数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 195-205

保型 L-関数の族の universality theorem

慶応大理工　名越弘文 (Hirofumi Nagoshi)
Department of Mathematics, Keio University

1. 序論

1975 年に、Voronin [Vo] が、リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ $(s=\sigma+it)$ に対して、Universality Theorem と呼ばれる結果を発表した。それ後、様々な研究者によって、この結果の拡張や別証がなされたが、今では、リーマン・ゼータ関数の Universality Theorem とは、例えば、次のように述べることが出来る。

Theorem 1.1. 任意に、帯領域 $D=\{s\,|\,\frac{1}{2}<\mathrm{Re}(s)<1\}$ 内の単連結なコンパクト集合 K と、K の内部で正則かつ K 上零点を持たないような K 上連続関数 $h(s)$ と、正数 $\varepsilon>0$ を与える。そのとき、

$$\max_{s\in K}|\zeta(s+it)-h(s)|<\varepsilon$$

となる t が存在する。より詳しくは、

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}m\{t\in[0,T]\,|\,\max_{s\in K}|\zeta(s+it)-h(s)|<\varepsilon\}>0$$

が成り立つ。ここで、m は、$\mathbb{R}$ 上の普通のルベーグ測度である。

この定理は、$\zeta(s)$ を D 上で虚軸方向に平行移動させることによって、比較的弱い条件の勝手な関数を K 上で一様に ε-近似させることができるというもので、K 上の関数集合における $\{\zeta(s+it)\,|\,t\in\mathbb{R}\}, s\in K$ のエルゴード的な性質を意味する。実際、定理の証明においては、素数に渡る無限次元トーラス $\prod_p S^1$ において、各成分で $\log p$ だけ回転させることが、エルゴード的になることが、一つのキーになっていて、オイラー積表示 $\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}, \mathrm{Re}(s)>1$ が重要な役割を果たす。証明の参考文献としては、[KV] や [La]。

この種の結果が、他の関数に対しても成立するかは興味の対象であるが、" 具体的（形式的でない）" な関数としては、今までのところ、Dirichlet の L-関数 ([Ba] [Go] 等) Dedekind ゼータ関数 ([Re])、Hecke 指標に対する L-関数 ([Mi1] [Mi2])、ある種の Lerch ゼータ関数 ([LM2] 等)、$SL(2,\mathbb{Z})$ の正則 Hecke eigen cusp form に付随する L 関数 ([LM1]) などのゼータ関数や L-関数と呼ばれる数論的関数に関して成立が知られているが（その他、[La] や [KV] にある文献を参照して下さい)、それらの証明においては、各々、何らかの数論的事実を使っている。

さて、以上の結果はすべて、パラメータ t を動かしたときの様子であり、いわゆる t-aspect と呼ばれる観点である。今まで、Universality Theorem の研究では t-aspect

に関する研究が主に行なわれており、それ以外の aspect に関しては、[Em] と [Go] において、mod$q$ の Dirichlet 指標 χ に関する q-aspect に関して研究されたものしか知られていなかった。今回、t-aspect 以外の aspect の例として、GL(2) の保型 L 関数について、重み k, レベル N, ラプラシアンの固有値 λ の 3 つの aspect について、Universality Theorem を得たので、それを紹介する。

Section 2 において、今回の主結果を述べ、Section 3 以降において、証明の概略を述べていくことにする。

2. 設定と主結果

まずはじめに、正則 Hecke eigen cusp forms に付随する L 関数の族における、2 つの aspect についての結果を述べる。

以下、k は偶数、N は素数を表すことにする。今、$\Gamma_0(N)$ に関する重さ k の正規化された正則 newform f を取ってくる ([AL])。ここで、cusp form f の無限遠点でのフーリエ展開を $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)e^{2\pi inz}$ としたとき (f が newform なら $a_f(1)\neq 0$ である)、正規化された f とは、$a_f(1)=1$ なるものを表す。Hecke 作用素 T_n に対して、$T_nf=\widehat{\lambda_f}(n)f$ のとき、$\lambda_f(n):=\widehat{\lambda_f}(n)/n^{\frac{k-1}{2}}$ と置くと、Ramanujan 予想の成立により、$\lambda_f(p)\in\Omega=[-2,2]$ (p は素数) である。このとき、f に付随する L 関数は、

$$L(s,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{\lambda_f(p)}{p^s}+\frac{\chi_0(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}, \quad \mathrm{Re}(s)>1$$

