数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 229-234

ゼータ関数値のラマヌジャン急収束級数

京大・数理研　吉元 昌己* (Masami Yoshimoto)
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.

1 modular relation と関数等式の関係

本稿では, 関数等式を持つ Dirichlet 級数とそれに対応する modular relation との関係を紹介し, その応用例として Ramanujan's formula を示し, ゼータ関数の特殊値, 特に $\zeta(3)$ の急収束級数表示と実際の計算結果を示します. [1]

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を複素数列, $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ を正の無限大に発散する単調増加列とし, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ $(s=\sigma+it)$ を $\{a_n\}$, $\{\lambda_n\}$ 及び $\{b_n\}$, $\{\mu_n\}$ で生成される Dirichlet 級数とし, それぞれある半平面で絶対収束するものとします:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^s} \quad \sigma>\kappa_1, \\ \psi(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\mu_n^s} \quad \sigma>\kappa_2. \end{aligned}$$

更に $\varphi(s)$ と $\psi(s)$ との間に関数等式

$$\Delta(s)\varphi(s)=\Delta(\delta-s)\psi(\delta-s), \quad \Delta(s)=\prod_{j=1}^{k}\Gamma(\alpha_j s+\beta_j) \tag{1}$$

が成立すると仮定します. 一般に

$$A^{-s}\Delta(s)\varphi(s)=cA^{-(\delta-s)}\Delta(\delta-s)\psi(\delta-s), \tag{2}$$

$(A>0,\ c\text{: constant})$ のタイプの関数等式が存在した場合に, 上記の $\{b_n\}$ を $\{cb_n\}$ に, $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ を各々 $\{A\lambda_n\}$, $\{A\mu_n\}$ とすることで式 (2) は式 (1) の場合に帰着されるので, 以下関数等式は式 (1) のタイプのみを扱うことにします. 次に $\chi(s)$ を

$$\chi(s)=\begin{cases} \Delta(s)\varphi(s), & \sigma>\kappa_1 \\ \Delta(\delta-s)\psi(\delta-s), & \sigma<\Re\delta-\kappa_2 \end{cases}$$

---

*筆者は財団法人住友財団 (No. 000406) の援助を受けております

[1]詳しくは [4] 参照

で, σ を $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ $(-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty)$ に固定し, $|t| \to \infty$ とするとき

$$\chi(s) = O\left(e^{-\gamma|t|}\right), \quad |t| \to \infty \ (\gamma > 0 : \text{ constant})$$

が成り立つものと仮定します. また $E(x)$ は $\Delta(s)$ を Mellin 変換したもの

$$E(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\kappa)} \Delta(s) x^{-s} ds \tag{3}$$

とし, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ を

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n E(\lambda_n x), \\ \Psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n E(\mu_n x) \end{aligned}$$

とし, また residual function $P(x)$ を

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \chi(s) x^{-s} ds \\ &= \sum_{\Re\delta - \kappa_2 \leq \sigma \leq \kappa_1} \operatorname{Res} \chi(s) x^{-s} \end{aligned}$$

(C は $\chi(s)$ の特異点を全て内部に含む積分路) で定義します.

この時 modular relation

$$\Phi(x) = x^{-\delta}\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) \tag{4}$$

は関数等式 (1) を Mellin 逆変換することで得られますが, 逆に modular relation (4) が与えられていた場合にこれを Mellin 変換することで関数等式 (1) が得られるという, 非常に単純な関係が modular relation と関数等式の間には成り立っています. このことは保型形式とそれに付随する Dirichlet 級数との関係を含んでいます. 実際 $\Delta(s) = \Gamma(s)$ の場合には $E(x) = e^{-x}$ なので, $x = -iz$ (z は上半平面の元) とすると式 (4) は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n z} = (-iz)^{-\delta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\mu_n \frac{-1}{z}} + P(-iz)$$

となり, $z \mapsto \frac{-1}{z}$ の場合に対応しています.

