると Theorem 3 の主張を示すことができる. ただし, ここで評価式

$$\begin{aligned}&\sum_{n \leq y} |d_\chi(n; \bar{h}, q)|^2 n^{-\sigma} \\ &\ll \begin{cases} \frac{k}{\delta} c_1^2 (\log y + y^{-\sigma+1}) \log^3 y & (\chi,\ \delta \text{ は任意}), \\ \frac{k}{\delta} (\log y + y^{-\sigma+1}) \log y \log^2 k & (\chi \text{ は実指標で } \delta = 1 \text{ または } k, \text{ かつ } k^5 \leq y),. \end{cases}\end{aligned}$$

を使ったことに注意しておく (σ は $0 < \sigma \leq 1$ を満たすものとする).

4. $Q(x;h/q)$ の平均値

ここでは二乗平均の誤差項 $Q(x;h/q)$ についてもう少し詳しく考察を行う．とくにここでは $\delta=1$ または k に制限することにする．Corollary 2, Theorem 3 では $Q(x;h/q)$ の上からの評価を扱った．そこで，ここでは $Q(x;h/q)$ の x に関する評価の限界，および，$Q(x;h/q)$ の平均値を考える．それは以下の theorem になる．

Theorem 4 [1]**.** h,k,q を固定された整数とするとき，$\delta=1$ または k に対して

$$Q(x;h/q)=\Omega(x^{3/4}).$$

Theorem 5. $\delta=1$ または k とする．十分大なる X に関して

$$\int_1^X Q(x;h/q)dx \ll qq_1X^2\log X(\log\log X)^2\log^2 k+(qq_1)^{3/2}X^2+(qq_1)^{2+\varepsilon}X$$

となる．

この 2 つ theorem は Dirichlet の約数問題で得られている結果を $\sum_{n\le x}F_\chi(n)e(hn/q)$ から生じる誤差項の二乗平均に応用を行う，という問題として考えたものである．約数関数 $d(n)$ の和から生じる誤差項を $\Delta(x)$ とし，$F(x)$ を $\Delta(x)$ の二乗平均から生じる誤差項とおく．この関数 $F(x)$ に関しては上からの評価や Ω-結果などが研究されているが Lau-Tsang [7] は平均値公式

$$\int_1^X F(x)dx=-\frac{1}{8\pi^2}X^2\log^2 X+cX^2\log X+O(X^2) \tag{4.1}$$

を導き $F(x)=\Omega_-(x\log^2 x)$ を示した (c はある定数)．

今の場合，$Q(x;h/q)$ の平均値を (4.1) 式のような漸近公式で与えることはできなかった．これは，式変形の途中で出てくるある和の取り扱いが約数問題の場合と異なり，漸近的に表示できなかったことによる．詳しく述べると和

$$\sum_{\substack{q+n\le m\le qy+n\\ m\equiv n(\mathrm{mod}\ q)}}\ \sum_{b|m(k)} b^{-1}\chi\Big(\frac{m}{b}+j\Big)$$

(n は固定された整数，j は $1\le j\le k$, $(k,j)=1$ なる固定された整数，$m(k)$ は後で定義する．Lemma 6 参照.) が漸近的に書けなかったことによる．

Theorem 5 を示すためには，[7] および [2] の手法を用いる．特に，自然数 l に対して数論的関数の和

$$\sum_{n\le x}F_{\chi_1}(n)F_{\chi_2}(n+r)$$

の漸近公式を用いることが必要になる．ここで χ_1 と χ_2 は mod k の原始的な Dirichlet 指標で $\chi_1\chi_2(n)=\chi_0(n)$ を満たすものとする (χ_0 は mod k の単位指標とする)．この和について，Müller [9, Theorem 1] はより一般的な χ_1,χ_2 に関して漸近公式を導いている．この結果を次の lemma に挙げる．

Lemma 6 (Müller)**.** χ_1, χ_2 を mod $k>1$ の任意の原始的な Dirichlet 指標とする．また l を自然数とする．このとき

$$\sum_{n\le x}F_{\chi_1}(n)F_{\chi_2}(n+l)=M_{\chi_1,\chi_2}(l)x+E_{\chi_1,\chi_2}(x,l),$$

[1] この定理は実際は $1<\delta<k$ についても成立する

ここで主要項の係数 $M_{\chi_1,\chi_2}(l)$ は次で定義される関数である：

$$M_{\chi_1,\chi_2}(r) = C_{\chi_1,\chi_2}(r) + \Big\{k^{-1}\sum_{b|r(k)} b^{-1}\sum_{j=1}^{k}\chi_1(j)\chi_2\Big(\frac{r}{b}+j\Big)\Big\}C_{\bar{\chi_1},\bar{\chi_2}}(r) \tag{4.2}$$

かつ

$$C_{\chi_1,\chi_2}(r) = \frac{L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)}{L(2,\chi_1\chi_2)}\sum_{d|r}\chi_1(d)\chi_2(d)d^{-1}. \tag{4.3}$$