と定義されるのであった。ここで、χ_0 は、自明な Dirichlet 指標 mod$N$ である。よく知られているように、$L(s,f)$ は、全平面に解析接続され、ある関数等式を持つ。

さて、次の 2 つの L-関数の族を考える。

(I) $\mathcal{L}_k=\{L(s,f)\mid f\in\mathcal{F}_k\}$, as $k\to\infty$。ここで、$\mathcal{F}_k$ は、$\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$ に関する重さ k の正規化された正則 Hecke eigen cusp forms 全体を表す。

(II) $\mathcal{L}_N=\{L(s,f)\mid f\in\mathcal{F}_N\}$, as $N\to\infty$。ここで、$\mathcal{F}_N$ は、$\Gamma=\Gamma_0(N)$ に関する重さ k（固定する）の正規化された正則 newform 全体を表す。

これら 2 つの aspect について、今回、次の結果を得た。

Theorem 2.1. 任意に、帯領域 $D=\{s\mid \frac{1}{2}<\mathrm{Re}(s)<1\}$ 内の単連結なコンパクト集合 K と、K の内部で正則かつ K 上零点を持たないような K 上連続関数 $h(s)$ と、正数 $\varepsilon>0$ を与える。そのとき、

$$\text{(1)} \qquad \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{\sharp\mathcal{F}_k}\sharp\{f\in\mathcal{F}_k\mid \max_{s\in K}|L(s,f)-h(s)|<\varepsilon\}>0,$$

$$\text{(2)} \qquad \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{\sharp\mathcal{F}_N}\sharp\{f\in\mathcal{F}_N\mid \max_{s\in K}|L(s,f)-h(s)|<\varepsilon\}>0$$

が成立する。

この系として、次が直ちに成り立つ。

Corollary 2.1. （値分布）D 内の点 s_0 を勝手に取ってくる。そのとき、L-関数達の s_0 での値の集合 $\{L(s_0,f)\,|\,f\in\mathcal{F}_k\},\{L(s_0,f)\,|\,f\in\mathcal{F}_N\}\subset\mathbb{C}$ は、それぞれ、$k\to\infty$,$N\to\infty$ のとき、$\mathbb{C}$ において稠密となる。

Corollary 2.2. *(Non-vanishing)* D 内の任意の単連結コンパクト集合 K を取ってくる。そのとき、K 上で $L(s,f)\neq 0$ となる $f\in\mathcal{F}_k$ と $f\in\mathcal{F}_N$ が、それぞれ、k と N が十分大きいならば存在し、また、それら全体は、$k,N\to\infty$ で正の下極限密度を持つ。

次に、モジュラー面上の非正則 cusp forms に関して、ラプラシアンの固有値 $\lambda_j(j=1,2,\cdots)$ をパラメータと見たとき、付随する L-関数達の族についての Universality Theorem を述べる。

まず、設定であるが、$\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$ として、モジュラー面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ 上の L^2-空間において、ラプラシアン $\triangle$ と Hecke 作用素 $T_n\,(n=1,2,\cdots)$ が、

$$\begin{cases}\triangle\varphi(z)=-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(z),\\ T_n\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{ad=n\\ b\bmod d}}\varphi\left(\frac{az+b}{d}\right)\end{cases}$$

と定義される。これらは互いに可換な自己共役作用素で、ゆえに、これらの $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$ 上での同時固有関数の集合が存在するが、定数関数でなく、特に正規化したもの（フーリエ係数に関して）の全体を、$\mathcal{C}_\Gamma=\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ と表すことにする（Maass-Hecke eigenforms）：

$$\begin{cases}\triangle\varphi_j(z)=\lambda_j\;\varphi_j(z),\quad \lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\cdots,\\ T_n\varphi_j(z)=\lambda_j(n)\;\varphi_j(z).\end{cases}$$

また、これら正規化した固有関数 $\varphi_j(z)$ に対応する L-関数を、$L(s,\varphi_j)$ と表すことにする：

$$L(s,\varphi_j)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_j(n)n^{-s}=\prod_p\left(1-\lambda_j(p)p^{-s}+p^{-2s}\right)^{-1},\quad \mathrm{Re}(s)>1.$$