式 (3) で $\Delta(s) = \Gamma(s)$ の場合 $E(x) = e^{-x}$ となりますが, 一般の $\Delta(s)$ の場合 (e.g. $\Delta(s) = \Gamma(\frac{s}{a})$) に $E(x)$ の閉形式 (e.g. $E(x) = e^{-x^a}$) を見つけることが出来れば, $E(x)$ を用いた modular relation の明示式を得ることが出来ます.

2 応用例

この章は, 例 1 で Ramanujan's formula と呼ばれている公式を modular relation の立場で見直し, 例 2 でゼータ関数の特殊値を与える急収束級数表示を使った $\zeta(3)$ の値がどのように真の値に近付くかを見てもらうよう, 第 N 項までの和の値の表[2]を付けました.

[2]計算結果は名古屋大学大学院多元数理科学研究科の谷川先生によるものです

例 1. Ramanujan's formula

Entry 21 (i) ([1, Chapter 14]). α, β を $\alpha\beta = \pi^2$ を満たすものとし, n を非零の整数とする. この時

$$\alpha^{-n}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n+1}\left(e^{2\alpha k}-1\right)}\right\} \tag{5}$$

$$= (-\beta)^{-n}\left\{\frac{1}{2}\zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n+1}\left(e^{2\beta k}-1\right)}\right\}$$

$$-2^{2n}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{B_{2n+2-2k}}{(2n+2-2k)!}\alpha^{n+1-k}\beta^k.$$

が成立する. ここで B_n は n 番目の Bernoulli 数.

証明. $\sigma_z(n) = \sum_{d|n} d^z$ とすると $(\zeta(s)\zeta(s-z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_z(n)n^{-s})$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{-n}(k)e^{-2\pi kz} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n(e^{2\pi kz}-1)}$$

が成り立つので, 式 (5) で $\alpha = \pi z$, $\beta = \pi/z$, $\Re z > 0$ とし式を整理すると, $n \neq 0$ の時 Guinand's formula ([2], Theorem 9, (iv)=[3], Formula (9)) になります:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{-2n-1}(k)e^{-2\pi kz} + (-1)^{n+1}z^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{-2n-1}(k)e^{-2\pi k/z} \tag{6}$$

$$= \frac{(2\pi)^{2n+1}}{2z}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}\frac{B_{2n+2-2k}}{(2n+2-2k)!}z^{2n+2-2k}$$

$$-\frac{1}{2}\zeta(2n+1)\{1+(-1)^{n+1}z^{2n+1}\}.$$

以下式 (5) を示す代わりに式 (6) を証明します.

$n \in \mathbb{Z}$ の時, 関数等式

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+2n+1)$$
$$= (-1)^n(2\pi)^{2n+s}\Gamma(-2n-s)\zeta(-2n-s)\zeta(1-s)$$

が成り立ちます. これは式 (1) で

$$a_k = \sigma_{-2n-1}(k),\ b_k = (-1)^n\sigma_{-2n-1}(k),$$
$$\lambda_k = \mu_k = k,\ \delta = -2n,\ \Delta(s) = \Gamma(s)$$

の場合に相当し, $E(x) = e^{-x}$ なので, modular relation

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{-2n-1}(k)e^{-2\pi kx} = x^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\sigma_{-2n-1}(k)e^{-2\pi k/x} + P(x)$$

が成立し, 最後に $P(x)$ の値が式 (6) の右辺になることは留数定理より簡単に示すことが出

例 2．$\zeta(3)$ の数値計算.

例 1 の Ramanujan's formula や Guinand's formula から以下の結果が導かれる:

$n > 1$ を $n \equiv 3 \pmod 4$ とし、N を自然数とする。この時

$$\begin{aligned}\zeta(n) &= \frac{2^{n-1}\pi^n}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{(n+1)/2}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{2k}B_{n+1-2k}B_{2k}\\ &\quad -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n(e^{2\pi k}-1)}\end{aligned}$$

が成り立つ。更に各 N に対して $1 < K = K(N) < \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} = 1.00187\ldots$ が存在し、

$$\begin{aligned}\zeta(n) &= \frac{2^{n-1}\pi^n}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{(n+1)/2}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{2k}B_{n+1-2k}B_{2k}\\ &\quad -2\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^n(e^{2\pi k}-1)}-2\frac{K}{N^n(e^{2\pi N}-1)}\end{aligned}$$

が成立する。特に

$$\zeta(3) = \frac{7}{180}\pi^3 - 2\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^3(e^{2\pi k}-1)} - 2\frac{K}{N^3(e^{2\pi N}-1)}.$$

今

$$e^{2\pi} = 535.491655524764736503049326\ldots,$$

なので、実際の計算では N を 1 増やすごとに大体 2,3 桁づつ精度が良くなっていく.

