数理解析研究所講究録 1221 巻 2001 年 180-194

Painlevé-Calogero 対応

京都大学総合人間学部基礎科学科　高崎金久 (Kanehisa Takasaki)

概要

最近，PainlevéVI 型方程式と Calogero 型可積分系の間の対応関係（Painlevé-Calogero 対応）が VI 型以外の方程式にも拡張された．また，多自由度の Calogero 系に対応して，Painlevé 方程式の多自由度への拡張が得られた．これらの結果を解説する．

1 歴史的背景

Painlevé が「動く分岐点をもたない」二階の代数的非線形微分方程式の分類によって今日 Painlevé 方程式と呼ばれるものを見いだしたのは 20 世紀初頭である [1]．Painlevé はいくつかの場合（特に VI 型方程式）を見落としたが，それを弟子の Gambier が補って [2]，最終的に分類が完成した．Painlevé が注目した「動く分岐点をもたない」という性質は今日「Painlevé 性」と呼ばれ，それを解の極の周りでの展開に基づいて調べる解析方法が「Painlevé 解析」の名で普及している．実際には，Painlevé よりも以前に Kowalevskaya が別の問題（剛体運動の方程式の可積分性）で非線形方程式の解の極に注目する考え方を有効に用いている [3]．その際に Kowalevskaya が開発したのがまさに前述の極の周りの展開を調べる方法である．したがってこの方法はむしろ「Kowalevskaya-Painlevé 解析」と呼ばれるのがふさわしい．

Painlevé の分類が完成するころ，R. Fuchs（「Fuchs 型方程式」や「Fuchs の関係」などで微分方程式論にも名を残している L. Fuchs はその父親である）が Painlevé VI 型方程式に対して次の二つの新しい見方を提案した [4]：

1. 線形常微分方程式の等モノドロミー変形としての視点
2. 楕円積分からの視点

この第一の視点は間もなく Schlesinger[5] や Garnier[6] に引き継がれて発展したその後は長い休眠期に入ったが，1970 年代に数理物理の問題（Ising 模型，ソリトン理論，その他）との関連が明らかになってから研究が盛んになり，今日に至っている．

これに対して，第二の視点は直後に Painlevé [7] が注目して少し発展させた後，ほとんど忘れ去られていた．ちなみに，Okamoto [8] は VI 型方程式の対称性に関する研究の中で Painlevé のこの仕事に触れている．Manin[9] は実に 90 年ぶりに Fuchs と Painlevé のこの仕事を採り上げて，非常に興味深い結果を示した．

Painlevé は Fuchs の提案を楕円函数による VI 型方程式の従属変数の変換として議論したのだが，Manin はさらに楕円曲線のモジュラスを独立変数として方程式を書き直すこと

（すなわち独立変数の変換）を考えて，楕円函数をポテンシャルとする非自励 Hamilton 系が VI 型方程式の別表現として得られることを指摘した．Manin はその Hamiltonian がある種の可積分系の問題 — Treibich と Verdier が研究した [10] — に現れるものと似ていることを注意しているが，それ以上の関連性は追求していない．

Levin と Olshanetsky は Manin の Hamiltonian が Inozemtsev 系と呼ばれる可積分系 — Calogero 系と呼ばれる可積分系 [12] の一つの拡張として Inozemtsev[13, 14] が提案した — の Hamiltonian に他ならないことを指摘して，Painlevé 方程式と Calogero 系の間のこの対応を「Painlevé-Calogero 対応」と呼んだ [11]．これが本稿の主題の由来である．

なお，本稿で紹介する結果についてはすでに論文にまとめているので [15] 詳細はそちらを参照されたい．

2 PVI 型方程式に対する Painlevé-Calogero 対応

Painlevé VI 型方程式は次のような二階の非線形常微分方程式である．

$$\begin{aligned}\frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}\\ &\quad+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\frac{\beta t}{\lambda^2}+\frac{\gamma(t-1)}{(\lambda-1)^2}+\frac{\delta t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

この方程式を Fuchs，Painlevé，Manin がどのように書き換えて行ったかをたどってみよう．

2.1 Fuchs の書き換え

R. Fuchs はこの方程式を次の形に書き換えた．

$$\begin{aligned}&t(1-t)\mathcal{L}_t\int_\infty^\lambda \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}}\\ &= \sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left[\alpha+\frac{\beta t}{\lambda^2}+\frac{\gamma(t-1)}{(\lambda-1)^2}+\left(\delta-\frac{1}{2}\right)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right].\end{aligned} \tag{2}$$