今回、考察する 3 つ目の L-関数の族は、

(III) $\mathcal{L}_\lambda=\{L(s,\varphi_j)\,|\,\lambda_j\le\lambda$ なる $\varphi_j(z)\in\mathcal{C}_\Gamma\}$

であり、これに関して、次の結果を得た。量子カオス的な観点からしても興味深いと思われる。

Theorem 2.2. 任意に、$D=\{s\in\mathbb{C}\,|\,\frac{1}{2}<\mathrm{Re}(s)<1\}$ 内の単連結なコンパクト集合 K と、K の内部で正則かつ K 上零点を持たないような K 上連続関数 $f(s)$ と、正数 $\varepsilon>0$ を取ってくる。そのとき、

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\frac{\sharp\{\lambda_j\le\lambda\,|\,\max_{s\in K}|L(s,\varphi_j)-h(s)|<\varepsilon\}}{\sharp\{\lambda_j\le\lambda\}}>0$$

Corollary 2.3. （値分布）D 内の点 s_0 を勝手に取ってくる。そのとき、L-関数達の s_0 での値の集合 $\{L(s_0,\varphi_j)\,|\,\varphi_j(z)\in\mathcal{C}_\Gamma\}\subset\mathbb{C}$ は、$\mathbb{C}$ において稠密となる。

Corollary 2.4. （*Non-Vanishing*）D 内の任意の単連結コンパクト集合 K を取ってくる。そのとき、K 上で $L(s,\varphi_j)\neq 0$ となる $\varphi_j(z)\in\mathcal{C}_\Gamma$ 達は、$\mathcal{C}_\Gamma$ において正の下極限密度を持つ。

3. HECKE 固有値の一様分布

このSection以降に、Theorem 2.1とTheorem 2.2の証明の概略を述べていく。その証明においては、[Go] [La] [KV] 等を参考にしており、この先の文章でこれらの文献の内容と重複する部分もあるが、なるべく自己完結するように詳しく書くようにしていく。

はじめに、Hecke固有値の一様分布性に関する結果を紹介する。まず、$q>1$ とし、$n_q=q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\,(>2)$ と置き、$\Omega=[-n_q,n_q]$ 上の測度 m_q を

$$dm_q(x)=\begin{cases}\frac{q+1}{n_q^2-x^2}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx & \text{if } |x|<2,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義する。また、$X_n(x),\,n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$ を、第2種Chebychev多項式、すなわち、

$$X_n(x)=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}\qquad\text{when } x=2\cos\theta\,(0\le\theta\le\pi)$$

とし（$X_0=1,X_1=x,X_2=x^2-1,X_3=x^3-2x,\cdots$）、多項式 $X_{n,q}(x),n\in\mathbb{N}_0$ を

$$X_{n,q}(x):=X_n(x)-q^{-1}X_{n-2}(x)\tag{3}$$

(where we set $X_n(x):=0$ for $n<0$) で定義する。そのとき、

$$\int_\Omega X_{n,q}(x)dm_q(x)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n>0)\end{cases}\tag{4}$$

（$\Omega:=[-2,2]$）が示せれ、$\{X_n(x)\,|\,n\in\mathbb{N}_0\}$ は、Ω 上で測度 m_q に関する直交多項式系となっている。以上の設定のもとで、Hecke固有値の一様分布に関して、次の定理が成り立つ。証明は、trace formulaと $\{T_p\}$ の乗法性を使う。[CDF] では k-aspect, [Se] では k,N-aspect、[Sa] では λ-aspect を扱っている。

Theorem 3.1. 今、$\{p_1,p_2,\cdots,p_\ell\}$ を相異なる ℓ 個の素数の集合として、$X=\prod_{i=1}^{\ell}\Omega_{p_i}$ 上の測度 m を $dm(\vec{x})=\prod_{i=1}^{\ell}dm_{p_i}(x_i),\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_\ell)\in X$ で定める。そのと

き、X 上の任意の連続関数 $g(\vec{x})$ に対して、次が成り立つ。

(5)
$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sharp\mathcal{F}_k}\sum_{f\in\mathcal{F}_k} g(\overrightarrow{\lambda_f}) = \int_X g(\vec{x})dm(\vec{x}),$$

ここで、$\overrightarrow{\lambda_f} := (\lambda_f(p_1),\lambda_f(p_2),\cdots,\lambda_f(p_\ell)), f\in\mathcal{F}_k$,