以下の数表は上記の式を用いた計算結果ではなく、Guinand's formula (6) を 2 回微分し、式を直した

$$\begin{aligned}\zeta(3) &= \frac{2}{45}\pi^3 - 8\pi^2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2\pi n}+\frac{1}{(2\pi n)^2}\right)\frac{1}{e^{2\pi n}-1}\right.\\ &\quad \left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(3+\frac{1}{2\pi n}\right)\frac{1}{(e^{2\pi n}-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\frac{1}{(e^{2\pi n}-1)^3}\right\}\end{aligned}$$

の有限和の計算結果です.

N	
1	1.2022065887877508785217882168751366747171412808536628826630092228199
2	1.2020570843852219839795484450361231126958177256545882943684887575589
3	1.202056903409956496915716097152268932383667831699342604857027051274
4	1.2020569031599652767064402766765748131775525961979695209774135201387
5	1.2020569031595948596255904171366251499381749807958963047939024505913
6	1.202056903159594286315355702083045629582135339915415425132806098328
7	1.2020569031595942854012299995531955210484651498944399278787119059628
8	1.2020569031595942853997406323730182251560378523941942058973226670682
9	1.2020569031595942853997381656568396099615448479099850774802550451086
10	1.2020569031595942853997381615184772935591449746067173431253021360061

11	1.2020569031595942853997381615114620057170475534724579442226737072 72
12	1.20205690315959428539973816151145001145511601325557518654337323474 49

11 1.202056903159594285399738161511462005717047553472457944222673707272

12 1.202056903159594285399738161511450011455116013255575186543373234744 9

13 1.2020569031595942853997381615114499908000832698207424041972352377778 9

14 1.202056903159594285399738161511449990765048723364798136067072843163 1

15 1.202056903159594285399738161511449990764986401567792681265364245471 4

16 1.202056903159594285399738161511449990764986292532363859083389836335 5

17 1.202056903159594285399738161511449990764986292340837097622031834087 3

18 1.202056903159594285399738161511449990764986292340499479871175909170 3

19 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888285286268323 8

20 1.202056903159594285399738161511449990764986292340498881794157122270 7

$N \geq 30$ の時もう少し精度をあげて計算したものです.

30 1.2020569031595942853997381615114499907649862923404988817922715553418 3820
578631309018711310111025721007213302431150458994323774928717723441449 31

31 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186457062400274511119217259705983228721334817478550716303795 8

32 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455875761739186192251602831821919546459379087516464104822 1

33 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873613235979122736851308272098785200056573234731979251 6

34 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873609342333454224462433183718141718276755463213184070 7

35 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873609335270990299858777403912609563517439251631890362 7

36 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873609335258169533751170513639221960118099559693994259 9

37 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873609335258146241582305962310152558278884154976502336 3

38 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873609335258146199234980955548387294543453216657252044 1

39 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873609335258146199157935782854719036717466475698020810 5

40 1.20205690315959428539973816151144999076498629234049888179227155534183820
5786313090186455873609335258146199157795516711382348861412605965991422 3

参考文献

[1] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part II*, Springer Verlag, 1989.

[2] A. P. Guinand, *Functional equations and self-reciprocal functions connected with Lambert series*, Quart. J. Math., Oxford Ser. **15** (1944), 11–23.

[3] A. P. Guinand, *Some rapidly convergent series for the Riemann ξ-function*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **6** (1955), 156–160.

[4] S. Kanemitsu, Y. Tanigawa and M. Yoshimoto, *On rapidly convergent series for the Riemann zeta-values via the modular relation*, preprint.