数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 62-67

金融の現場における一様分布列の応用について

二宮祥一
Syoiti NINOMIYA
Center for Research Advanced Financial Technology
Tokyo Institute of Technology
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo
152-8552
JAPAN
ninomiya@craft.titech.ac.jp
東工大理財工学研究センター

Contents

1

1. 多重数値積分と Monte Carlo 法

a. 多重数値積分問題

b. 台形近似の非現実性

c. Monte Carlo 法

1.a. 多重数値積分問題

f : d 次元単位区間 $[0,1)^d$ 上定義された関数

$$\int_{[0,1)^d} f(x)\,dx$$

この数値計算を現実的な計算時間で実行したい。

例: 金利モデルのもとでの債券価格
この場合、$[0,1)^d$ 内の一点 x が、一つのシナリオに相当する。

1.b. 台形近似の非現実性

台形近似式

$$\int_{[0,1)^d} f(x)\,dx =$$
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n_1=0}^{N}\cdots\sum_{n_d=0}^{N} C(n_1,\ldots,n_d)\frac{1}{N^d} f\left(\frac{n_1}{N},\ldots,\frac{n_d}{N}\right)$$

但し、

$$C(n_1,n_2,\ldots,n_d) = \frac{1}{2^{\sharp\{i|\ n_i=0 \text{ or } N\}}}.$$

f がある程度なめらかなとき、この近似による誤差 ε は、

$$\varepsilon = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

今、この近似式に於ける計算量は $M=(1+N)^d$ に比例するので

(1) $$\varepsilon = O\left(\frac{1}{M^{2/d}}\right),$$

すなわち

$$M = O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^d\right).$$

1.c. Monte Carlo法

大数の強法則より $f\in L^2([0,1)^d)$ について

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} f(x_n) = \int_{[0,1)^d} f(x)\,dx \quad \text{a.s.}$$

である。但し、x_nは、$[0,1)^d$ 上の一様分布にしたがって独立に抜き出されたもの。

上式の左辺によって右辺を近似することをMonte Carlo法という。

Monte Carlo法の誤差評価

中心極限定理により、

$$\frac{\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} f(x_n) - \int_{[0,1)^d} f(x)\,dx}{\sqrt{\frac{V(f)}{M}}} \longrightarrow N(0,1)$$

as distribution, when $M\to\infty$.

よって、Monte Carlo法の近似誤差の大きさの平均値は $\sqrt{V(f)/M}$.

Monte Carlo法の誤差の確率的な評価

(2) $$O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right).$$

Remark: (1)(2)よりMonte Carlo法が意味を持つのは $d\geq 5$ の場合。

2. 低食い違い量列と準Monte Carlo法

a. 一様分布列 (uniformly distributed sequence)

b. 食い違い量 (discrepancy)

c. 低食い違い量列 (low-discrepancy sequence)

d. Koksma-Hlawkaの定理

e. 準Monte Carlo法 (Quasi-Monte Carlo method, deterministic simulation)

2.a. 一様分布列 (uniformly distributed sequence)

定義 1 (一様分布列)

$[0,1)^d$ 内の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様分布

$$\overset{\Longleftrightarrow}{def} \begin{cases} \forall f \text{ 連続関数} \\ \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} f(x_n) = \int_{[0,1]^d} f(x)\,dx \end{cases}$$

定理 1 (Weyl)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: 一様分布

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall f \ : \ \textit{Riemann} \text{可積 } \textit{on } [0,1)^d \\ \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} f(x_n) = \int_{[0,1)^d} f(x)\,dx \end{cases}$$

2.b. 食い違い量 (discre

点集合の散らばり方の一

定義 2 (*-食い違い量 (*
の点集合 $P = \{x_n\}_{n=1}^{M}$ の
次のように定義される。

$$D_M^*(P) = \sup_{\substack{0\le u_i<1 \\ i=1,\dots,d}} \left| \#(P \right.$$

Remark:
$B = \prod_{i=1}^{d}[0,u_i)$ とすると

$$\frac{\#(P\cap\prod_{i=1}^{d}[0,u_i))}{M} =$$

B の

$$\prod_{i=1}^{d} u_i \quad = B$$

$S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$(数列)に対しては、

$$D_M^*(S) = D_M^*(\{x_n\}_{n=1}^{M})$$

と定める。

定理 2 (Weyl)

$S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0,1)^d$ 内の一様分布列
$\Longleftrightarrow \lim_{M\to\infty} D_M^*(S) = 0$