(6)
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sharp\mathcal{F}_N}\sum_{f\in\mathcal{F}_N} g(\overrightarrow{\lambda_f}) = \int_X g(\vec{x})dm(\vec{x}),$$

ここで、$\overrightarrow{\lambda_f} := (\lambda_f(p_1),\lambda_f(p_2),\cdots,\lambda_f(p_\ell)), f\in\mathcal{F}_N$,

(7)
$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sharp\{\lambda_j\le\lambda\}}\sum_{\lambda_j\le\lambda} g(\overrightarrow{\lambda_j}) = \int_X g(\vec{x})dm(\vec{x}),$$

ここで、$\overrightarrow{\lambda_j} := (\lambda_j(p_1),\lambda_j(p_2),\cdots,\lambda_j(p_\ell)), j=1,2,\cdots$.

4. DENSENESS LEMMA

以下の文章においては、Theorem 2.1 等の出てくる単連結コンパクト集合 K を、頂点 $\sigma_1\pm iA, \sigma_2\pm iA$, $(\frac{1}{2}<\sigma_1<\sigma_2<1)$ の開長方形 U に含ませておく。また、この先に出てくる文字 c は、U または K で定まるある定数を表すとし（それらの c は、お互い、異なるかもしれない）、記号 $\ll$ の implied constant は、U または K のみに依存するか絶対定数である。

今、$\pi(\rho)$ で ρ 以下の素数の個数、p_i で i 番目の素数を表すとする。また、$\hat{\theta}=\widehat{\theta_\rho}=\big(\theta(p_1),\theta(p_2),\cdots,\theta(p_{\pi(\rho)})\big)$, $\theta(p_i)\in\Omega$ に対して、

(8)
$$L_\rho(s,\hat{\theta}) = \prod_{p\le\rho}\left(1-\frac{\theta(p)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

と置く。この Section では、次の Proposition を準備する。

Proposition 4.1. K を D 内の単連結コンパクト集合、$h(s)$ を K 上で連続で K の内部で正則な関数とする。そのとき、任意の小さな $\varepsilon>0$ に対して、ある ρ_1 があって、$\rho\ge\rho_1$ ならば、

$$\max_{s\in K}\left|h(s)-L_\rho(s,\hat{\theta})\right|<\varepsilon$$

となる $\hat{\theta}$ がある。

この証明には、まず、Riesz の表現定理と Separation Theorem (Hahn-Banaha Theorem の 1 バージョン) から導かれる次の Lemma が基本である。

Lemma 4.1. $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ を実ヒルベルト空間 H の点列で、次を満たすとする：

(9)
$$\sum_{m=1}^{\infty}|(x_m,x)|=\infty,\qquad \textit{for any } x(\neq 0)\in H$$

((,) は、H における内積)。そのとき、各 n に対して、

$$M_n = \left\{ \sum_{m=n}^{n'} a_m x_m \,\middle|\, a_m \in [-1,1], n' \geq n \right\}$$

は、H の中で稠密。

我々の設定では、H としては、空間 $L^2(U)$ の多項式で張られる部分空間の閉包 $P(U)$ を考える。ここで、内積は、

$$(g_1(s), g_2(s)) = \mathrm{Re} \int_U g_1(s)\overline{g_2(s)} d\sigma dt, \quad g_1, g_2 \in L^2(U)$$

である。Lemma 4.1 において、x_m として、

$$f_{p_m}(s) = \frac{1}{p_m^s}$$

を取り、Paley-Wiener の定理や [Lu, Theorem 6.4.14] (素数定理と Bernstein の定理による) を使うことにより、条件 (9) を満たすことを示すことが出来る。そのようにして、Lemma 4.1 により、多項式を $f_{p_m}(s)$ を使って近似してやることができ、その上で、Mergelyan の定理 (Weierstrass の近似定理の複素関数版) や下の Lemma 4.2 等を用いて、Proposition 4.1 は証明される。

Lemma 4.2. $K(\subset \mathbb{C})$ を開長方形 U のコンパクト部分集合とし、関数 $f(s)$ が、U 上で正則であるとする。そのとき、

$$\int_U |f(s)| d\sigma dt \leq \varepsilon \text{ ならば、} \max_{s \in K} |f(s)| \leq c\varepsilon.$$

$$\int_U |f(s)|^2 d\sigma dt \leq \varepsilon \text{ ならば、} \max_{s \in K} |f(s)| \leq c\sqrt{\varepsilon}.$$