ここで $\mathcal{L}_t$ は Picard-Fuchs 作用素[1]と呼ばれる二階の常微分作用素

$$\mathcal{L}_t = t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}+(1-2t)\frac{d}{dt}-\frac{1}{4}, \tag{3}$$

である．Picard-Fuchs 作用素はもともと完全楕円積分の満たす微分方程式（Picard-Fuchs 方程式）

$$\mathcal{L}_t\oint_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}} = 0 \tag{4}$$

に現れるものである．R. Fuchs はそれを不完全楕円積分に対して適用したわけであるが，結果として，導函数を含む項がすべて不完全楕円積分に吸収される，という不思議なことが起こる．これはあとで示す V 型以下の方程式の書き換えにも共通する特徴である．

[1] この Fuchs は R. Fuchs の父親の L. Fuchs である．

2.2 Painlevéの書き換え

PainlevéはFuchsの得た方程式をWeierstrass $\wp$ 函数で書き直した．Painlevéにならって

$$q = \frac{1}{2(e_2 - e_1)^{1/2}} \int_{\infty}^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}} \tag{5}$$

という従属変数の変換 $\lambda \to q$ を考える（ただしこれはすでにManin流に少し書き直してある）．$1, \tau$ を基本周期とする $\wp$ 函数

$$\wp(u) = \wp(u \mid 1, \tau) = \frac{1}{u^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(u + m + n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2} \right) \tag{6}$$

を用いればこの式を λ について解くことができて

$$\lambda = \frac{\wp(q) - e_1}{e_2 - e_1} \tag{7}$$

となる．ここで e_1, e_2, e_3 は三つの半周期点

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\tau}{2}$$

における $\wp$ の値

$$e_n = \wp(\omega_n) \tag{8}$$

である．

この従属変数の変換は楕円曲線（Fuchsの楕円積分の背後にある）

$$y^2 = z(z-1)(z-t) \tag{9}$$

の媒介変数表示

$$z = \frac{\wp(u) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad y = \frac{\wp'(u)}{2(e_3 - e_1)^{3/2}}, \tag{10}$$

に対応している．この媒介変数表示によって

$$\begin{aligned} u = \omega_1 &\longleftrightarrow z = 0, \\ u = \omega_2 &\longleftrightarrow z = 1, \\ u = \omega_3 &\longleftrightarrow z = t \end{aligned}$$

というように三つの半周期点がFuchsの楕円曲線の三つの分岐点 $z = 0, 1, t$ と対応している．四つ目の分岐点 $z = \infty$ は $u = \omega_0 = 0$ に対応する．

この変数変換によって(2)は以下のように変わる．まず左辺は

$$t(1-t)\mathcal{L}_t\bigl(2(e_2 - e_1)^{12} q\bigr)$$

に変わる．右辺については，括弧を展開して各項ごとに考えれる．最初の項については $\wp$ 函数の満たす微分方程式

$$\wp'(u)^2 = 4(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3) \tag{11}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} &= (e_2-e_1)^{-3/2}\sqrt{(\wp(q)-e_1)(\wp(q)-e_2)(\wp(q)-e_3)} \\ &= \frac{1}{2}(e_2-e_1)^{-3/2}\wp'(q)\end{aligned}$$

というように書き換えられる．他の項については $\wp$ 函数の半周期によるずらしの公式

$$\wp(u+\omega_j) = e_j + \frac{(e_j-e_k)(e_j-e_\ell)}{\wp(u)-e_j} \tag{12}$$

（j,k,ℓ は $1,2,3$ の巡回置換）を用いれば

$$\frac{(e_2-e_1)^{3/2}}{2}\wp'(q+\omega_n) \quad (n=1,2,3)$$

の一次結合になることがわかる．こうして Fuchs の方程式は従属変数の変換 $\lambda \to q$ によって

$$t(1-t)\mathcal{L}_t\big(2(e_2-e_1)^{1/2}q\big) = \frac{1}{2}(e_2-e_1)^{-3/2}\sum_{n=0}^{3}\alpha_n\wp(q+\omega_n) \tag{13}$$

という形に書き換えられる．ただし

$$\alpha_0=\alpha,\ \alpha_1=-\beta,\ \alpha_2=\gamma,\ \alpha_3=-\delta+1/2 \tag{14}$$

である．これが Painlevé の行った書き換え（を Manin 流に修正したもの）である．

2.3 Manin の書き換え

Manin はここでさらに独立変数の変換 $t\to\tau$ を行う．t と τ は

$$t = \frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}. \tag{15}$$

という関係で結ばれている（e_n 達は $\wp$ 函数の半周期点での値だから τ の函数である）．幾何学的にはいずれも楕円曲線族のモジュラスである．t の方は Jacobi の楕円函数論でいうモジュラスであり，τ はそれを上半平面で見るものである．Manin はこの変数変換の Jacobian が