2.c. 低食い違い量列 (low

命題 1 全ての正整数dに
列Sで以下を満たすような

(3) $\qquad D_M^*(S) = O$

Rothの予想:
全ての正整数dに対して(3
数列は存在しない。

定義 3 (低食い違い量列)
違い量列という。

2.d. Koksma-Hlawkaの定理

定理 3 (Koksma-Hlawka) $f : [0,1)^d$上の関数 $V_{HK}(f) < \infty$ ($V_{HK}(f)$はfの*Hardy-Kraus*の意味での全変動)とする。この時、$\forall \{x_n\}_{n=1}^M \subset [0,1)^d$

$$\left| \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{M} f(x_n) - \int_{[0,1)^d} f(x)\,dx \right| \le V_{HK}(f) D_M^* \left(\{x_n\}_{n=1}^M \right)$$

12

2.e. 準Monte Carlo法 (Quasi-Monte Carlo method, deterministic simulation)

数列$S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$が一様分布列ならば、

$$\lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{M} f(x_n) = \int_{[0,1)^d} f(x)\,dx$$

が成立する。この式を用いて右辺の近似計算を行う方法を準Monte Carlo法(Quasi-Monte Carlo method, deterministic simulation)という。

13

準Monte Carlo法の誤差評価

Koksma-Hlawkaの定理より$V_{HK}(f) \le \infty$であるようなfを一様分布列Sによって準Monte Carlo法で近似したときその誤差εは

$$\varepsilon = O\left(D_M^*(S)\right)$$

である。特にSとして低食い違い量列をとれば、

$$\varepsilon = O\left(\frac{(\log M)^d}{M} \right)$$

となる。

14

3. 数理ファイナンスへの応用

a. 金利派生商品の価格計算例

b. 適用した数列 ((t,s)-sequence)

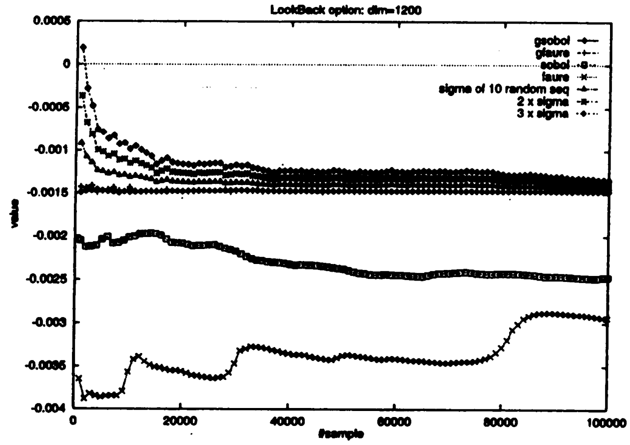
15

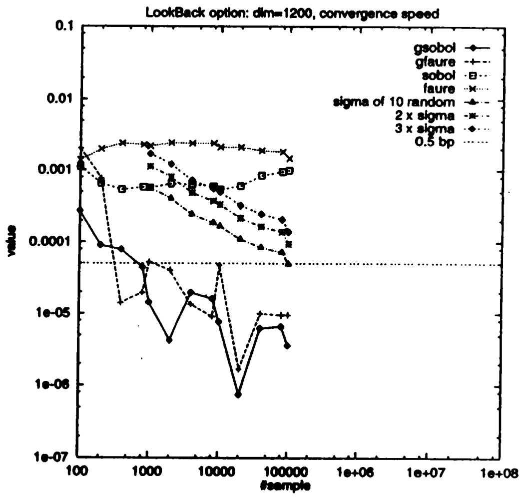
3.a. 金利派生商品の価格計算例

金利モデル

$$dr_t = a(r_t - \theta(t))dt + \sigma dW_t$$

の下で経路依存型の金利派生商品の価格を求めた。





16

3.b. 適用した数列 $((t,s)$-sequence)