5. L 関数に関する命題

この Section では、主結果の証明に必要となる L 関数に関するいくつかの事実を用意する。この講究録では、ページ数の関係上、特に k-aspect について、説明することにする。

Proposition 5.1. $2 \leq \rho \leq \nu$ として、$p \leq \rho$ なる素数 p に対して、$\theta_p \in (-2,2)$ を固定する。小さな $d = d(\rho)$ に対して、

$$|\lambda_f(p) - \theta_p| \leq d, \quad \text{for all } p \leq \rho \tag{10}$$

なる $f \in \mathcal{F}_k$ 全体を $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho, d, k)$ で表し、$B = \prod_{i=1}^{\pi(\rho)} [\theta_p - d, \theta + d] \subset \Omega^{\pi(\rho)}$ そのとき、

$$\sum_{f \in \mathcal{D}} \int_U |\log L_\rho(s,f) - \log L_\nu(s,f)| d\sigma dt \ll \mathcal{F}_k \cdot \int_B dm(\vec{x}) \cdot \rho^{\frac{1}{2} - \sigma_1}. \tag{11}$$

以下、Proposition 5.1 の証明の概略を述べていく。

$$\log L_\rho(s,f) - \log L_\nu(s,f) = \sum_{\rho<p\le\nu} \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \sum_{\rho<p\le\nu}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\alpha_f(p)^m + \overline{\alpha_f(p)}^m}{mp^{ms}} \tag{12}$$

($\lambda_f(p) = \alpha_f(p) + \overline{\alpha_f(p)}$ とする)。この右辺の第一式を $S_1(s,f)$, 第二式を $S_2(s,f)$ と置き、まず、$\sum_{f\in\mathcal{D}} |S_1(s,f)|$ を評価していく。今、$f \in \mathcal{F}_k$ に対して、$\omega_f = 1/ < f, f >$ (ここで、$<,>$ は、Petersson 内積）とすると、コーシーの不等式より、

$$\sum_{f\in\mathcal{D}} |S_1(s,f)| \le \left(\sum_{f\in\mathcal{D}} \omega_f^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{f\in\mathcal{D}} \omega_f |S_1(s,f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

関数 $\xi_i(x_i), x_i \in \Omega$ を、$x_i \in [\theta(p_i)-d, \theta(p_i)+d]$ なら $\xi_i(x_i) = 1$、その外では、0 に急減少して、$x_i \notin [\theta(p_i)-d-\varepsilon_1, \theta(p_i)+d+\varepsilon_1]$ (ε_1 は固定された小さな正数）なら $\xi_i(x_i) = 0$ なる滑らかな関数と定義し、$\xi(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} \xi_i(x_i), \vec{x} = (x_1, \cdots, x_\ell) \in \Omega^\ell$ とおく ($\ell := \pi(\rho)$)。ℓ-変数多項式 $X_{\vec{n},\vec{p}}(\vec{x}) := \prod_{i=1}^{\ell} X_{n_i,p_i}(x_i)$, $\vec{n} = (n_1, \cdots, n_\ell)$, $\vec{p} = (p_i, \cdots, p_\ell)$ と置くと、(4) より、$\{X_{\vec{n},\vec{p}}(\vec{x}) \mid \vec{n} \in \mathbb{N}_0^\ell\}$ は、Ω^ℓ 上で、測度 $dm(\vec{x})$ に関して直交多項式系となる。フーリエ級数の理論（例えば、[Ta]) より、

$$\xi(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}} c(\vec{n}) X_{\vec{n},\vec{p}}(\vec{x}) \tag{14}$$

とフーリエ展開できる。

$$c(\vec{0}) = \int_{\Omega^\ell} \xi(\vec{x}) dm(\vec{x}) = \int_B dm(\vec{x}) + \varepsilon_1' \tag{15}$$