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\pi i}{t(t-1)(e_2-e_1)}, \tag{16}$$

という美しい表示をもつ．これを用いると Picard-Fuchs 作用素を τ についての微分作用素に書き換える等式

$$(e_2-e_1)^{3/2}t(1-t)\circ\mathcal{L}_t\circ(e_2-e_1)^{1/2} = (\pi i)^2\frac{d^2}{d\tau^2} \tag{17}$$

が得られる（$\circ$ は作用素の合成を表わす）．この等式を用いると (13) は

$$(2\pi i)^2\frac{d^2q}{d\tau^2} = \sum_{n=0}^{3}\alpha_n\wp'(q+\omega_n), \tag{18}$$

という微分方程式に変わる．これが Manin の見出した方程式である．

この方程式は非自励 Hamilton 系

$$2\pi i\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}, \quad 2\pi i\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} \tag{19}$$

の形にも表わせる．Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \sum_{n=0}^{3}\alpha_n\wp(q+\omega_n). \tag{20}$$

となる．この Hamiltonian は $\wp$ 函数を通じて τ に依存する（したがって上の Hamilton 系は非自励系である）ということに注意されたい．

2.4 楕円型 Inozemtsev 系との比較

楕円型 Inozemtsev 系は直線上の多体粒子系である．その運動方程式（粒子数を ℓ とする）は

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{\ell}\left(\frac{p_j^2}{2} + \sum_{n=0}^{3} g_n^2\wp(q_j+\omega_n)\right) + g_4^2\sum_{j\neq k}(\wp(q_j-q_k)+\wp(q_j+q_k)) \tag{21}$$

という Hamiltonian によって正準方程式

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \tag{22}$$

に書ける．$g_0,\ldots,g_4$ は結合定数であり，$\wp$ 函数のモジュラス τ もここでは定数として扱われる．当然これは自励系である．Inozemstev はこの系を Calogero 系の一般化の一つとして見出した（実際には双曲線函数や有理函数をポテンシャルをもつ系も与えている）．

Manin の方程式の Hamiltonian は Inozemtsev の Hamiltonian の $\ell=1$ の場合に他ならない（この場合には二体ポテンシャルが存在しない）．これが Levin と Olshanetsky の注目した点である．両者の大きな違いは，Manin の方程式では τ が時間変数の役割を演じる（したがって非自励系となる），という点にある．ℓ が一般の値の場合にも，Manin の方程式の拡張として，

$$2\pi i\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad 2\pi i\frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \tag{23}$$

という方程式を考えることができる．この方程式にはトーラス上の常微分方程式の等モノドロミー変形の方程式としての解釈がある（Takasaki[16]）が，今はそこには立ち入らない

3 V 型以下の方程式について

最近，V 型以下の Painlevé 方程式に対しても同様の対応があるということがわかった．このことを理解するには Painlevé 方程式の退化関係（Okamoto[17]）が重要な手掛かりと

なる．Painlevé の六つの方程式は退化操作によってつながっている．その関係は図式的に

$$\begin{array}{ccccc} P_{\mathrm{VI}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{V}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{IV}} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & P_{\mathrm{III}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{II}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{I}} \end{array}$$

という形に表現できる．特に，V 型以下の方程式にはいずれも VI 型方程式から退化操作によって到達できることになる．実は，Inozemtsev 系についても楕円型から出発する同様の退化図式が存在することが（Painlevé 方程式とは無関係に）知られていた（van Diejen[18]）．結果的には，この退化関係に沿って「Painlevé-Calogero 対応」も V 型以下に遺伝するのである．

このことは二階方程式と Hamilton 形式の両方の形式で確かめることができる（ただし II 型と I 型は Hamilton 形式でないと議論できない）．ここでは二階方程式の形で説明しよう．これは Fuchs・Painlevé・Manin の議論を V 型以下に拡張するものである．

3.1 V 型方程式に対する Fuchs の方程式の類似

Painlevé V 型方程式（P_{V}）は次のような形をしている．

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{d\lambda}{dt} \\ &\quad +\frac{\lambda(\lambda-1)^2}{t^2}\left(\alpha+\frac{\beta}{t^2}+\frac{\gamma t}{(\lambda-1)^2}+\frac{\delta t^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

VI 型方程式から退化操作でこれを導くには変数とパラメータを

$$t=1+\epsilon\tilde{t},\quad \alpha=\tilde{\alpha},\quad \beta=\tilde{\beta},\quad \gamma=\frac{\tilde{\gamma}}{\epsilon}-\frac{\tilde{\delta}}{\epsilon^2},\quad \delta=\frac{\tilde{\delta}}{\epsilon^2} \tag{25}$$