ここで $r(k)$ は r の k-part とする．すなわち，$(d,k)=1$ に対し $r=r(k)d$ であり，素数 p に関して $p|r(k)$ は $p|k$ を意味するものとする．また $E_{\chi_1,\chi_2}(x,r)$ は誤差項で $1\le r \ll k^{1/2}x^{5/6}$ に対して

$$E_{\chi_1,\chi_2}(x,r) \ll k^{2/3+\varepsilon}x^{5/6+\varepsilon}$$

と一様に評価される．

ここで (4.2), (4.3) 式を用いると 任意の $r\in\mathbb{N}$ に関して

$$M_{\chi_1,\chi_2}(r) \ll \log^2 k(\log\log(3r))^2 \tag{4.4}$$

なる評価が得られる．

Theorem 4 と 5 の証明の概略を述べる．Theorem 4 を証明するためにはまず $C_\chi(h,q)$ が恒等的に 0 でないことを示さなければならない．しかしこれは (2.1) 式，及び $F_\chi(1)\neq 0$ より容易に得られる．あとは [5, Theorem 13.6] の手法を用いると Theorem 4 を示すことができる．

次に Theorem 5 の証明について考える．まず，$X\ge q_1$ と仮定しても十分であることに注意をする．X を十分大なる数とする．さらに $N=X^7$, $D_l=l^2XL^{-8}$, $L=\log X$ とおく．[7] および [2] の手法を用いると $\delta=1$ に対して

$$\int_1^X Q(x;h/q)dx = \frac{\pi^{-3/2}}{\sqrt{2}}(qq_1)^{1/2}X^{5/2}U_1 + O((qq_1)^{3/2}X^2) + O((qq_1)^{2+\varepsilon}X)$$

が得られる．U_1 は次で定義される関数である：

$$U_1 = \sum_{l\le X^3L^4} e(\bar{h}\bar{k}l/q)M_{\bar{\chi},\chi}(l)S(X,l) + \sum_{l\le X^3L^4} e(-\bar{h}\bar{k}l/q)M_{\chi,\bar{\chi}}(l)S(X,l),$$

ここで，$g(z)=J_{3/2}(z)-4J_{5/2}(z)$, $\theta_{m,n}=4\pi(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{X/qq_1}$ であり ($J_\nu(z)$ は order ν の Bessel 関数である)，また，$S(X,l)$ は次の積分とする：

$$S(X,l) = \int_{D_l}^{N}(y(y+l))^{-3/4}g(\theta_{y+l,y})dy.$$

さらに，$\delta=k$ については同様の考察により

$$\int_1^X Q(x;h/q)dx = \frac{\pi^{-3/2}}{\sqrt{2}}(qq_1)^{1/2}X^{5/2}U_2 + O((qq_1)^{3/2}X^2) + O((qq_1)^{2+\varepsilon}X)$$

となる．ここで U_2 は次で定義される関数である：

$$U_2 = \sum_{l\le X^3L^4} e(\bar{h}l/q)M_{\chi,\bar{\chi}}(l)S(X,l) + \sum_{l\le X^3L^4} e(-\bar{h}l/q)M_{\bar{\chi},\chi}(l)S(X,l).$$

この2つの表示式を更に変形する．そのために，次の関数 $U(\chi_1, \chi_2; a)$ について考える：

$$U(\chi_1, \chi_2; a) = \sum_{l \le X^3 L^4} e(al/q) M_{\chi_1,\chi_2}(l) S(X, l),$$

ここで a は固定された整数とする．$S(X,l)$ 中の積分に関して $\omega = 4\pi(\sqrt{y+l} - \sqrt{y})\sqrt{X/qq_1}$ と変数変換を行う．この変数変換を行い，主要項の積分と和の入れ替えを行うと

$$U(\chi_1, \chi_2; a) = (qq_1)^{1/2} X^{-1/2} \int_{2\pi(qq_1)^{-1/2}X^{-3}}^{2\pi(qq_1)^{-1/2}L^4} g(\omega) \sum_{l \le (2\pi)^{-1}(qq_1)^{1/2}\omega X^3} e(al/q) M_{\chi_1,\chi_2}(l) l^{-1} d\omega$$
$$+ O((qq_1)^{3/2} X^{-5/2+\varepsilon}) + O(X^{-3/2} L^{12} \log^2 k)$$

を得る．ここで，(4.4) 式 と不等式 $g(\omega) \ll \min(1, \omega^{-2})$ を用いると

$$U(\chi_1, \chi_2; a)$$
$$\ll (qq_1)^{1/2} X^{-1/2} \log X (\log\log X)^2 \log^2 k + (qq_1)^{3/2} X^{-5/2+\varepsilon} + X^{-3/2} L^{12} \log^2 k$$

なる評価が得られる．この評価と上記の $\int_1^X Q(x; h/q)dx$ の表示を組み合わせると Theorem 5 は直ちに従うことになる．

References

[1] T. Estermann, On the representation of a number as the sum of two products, Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1930), 123–133.

[2] J. Furuya, Mean square of an error term related to a certain exponential sum involving the divisor function, in "Number Theory and its Applications", S. Kanemitsu-K. Györy (eds.), Devel. in Math. Vol **2**, Kluwer 1999, pp 111–127.

[3] J. Furuya, On exponential sums involving the ideal counting function in quadratic number fields, preprint.

[4] M. N. Huxley and N. Watt, The number of ideals in a quadratic field, Proc. Indian. Acad. Sci. Math. Sci. **104** (1994), 157–165.

[5] A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[6] M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Tata Lecture Note **80**, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, (1987).

[7] Y. K. Lau and K. M. Tsang, Mean square of the remainder term in the Dirichlet divisor problem, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), 75–92.

[8] T. Meurman, On the mean square of the Riemann zeta-function, Quart. J. Math **38** (2) (1987), 337–343.

[9] W. Müller, On the asymptotic behaviour of the ideal counting function in quadratic number fields, Mh. Math. **108** (1989), 301–323.