で、ε_1' を定める。$\varepsilon_1 \to 0$ なら、$\varepsilon_1' \to 0$ である。
さて、$\xi_f := \xi(\overrightarrow{\lambda_f})$, $\overrightarrow{\lambda_f} = (\lambda_f(p_1), \cdots, \lambda_f(p_\ell))$ と置くと、

$$0 \le \xi_f^4 \le \xi_f^2 \le \xi_f, \quad f \in \mathcal{F}_k, \tag{16}$$

$$1 = \xi_f^2 = \xi_f, \quad f \in \mathcal{D} \tag{17}$$

が成り立つ。各 $\xi_i(x_i)$ は滑らかに取ったので、$\vec{x} \in \Omega^\ell$ に関して一様に (14) の級数は収束することに注意すると、任意の $\varepsilon_2 > 0$ に対して、十分大きい r で、

$$\left| \xi_f - \sum_{0\le n_1,\cdots,n_\ell \le r} c(\vec{n}) X_{\vec{n},\vec{p}}(\overrightarrow{\lambda_f}) \right| < \varepsilon_2 \tag{18}$$

とできる。以下、そんな r を一つ固定する。このとき、(16) (17) (18) より、

$$\sum_{f\in\mathcal{D}}\omega_f|S_1(s,f)|^2 \le \sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f\xi_f^2|S_1(s,f)|^2$$

$$\le 2\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f\left|\sum_{0\le n_1,\cdots,n_\ell\le r} c(\vec{n})X_{\vec{n},\vec{p}}(\overrightarrow{\lambda_f})\right|^2|S_1(s,f)|^2 \tag{19}$$

$$+\,2\varepsilon_2^2\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f|S_1(s,f)|^2. \tag{20}$$

この最終式を計算するために、Petersson formula から導かれる次の結果を用いる (see [Iw2])。

Lemma 5.1. 重さ $k>2$ とする。そのとき、任意の複素数 b_n に対して、次が成り立つ。

$$\frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}}\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f|\sum_{n\le x}b_n\lambda_f(n)|^2=(1+O(x))\sum_{n\le x}|b_n|^2,$$

ここで、*the implied constant is absolute.*

このLemma より、式 (20) 中の和は、

$$\le\frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}(1+O(\nu))\,\rho^{1-2\sigma_1}.$$

次に、式 (19) 中の和を計算するが、この講究録では見やすくするために、$\ell=1$ の場合を述べてみる。つまり、

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f\left|\sum_{n_1=0}^{r}c(n_1)X_{n_1,p_1}(\lambda_f(p_1))\right|^2\left|\sum_{\rho<p\le\nu}\frac{\lambda_f(p)}{p^s}\right|^2$$

$$=\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f\left|\sum_{\rho<p\le\nu}\left(\sum_{n_1=0}^{r}c(n_1)X_{n_1,p_1}(\lambda_f(p_1))\right)\frac{\lambda_f(p)}{p^s}\right|^2 \tag{21}$$

を調べる。ここで、(3) を使って、

$$\sum_{n_1=0}^{r}c(n_1)X_{n_1,p_1}(\lambda_f(p_1))=\sum_{n_1=0}^{r}b(n_1)X_{n_1}(\lambda_f(p_1))=:\xi_{f,r}$$

と、ある $b(n_1)$ で書き換えておき、$X_{n_1}(\lambda_f(p_1))=\lambda_f(p_1^{n_1})$ (see [Se]) と Lemma 5.1 を使うと、(21) は、

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f\left|\sum_{\rho<p\le\nu}\sum_{n_1=0}^{r}b(n_1)\frac{\lambda_f(p_1^{n_1}p)}{p^s}\right|^2$$

$$\le\frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}(1+O(k))\sum_{n_1=0}^{r}|b(n_1)|^2\rho^{1-2\sigma_1}$$

(k は、十分大)。Lemma 5.1 より、

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f|\xi_{f,r}|^2=\frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}(1+O(k))\sum_{n_1=0}^{r}|b(n_1)|^2$$

が分かり、また、(16) より

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\omega_f|\xi_{f,r}|^2\\ &\le\lim_{r\to\infty}\left(\omega_f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\xi_{f,r}\right)^{ha}\end{aligned}$$

となるので、以下、$\lim_{r\to\infty}\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\xi_{f,r}$ を計算する。$\xi_{f,r}$ の定義より

$$\frac{1}{\sharp\mathcal{F}_k}\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\xi_{f,r}=\sum_{n_1=0}^{r}\frac{c(n_1)}{\sharp\mathcal{F}_k}\sum_{f\in\mathcal{F}_k}X_{n_1,p_1}(\lambda_f(p_1))$$