と設定して $\tilde{\alpha},\ldots,\tilde{\delta}$ と $\tilde{t}$ を有限に保ちつつ $\epsilon\to 0$ の極限をとる．これは物理でいう「スケール極限」(scaling limit）の一種である．

このスケール極限で Fuchs の方程式 (2) の方程式の構成要素には次のことが起こる：

1. Picard-Fuchs 作用素：

$$t(1-t)\mathcal{L}_t \;\longrightarrow\; \tilde{t}^2\frac{d^2}{d\tilde{t}^2}+\tilde{t}\frac{d}{d\tilde{t}}=\left(\tilde{t}\frac{d}{d\tilde{t}}\right)^2.$$

2. 右辺の $\alpha+\cdots$ の部分：

$$\alpha+\frac{\beta t}{\lambda^2}+\frac{\gamma(t-1)}{(\lambda-1)^2}+\left(\delta-\frac{1}{2}\right)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\;\longrightarrow\;\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{\lambda^2}+\frac{\tilde{\gamma}\tilde{t}}{(\lambda-1)^2}+\frac{\tilde{\delta}\tilde{t}^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3}.$$

3. 右辺の平行根因子：

$$\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\;\longrightarrow\;\sqrt{\lambda}(\lambda-1).$$

4. 不完全楕円積分：

$$\int_\infty^\lambda\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}}\;\longrightarrow\;\int_\infty^\lambda\frac{dz}{\sqrt{z}(z-1)}.$$

こうしてV型方程式に対するFuchsの方程式の類似

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 \int_\infty^\lambda \frac{dz}{\sqrt{z}(z-1)} = \sqrt{\lambda}(\lambda-1)\left(\alpha + \frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{\gamma t}{(\lambda-1)^2} + \frac{\delta t^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3}\right) \tag{26}$$

が得られる（最後に $\tilde{\alpha},\ldots,\tilde{\delta}$ と $\tilde{t}$ を $\alpha,\ldots,\delta$ と t に書き直した）.

3.2 V型方程式に対するManinの方程式の類似

(26)に対して

$$q = \int_\infty^\lambda \frac{dz}{\sqrt{z}(z-1)}. \tag{27}$$

という量を導入して $\lambda \to q$ という従属変数の変換を考える．実はVI型の場合の議論を忠実にたどるにはむしろ

$$q = \frac{1}{2\pi i}\int_\infty^\lambda \frac{dz}{\sqrt{z}(z-1)}$$

を考えるべきである．実際，上の退化操作は $t \to 1$ に伴う楕円曲線から特異有理曲線への退化

$$y^2 = z(z-1)(z-t) \ \to\ y^2 = z(z-1)^2$$

を伴っているが，このときVI型の場合の q の定義式の右辺の定数因子は

$$2(e_2-e_1)^{1/2} \to 2\pi i$$

という極限をもつことがわかるからである．実質的違いはないので，ここでは計算が少し簡単になる上の定義を採用する．$2\pi i$ を挿入すれば以下に現れる双曲線函数は三角函数に変わる．

q を定義する積分は具体的に計算できる（微積分の演習問題だと思って各自やってみること！）．答は

$$q = \log\left(\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}\right) \tag{28}$$

となる．$\sqrt{\lambda}$ について解けば

$$\sqrt{\lambda} = -\coth(q/2). \tag{29}$$

となる．要するに，$\wp$ に対応するのは今の設定では $\coth^2$ ということになる．幾何学的には，$\mathrm{Im}\,\tau \to \infty$ という極限でトーラスが円柱面に変わったことに対応する．なお，この積分型の変数変換自体は実質的にはすでに知られていた（Iwasaki 他 [19]）．

この q を用いて Fuchs の方程式の類似 (26) を書き直す．方程式の右辺の各項は

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\lambda}(\lambda-1) &= -\frac{\cosh(q/2)}{\sinh^3(q/2)}, \\
\sqrt{\lambda}(\lambda-1)\frac{1}{\lambda^2} &= -\frac{\sinh(q/2)}{\cosh^3(q/2)}, \\
\sqrt{\lambda}(\lambda-1)\frac{1}{(\lambda-1)^2} &= -\frac{1}{2}\sinh(q), \\
\sqrt{\lambda}(\lambda-1)\frac{(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3} &= -\frac{\lambda^{3/2}+\lambda^{1/2}}{(\lambda-1)^2} = -\frac{1}{4}\sinh(2q)
\end{aligned}
$$