H. Niederreiterによる(t,s)-sequenceの紹介
以下、単位区間$[0,1)^s$の数列を考える。

$b \in \mathbf{Z}_{\geq 2}, \quad A = \{0,1,\ldots,b-1\}.$

$u \in A^m$に対し、

$B(u) = \{b$進小数展開の最初のm桁がuになる実数$\}$,

点集合$P \subset [0,1)^s$, 領域$E \subset [0,1)^s$ に対し、

$\Delta(P;E) = \sharp(P \cap E) - (\sharp P) \times \mathrm{volume}(E)$

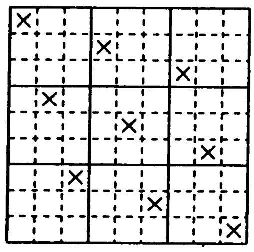
とする。

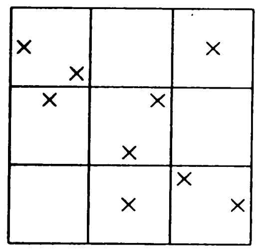
定義 4 ((t,m,s)**-net**) $P \subset [0,1)^s$, $\sharp P = b^m$, $0 \leq t \leq m$
このとき

Pは基数bの(t,m,s)-net

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \forall d_1,\ldots,\forall d_s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad \sum_{i=1}^s d_i = m - t \\ \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall u_i \in A^{d_i} \ (i = 1,\ldots,s) \\ \Delta(\prod_{i=1}^s B(u_i); P) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

17


example of (0,2,2)-net in base 3


example of (1,2,2)-net in base 3

定義 5 ((t,s)**-sequence**) $[0,1)^s$内の数列
$S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$が基数$b$の$(t,s)$-sequenceである

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \forall m > t \\ \{x_n \mid kb^m \leq n < (k+1)b^m\} \text{ は基数}b\text{の} \\ (t,m,s)\text{-netになる} \end{array} \right.$$

定理 4 Sが基数bの(t,s)-sequenceであるとき、

$$MD_M^*(S) \leq \frac{b^t}{s!} \frac{b-1}{[b/2] \times 2} \left(\frac{[b/2]}{\log b} \right)^s (\log M)^s + O(b^t (\log M)^{s-1})$$

18

3.c "Digital Construction" (Niederreiter)

設定 1 *Digital Construction of nets:*

$b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$: *base*, $m \geq 1$, $s \geq 1$: *integers*
$\mathbb{Z}_b = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$,
R : *Comm. Ring. with 1,* $\#R = b$

$\psi_r : \mathbb{Z}_b \to R$, *bijection*, $r = 0, 1, 2, \ldots, m-1$
$\eta_j^{(i)} : R \to \mathbb{Z}_b$, *bijection*, $\substack{i=1,2,\ldots,s \\ j=1,2,\ldots,m}$,
$c^{(i)} = \left(c_{jr}^{(i)}\right)_{\substack{j=1,\ldots,m \\ r=0,1,\ldots,m-1}} \in \mathrm{M}(m, m : R)$
$i = 1, 2, \ldots, s$
$e_b : (\mathbb{Z}_b)^\infty \to [0, 1)$,
$$e_b(a_0, a_1, \ldots) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b^{-i-1},$$
$a : \mathbb{N} \to (\mathbb{Z}_b)^\infty$, *b-adic expansion*

定義 6 (digital construction) $0 \leq n < b^m$ に対し、

$$x_n^{(i)} := e_b\left(\eta_{(m)}^{(i)}\left(c^{(i)}\psi^m(a(n))\right)\right)$$
$$x_n := \left(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(s)}\right) \in [0, 1)^s$$

と点集合 $\{x_n\}_{n=0}^{b^m-1}$ を定める。
但し、$\psi^m := \oplus_{r=0}^{m-1}\psi_r$, $\eta_{(m)}^{(i)} := \oplus_{j=1}^{m}\eta_j^{(i)}$.

定理 5 (Niederreiter) $b = p^l = q$, p : *prime*, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $R = \mathbb{F}_q$ とする。
$0 \leq \forall t \leq m$, $\forall d_1, \ldots, \forall d_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
$\sum_{i=1}^{s} d_i = m - t$
のとき、

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{F}_q}\left(C_{(d_1,\ldots,d_s)}\right) = m - t$$
$$\Longrightarrow \{x_n\}_{n=0}^{b^m-1} \quad :(t, m, s)\text{-net in base } b.$$

但し、

$$C_{(d_1,\ldots,d_s)} = \begin{pmatrix} \left(c_{jr}^{(1)}\right)_{\substack{1\leq j\leq d_1 \\ 0\leq r\leq m-1}} \\ \left(c_{jr}^{(2)}\right)_{\substack{1\leq j\leq d_2 \\ 0\leq r\leq m-1}} \\ \vdots \\ \left(c_{jr}^{(s)}\right)_{\substack{1\leq j\leq d_s \\ 0\leq r\leq m-1}} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}\left(m - t, m; \mathbb{F}_b\right).$$