で、Theorem 3.1（$g(\vec{x})$ に $X_{\vec{n},\vec{p}}(\vec{x})$ を適用）と (4) により、

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\xi_{f,r}\ll\sharp\mathcal{F}_k\cdot c(\vec{0}),\qquad(k\to\infty)$$

($\xi(\vec{x})$ は、滑らかより、$\sum_{n_1=0}^{\infty}c(n_1)$ は収束することに注意）が分かる。

そして、[HLG] による ω_f の評価、$\sum_{f\in D}1\ll\sharp\mathcal{F}_k\int_B dm(\vec{x})$ (by Theorem 3.1) に注意して、以上をまとめると（$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ は十分小さくとる)、

$$\sum_{f\in\mathcal{D}}|S_1(s,f)|\ll\sharp\mathcal{F}_k\cdot\int_B dm(\vec{x})\cdot\rho^{\frac{1}{2}-\sigma_1}$$

となる。$\sum_{f\in\mathcal{D}}|S_2(s,f)|$ は、もっと簡単に評価できて、結局、Proposition 5.1 が得られる。 □

この Proposition と Theorem 3.1 と Lemma 4.2 により、次が得られる。

Corollary 5.1. *Proposition 5.1* の設定の元で、

(22) $$\mathcal{E}(\rho,d,k)=\{f\in\mathcal{D}(\rho,d,k)\mid\max_{s\in K}|\log L_\nu(s,f)-\log L_\rho(s,f)|\le c\rho^{\frac{1}{2}-\sigma_1}\}$$

とおく。そのとき、k が十分大きいならば、

(23) $$\frac{\sharp\mathcal{E}(\rho,d,k)}{\sharp\mathcal{F}_k}\ge\frac{1}{2}\int_B dm(\vec{x}).$$

次に、$L(s,f)$ の近似関数等式、Lemma 5.1、$\sharp\mathcal{F}_k\asymp k$ 等を使って、次が得られる。

Proposition 5.2. 任意の $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$ に対して、$\nu>\nu_0(\varepsilon)$, $k>k_0(\varepsilon,\nu)$ ならば、

(24) $$\sum_{f\in\mathcal{F}_k}\int_U|L(s,f)-L_\nu(s,f)|\,d\sigma dt\ll\sharp\mathcal{F}_k\cdot\varepsilon^2.$$

Corollary 5.2. 任意の $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$ を与える。

$$\mathcal{A}=\{f\in\mathcal{F}_k \mid \max_{s\in K}|L(s,f)-L_\nu(s,f)|\le c\varepsilon\} \tag{25}$$

と置くと、$\nu>\nu_0(\varepsilon)$, $k>k_0(\varepsilon,\nu)$ に対して、$\sharp\mathcal{A}\ge(1-\varepsilon)\sharp\mathcal{F}_k$.

6. 主結果の証明

このSectionでは、主結果Theorem 2.1 (1) の証明を仕上げる。

今、任意の小さな $\varepsilon_1>0$ を与えると、Proposition 4.1 より、ρ が十分大きければ、ある $\hat{\theta}$ があって、

$$\max_{s\in K}|L_\rho(s,\hat{\theta})-h(s)|<\varepsilon_1 \tag{26}$$

と出来る。ここで、関数 $L_\rho(s,\hat{\theta})$ の $\hat{\theta}$ に関する連続性より、ある $\delta=\delta(e_1,\rho)(<1/100)$ があって、

$$\max_{s\in K}|L_\rho(s,f)-L_\rho(s,\hat{\theta})|<\varepsilon_1 \quad \text{if } |\theta(p)-\lambda_f(p)|<\delta \tag{27}$$

である。

今、Corollary 5.1 において、$d=\delta$ に取ると、$f\in\mathcal{E}$ に対しては、

$$\frac{L_\nu(s,f)}{L_\rho(s,f)}=1+O(\log L_\nu(s,f)-\log L_\rho(s,f))$$

$$\max_{s\in K}|L_\rho(s,f)|\le 2\varepsilon_1+\max_{s\in K}|h(s)| \quad \text{(by (26) (27))}$$

より、十分大きな k に対して、

$$\max_{s\in K}|L_\nu(s,f)-L_\rho(s,f)|\ll c_h\rho^{\frac{1}{2}-\sigma} \qquad (c_h:=1+\max_{s\in K}|h(s)|)$$