というように表わせるので，方程式は

$$
\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 q = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{30}
$$

となる．ここで $V(q)$ は

$$
V(q) = -\frac{\alpha}{\sinh^2(q/2)} - \frac{\beta}{\cosh^2(q/2)} + \frac{\gamma t}{2}\cosh(q) + \frac{\delta t^2}{8}\cosh(2q) \tag{31}
$$

という「ポテンシャル」である．これが V 型方程式に対する Manin の方程式の類似である．

この二階方程式は Hamiltonian $\mathcal{H} = p^2/2 + V(q)$ によってただちに Hamilton 系

$$
t\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad t\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \tag{32}
$$

に書き直せる．これは $\log t$ を時間変数とする非自励 Hamilton 系である．

実は Inozemtsev 自身の議論した系の中にはこの Hamiltonian

$$
\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \frac{\alpha}{\sinh^2(q/2)} - \frac{\beta}{\cosh^2(q/2)} + \frac{\gamma t}{2}\cosh(q) + \frac{\delta t^2}{8}\cosh(2q) \tag{33}
$$

に対応するものがある（実際には Levi と Wojciechowski がそれ以前に Calogero 系の拡張として見つけていた系 [20] である）．それは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} \;=\; & \sum_{j=1}^{\ell}\left(\frac{p_j^2}{2} + \frac{g_0^2}{\sinh^2(q_j/2)} + \frac{g_1^2}{\cosh^2(q_j/2)} + g_2^2\cosh(q_j) + g_3^2\cosh(2q_j)\right) \\
& + g_4^2\sum_{j\neq k}\left(\frac{1}{\sinh^2((q_j-q_k)/2)} + \frac{1}{\sinh^2((q_j+q_k)/2)}\right)
\end{aligned} \tag{34}
$$

という形をしている．上で得た Hamiltonian は $\ell = 1$ のとき（二体ポテンシャルは存在せず）に相当する．違いは結合定数の一部が t に依存することである．

3.3 退化操作を経由しない方法

退化操作によって IV 型以下の Painlevé 方程式に対する Fuchs や Manin の方程式の類似を求めることは，原理的には可能だが，技術的には非常に面倒になる．幸い，退化操作を経由しない直接的な方法がある．

要は λ から q への変数変換を適切に決めることができればよいわけであるが，実はV型・IV型・III型の方程式ではそれが方程式の形から読み取れるのである．

VI型・V型方程式の $(d\lambda/dt)^2$ の項の係数に注目しよう．この係数は q を定義する積分の被積分函数と

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}} &= \exp\left[-\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-t}\right)dz\right],\\ \frac{1}{\sqrt{z}(z-1)} &= \exp\left[-\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{z-1}\right)dz\right]\end{aligned} \tag{35}$$

という簡単な関係で結ばれていることに気がつく．このことから，IV型方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2-\alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda}. \tag{36}$$

とIII型方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\lambda^2}{4t^2}\left(\alpha + \frac{\beta t}{\lambda^2} + \gamma\lambda + \frac{\delta t^2}{4\lambda^3}\right). \tag{37}$$

に対しても，同じやり方で q 変数が定義できるのではないか，というアイディアが思い浮かぶ．以下ではこれが実際にうまく行くことを説明する．

なお，II型方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha \tag{38}$$

とI型方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = 6\lambda^2 + t \tag{39}$$

については明らかにこういうやり方が通用しない．これらについては別途扱う必要がある．

3.4 IV型方程式の場合

方程式から読み取れる被積分函数は

$$\exp\left(-\int \frac{dz}{2z}\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} \tag{40}$$

である．q の定義は

$$q = \int^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\lambda} \tag{41}$$

となる．逆に解けば

$$\lambda = \left(\frac{q}{2}\right)^2 \tag{42}$$

となる．この変数変換でIV型方程式は

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{43}$$

という形に変わる．ポテンシャルは

$$V(q)=-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^6-2t\left(\frac{q}{2}\right)^4-2(t^2-\alpha)\left(\frac{q}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{q}{2}\right)^{-2} \tag{44}$$

で与えられる．

これもまた Hamilton 系

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} \tag{45}$$

に書き直せる．Hamiltonian は

$$\mathcal{H}=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^6-2t\left(\frac{q}{2}\right)^4-2(t^2-\alpha)\left(\frac{q}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{q}{2}\right)^{-2} \tag{46}$$

という形をもつ．この Hamiltonian にも Levi・Wojciechowski と Inozemtsev が論じた系の中に対応するものが見つかる．それは

$$\mathcal{H}=\sum_{j=1}^{\ell}\left(\frac{p_j^2}{2}+g_0^2q_j^6+g_1^2q_j^4+g_2^2q_j^2+g_3^2q_j^{-2}\right)+g_4^2\sum_{j\neq k}\left(\frac{1}{(q_j-q_k)^2}-\frac{1}{(q_j+q_k)^2}\right) \tag{47}$$

という Hamiltonian である．Painlevé IV 型方程式から得られたものはそれを $\ell=1$ の場合に制限して結合定数を時間変数に依存するものに置き換えた形をしている．

3.5 III 型方程式の場合

III 型方程式の場合には q を定義する積分の被積分函数は

$$\exp\left(-\int\frac{dz}{z}\right)=\frac{1}{z} \tag{48}$$

となる．q は

$$q=\int^{\lambda}\frac{dz}{z}=\log\lambda \tag{49}$$

で定義され，逆変換は

$$\lambda=e^q \tag{50}$$

となる．III 型方程式は

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^2q=-\frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{51}$$

に変わる．ポテンシャルは

$$V(q)=-\frac{\alpha}{4}e^q+\frac{\beta t}{4}e^{-q}-\frac{\gamma}{8}e^{2q}+\frac{\delta t^2}{8}e^{-2q}. \tag{52}$$

この運動方程式もただちに Hamilton 系

$$t\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad t\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \tag{53}$$

に書き直せる．時間変数が $\log t$ であることは V 型と似ている．Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \frac{\alpha}{4}e^q + \frac{\beta t}{4}e^{-q} - \frac{\gamma}{8}e^{2q} + \frac{\delta t^2}{8}e^{-2q} \tag{54}$$

というものになる．実はこれは Inozemtsev の分類した Hamiltonian には入っていない．しかしこれを前述の双曲型 Hamiltonian がさらに退化した場合として (ℓ が一般の場合も含めて) 導出することはできる．実際，van Diejen はまさにそのようなやり方でこの形の Hamiltonian に到達している．

4 Hamilton 形式での Painlevé-Calogero 対応

以上で説明したのは二階の方程式のレベルでの対応であるが，実はこの対応は Hamilton 系の間の時間依存の正準変換として定式化することもできる．これによって II 型と I 型の位置づけも明らかになる．

4.1 Painlevé 方程式の Hamilton 構造

Malmquist が最初に指摘したように [21]，Painlevé 方程式はいずれも

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

という形の Hamilton 系として表わせる．Hamilton 系としての表示には任意性があるが，ここでは次のような「多項式型」(これは λ, μ について多項式であることを意味する) の Hamiltonian による表示 (Okamoto[17]) を考える．

$$\text{VI 型} \quad H = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\left[\mu^2 - \left(\frac{\kappa_0}{\lambda} + \frac{\kappa_1}{\lambda-1} + \frac{\theta-1}{\lambda-t}\right)\mu + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)}\right].$$

$$\text{V 型} \quad H = \frac{\lambda(\lambda-1)^2}{t}\left[\mu^2 - \left(\frac{\kappa_0}{\lambda} + \frac{\theta_1}{\lambda-1} - \frac{\eta_1 t}{(\lambda-1)^2}\right)\mu + \frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)}\right].$$

$$\text{IV 型} \quad H = 2\lambda\left[\mu^2 - \left(\frac{\lambda}{2} + t + \frac{\kappa_0}{\lambda}\right)\mu + \frac{\theta_\infty}{2}\right].$$

$$\text{III 型} \quad H = \frac{\lambda^2}{t}\left[\mu^2 - \left(\eta_\infty + \frac{\theta_0}{\lambda} - \frac{\eta_0 t}{\lambda^2}\right)\mu + \frac{\eta_\infty(\theta_0+\theta_\infty)}{2\lambda}\right].$$

$$\text{II 型} \quad H = \frac{\mu^2}{2} - \left(\lambda^2 + \frac{t}{2}\right)\mu - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

$$\text{I 型} \quad H = \frac{\mu^2}{2} - 2\lambda^3 - t\lambda.$$

$\kappa_0, \kappa_1, \theta$ などの定数は Painlevé 方程式のパラメータと簡単な代数的関係にある．

4.2 正準変換のつくり方

Inozemtsev 系との間の正準変換は q と λ の関係を (q,p) と (λ,μ) の間の関係に拡張することによって得られる．そのような関係を発見的に見出すやり方を VI 型の場合について説明する．

鍵は Painlevé 方程式の Hamilton 表示の中で λ が満たす方程式にある．VI 型の場合にそれを書き下せば

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\left(2\mu-\frac{\kappa_0}{\lambda}-\frac{\kappa_1}{\lambda-1}-\frac{\theta-1}{\lambda-t}\right) \tag{55}$$