なる $f\in\mathcal{E}$ は、$\sharp\mathcal{E}\ge\frac{1}{2}\sharp\mathcal{F}_k\int_B dm(\vec{x})$ であることが分かる。また、Corollary 5.2 において、$\varepsilon=\frac{1}{3}\int_B dm(\vec{x})$ と取ると、$\sharp\mathcal{A}/\sharp\mathcal{F}_k\ge 1-\frac{1}{3}\int_B dm(\vec{x})$ なる $f\in\mathcal{A}$ に対して、

$$\max_{s\in K}|L(s,f)-L_\nu(s,f)|\ll\frac{1}{3}\int_B dm(\vec{x})$$

である。ゆえに、

$$\max_{s\in K}|L(s,f)-L_\rho(s,f)|\ll c_h\rho^{\frac{1}{2}-\sigma}+\frac{1}{3}\int_B dm(\vec{x}) \tag{28}$$

なる $f\in\mathcal{F}_k$ は、k が十分大きいと、$\frac{1}{10}\sharp\mathcal{F}_k\int_B dm(\vec{x})$ 個以上ある。以上より、

$$c_h\rho^{\frac{1}{2}-\sigma}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi(\rho)}<\varepsilon_1$$

となるぐらい十分大きな ρ と適当な ν に対して、(26) (28) より、主結果を得る。 □

REFERENCES

[AL] A. Atkin, J. Lehner: Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185** (1970), 134–160.

[Ba] B. Bagchi: A joint universality theorem for Dirichlet L-functions, Math. Z. **181** (1982), 319–334.

[CDF] J. B. Conrey, W. Duke, D. W. Farmer: The distribution of the eigenvalues of Hecke operators, Acta Arith. **78** (1997), 405–409.

[DI] J. Deshouillers, H. Iwaniec: Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. Invent. Math. **70** (1982), 219–288.

[Em] K. M. Eminyan: χ-universality of the Dirichlet L-function, Mat. Zametki **47** (1990), 132–137 (Russian) =Math. Notes **47** (1990), 618–622

[Go] S. M. Gonek: Analytic properties of zeta and L-functions, PhD. Thesis, University of Michigan, 1979.

[Iw1] H. Iwaniec: The spectral growth of automorphic L-functions. J. reine angew. Math. **428** (1992), 139–159.

[Iw2] H. Iwaniec: Topics in Classical Automorphic Forms, Graduate Studies in Math. 17, American Mathematical Society, 1997.

[HLG] J. Hoffstein, P. Lockhart: Coefficients of Maass forms and the Siegel zero. With an appendix by Dorian Goldfield, Hoffstein and Daniel Lieman. Ann. of Math. (2) 140 (1994), no. 1, 161–181.

[KV] A. A. Karatsuba, S. M. Voronin: The Riemann Zeta-Function, Walter de Gruyter, 1992.

[La] A. Laurinčikas: Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, 1996.

[LM1] A. Laurinčikas, K. Matsumoto: The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions, Nagoya Math. J. **157** (2000), 211–227.

[LM2] A. Laurinčikas, K. Matsumoto: The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, to appear in Acta Arith.

[Lu] W. Luo: On the spectral mean value of linear forms in twisted Fourier coefficient of Maass cusp forms, Acta Arith. **70** (1995), 377–391.

[Ma] K. Matsumoto: The mean values and the unversality of Rankin-Selberg L-functions, preprint.

[Mi1] H. Mishou: The universality theorem for L-functions associated with ideal class characters, preprint.

[Mi2] H. Mishou: The universality theorem for Hecke L-functions, preprint.

[Mo] 本橋 洋一: リーマンゼータ函数と保型波動, 共立出版

[Re] A. Reich: Werteverteilung von Zetafunktionen, Arch. Math. **34** (1980), 440–451.

[Sa] P. Sarnak: Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators, In: Analytic Number Theory and Diophantine Problems, Progr. Math. **70** (1987), 321–331, Birkhauser.

[Se] J. P. Serre: Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 75–102.

[Ta] 高橋 陽一郎: 実関数と Fourier 解析 1, 岩波書店

[Vo] S. M. Voronin: Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975), 475–486 (in Russian) = Math. USSR Izv. **9** (1975), 443–453.