となる．これを μ について解けば

$$\mu=\frac{t(t-1)}{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\frac{d\lambda}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_0}{\lambda}+\frac{\kappa_1}{\lambda-1}+\frac{\theta-1}{\lambda-t}\right) \tag{56}$$

となる．ここに λ を q で表わす式 (7) を代入する．λ を t で微分すると

$$\frac{d\lambda}{dt}=\left(\frac{\wp'(q)}{e_2-e_1}\frac{dq}{d\tau}+f_\tau(q)\right)\frac{d\tau}{dt} \tag{57}$$

となる．ただし

$$f(u)=\frac{\wp(u)-e_1}{e_2-e_1},\quad f_\tau(u)=\frac{\partial f(u)}{\partial\tau}.$$

という記号を用いた．$dq/d\tau$ は

$$\frac{dq}{d\tau}=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}=\frac{p}{2\pi i} \tag{58}$$

で与えられる．$d\tau/dt$ は (16) を用いて書き換える．こうして μ の q,p,τ による表示

$$\begin{aligned}\mu\ =\ &\frac{e_2-e_1}{\wp'(q)}p+\frac{2\pi i(e_2-e_1)^2}{\wp'(q)^2}f_\tau(q)\\&+\frac{e_2-e_1}{2}\left(\frac{\kappa_0}{\wp(q)-e_1}+\frac{\kappa_1}{\wp(q)-e_2}+\frac{\theta-1}{\wp(q)-e_3}\right)\end{aligned} \tag{59}$$

が得られる．

この発見的に導かれた式 (59) を (7) とともに改めて変数変換 $(q,p)\to(\lambda,\mu)$ の「定義式」として採用するのである．このとき

$$\mu d\lambda-Hdt=pdq-\mathcal{H}\frac{d\tau}{2\pi i}+\text{exact form} \tag{60}$$

という等式が成立することが証明できる．これは二つの Hamilton 系が時間依存の正準変換で結ばれることを示している．

同様のやり方で V 型から III 型についてすでに示した対応を時間依存の正準変換に翻訳することができる．

4.3 II型とI型の場合

II型とI型については直接に考える．そもそもどのようなHamilton系へ変換するかが問題だが，III型までの結果を見れば，Hamiltonianが

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + V(q)$$

という形の標準的な運動項とポテンシャルをもつような系へ変換することが基本的な方針と判断される．I型の場合はすでにその形になっているので，II型のみ考えればよい．

そのような変換として

$$\lambda = q, \quad \mu = p + \lambda^2 + \frac{t}{2} \tag{61}$$

という時間依存の正準変換がすぐに見つかる．これはII型の方程式のHamilton表示を

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2}\left(q^2 + \frac{t}{2}\right)^2 - \alpha q \tag{62}$$

というHamiltonianをもつHamilton系へ写す.

単にこれだけでは(I型のHamiltonianも含めて）Calogero型の系と呼ぶべきかどうかは問題だが，実はこれらのHamiltonianも含めて六種類のHamiltonian $\mathcal{H}$ が六つのPainlevé方程式の間の退化関係に対応する退化操作で結ばれることが確かめられる．これによって，II型とI型の場合もCalogero側のHamiltonianが正しく理解されていることがわかる．

5 多成分Panlevé方程式へ

Painlevé方程式に対応するInozemtsev系はいずれも一自由度（$\ell = 1$）のHamilton系であるが，Inozemtsev系自体は多自由度でも定義されている．当然，それに対応するPailevé型方程式が存在するかどうかが問題になる．これについても一応の解答が得られている．

それによれば，2ℓ 個の正準変数 λ_j, μ_j $(j = 1, \ldots, \ell)$ をPainlevé側にも用意して，共役対 (λ_j, μ_j), (q_j, p_j) ごとに一自由度の場合と同じ形の函数関係を設定すれば，それを時間依存の正準変換とするようなHamilton系がPainlevé側にも存在することがわかる．そのHamiltonian H は正準変数（と時間変数）について「有理函数」で，

$$H = \sum_{j=1}^{\ell} H_j + \text{二体相互作用項} \tag{63}$$

という形をもつ．H_j は (λ_j, μ_j) についてPainlevé方程式のHamiltonianと同じ形をしている．また二体相互作用項は $\lambda_j = \lambda_k$ においてCalogero型（つまり $(\lambda_j - \lambda_k)^{-2}$）の特異性をもつ．言い替えれば，$\ell$ 個の独立なPainlevé方程式を用意して，それらの間にCalogero型の相互作用（実際にはそれよりも複雑）を導入したものになっている．たとえばVI型の場合には

$$\begin{aligned} H \;=\; & \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j(\lambda_j - 1)(\lambda_j - t)}{t(t-1)} \left[\mu_j^2 - \left(\frac{\kappa_0}{\lambda_j} + \frac{\kappa_1}{\lambda_j - 1} + \frac{\theta - 1}{\lambda_j - t}\right)\mu_j + \frac{\kappa}{\lambda_j(\lambda_j - 1)}\right] \\ & + \frac{g_4^2}{2t(t-1)} \sum_{j \neq k} \left[\frac{\lambda_j(\lambda_j - 1)(\lambda_j - t) + \lambda_k(\lambda_k - 1)(\lambda_k - t)}{8(\lambda_j - \lambda_k)^2} - 2(\lambda_j + \lambda_k)\right] \end{aligned} \tag{64}$$

という Hamiltonian になる．

これはいわば Painlevé 系の「多成分版」である．多自由度系という点は Painlevé 方程式の拡張である「Garnier 系」(Garnier[6], Okamoto[17]) と共通するが，Hamilton 系としての構造はまったく異なる．この系も何らかの意味で Riemmann 球面上の常微分方程式の「等モノドロミー変形」を記述するものであることが期待されるが，今のところよくわからない．

参考文献

[1] P. Painlevé, Memoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Bull. Soc. Math. Phys. France **28** (1900), 201-261; Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, Acta Math. **21** (1902), 1-85.

[2] B. Gambier, Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critique fixés, C.R. Acad. Sci. (Paris) **142** (1906), 266-269; ditto, Acta. Math. **33** (1910), 1-55.

[3] S. Kowalevski, Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Math. **12** (1889), 177-232.

[4] R. Fuchs, Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre, C.R. Acad. Sci. (Paris) **141** (1905), 555-588; Über lineare homogene Differentialgleichungern zweiter Ordnung mit im endlich gelegene wesentlich singulären Stellen, Math. Ann. **63** (1907), 301-321.

[5] L. Schlesinger, Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebliger Ordnumg mit festen kritischer Punkten, J. für Math. **141** (1912), 96-145.

[6] R. Garnier, Sur des quations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale est uniform et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intgrale génŕale a ses point critiques fixés, Ann. Sci. de l'ENS **29** (1912), 1-126; Etudes de l'intégrale générale de l'équation VI de M. Painlevdans le voisinage de ses singularité transcendentes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **(3) 34** (1917), 239-353.

[7] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixés, C.R. Acad. Sci. (Paris) **143** (1906), 1111-1117.

[8] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations, I: Sixth Painlevé equation, Annali Mat. Pura Appl. **146** (1987), 337-381.

[9] Yu. I. Manin, Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbb{P}^2$, AMS Transl. (2) **186** (1998), 131-151.

[10] A. Treibich and J.-L. Verdier, Revêtements tangentiels et sommes de 4 nombre triangulaires, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **311** (1990), 51-54.

[11] A.M. Levin and M.A. Olshanetsky, Painlevé-Calogero correspondence, e-print `alg-geom/9706012`; Classical limit of the Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations as hierarchy of isomonodromic deformations, e-print `hep-th/9709207`.

[12] F. Calogero, Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, J. Math. Phys. **12** (1971) 419-436; Exactly solvable one-dimensional many body problems, Lett. Nuovo Cim. **13** (1975) 411-416.

[13] V.I. Inozemtsev and D.V. Meshcheryakov, Extension of the class of integrable dynamical systems connected with semisimple Lie algebras, Lett. Math. Phys. **9** (1985), 13-18.

[14] V.I. Inozemtsev, Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems, Lett. Math. Phys. **17** (1989), 11-17.

[15] K. Takasaki, Painlevé-Calogero correspondence revisited, e-print `math.QA/0004118`, J. Math. Phys. (to appear).

[16] K. Takasaki, Elliptic calogero-Moser systems and isomonodromic deformations, J. Math. Phys. 40 (1999), 5787-5821.

[17] K. Okamoto, Isomonodromic deformations and Painlevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **33** (1986), 575-618.

[18] J.F. van Diejen, Difference Calogero-Moser systems and finite Toda chains, J. Math. Phys. **36** (1995), 1299-1323.

[19] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé (Vieweg, Braunschweig, 1991).

[20] D. Levi and S. Wojciechowski, On the Olshanetsky-Perelomov many-body system in an external field, Phys. Lett. **A103** (1984), 11-14.

[21] J. Malmquist, Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critique fixes, Ark. Mat. Astr. Fys. **17** (1922/23), 1-89.