数理解析研究所講究録 1221 巻 2001 年 199-208

結合型KPヒエラルキーの対称性・離散化・超離散化

早稲田大学 理工学部 数理科学学科　　筧　三郎 (Kakei, Saburo) *

1 はじめに

よく知られているように, KP ヒエラルキーにおいてソリトン解等の有限次元の解を考えると, τ-函数は有限サイズの行列式を用いて表される. この立場から見ると, 様々なソリトン方程式は行列式の恒等式 (プリュッカー恒等式) に帰着される. この事実の一つの拡張として, 広田良吾・太田泰広両氏は τ-函数がパフィアンで表される特解を持つようなソリトン方程式の系列を提出し, 「結合型 KP ヒエラルキー」と命名した [HO, Hi1].

まず, 「結合型 KP ヒエラルキー」に含まれる広田型微分方程式の具体例をいくつか示しておこう.

$$(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)\tau\cdot\tau = 24\bar{\sigma}\sigma, \tag{1a}$$
$$(D_1^3D_2 + 2D_2D_3 - 3D_1D_4)\tau\cdot\tau = 12D_1\bar{\sigma}\cdot\sigma, \tag{1b}$$
$$(D_1^3 + 2D_3 + 3D_1D_2)\sigma\cdot\tau = 0, \tag{1c}$$
$$(D_1^4 - 4D_1D_3 - 3D_2^2 - 6D_4)\sigma\cdot\tau = 0, \tag{1d}$$
$$(D_1^3 + 2D_3 - 3D_1D_2)\bar{\sigma}\cdot\tau = 0, \tag{1e}$$
$$(D_1^4 - 4D_1D_3 - 3D_2^2 + 6D_4)\bar{\sigma}\cdot\tau = 0. \tag{1f}$$

ここで D_j^k は, いわゆる広田の双線形演算子である:

$$D_m^kD_n^l f\cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial t_m} - \frac{\partial}{\partial t'_m}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial t_n} - \frac{\partial}{\partial t'_n}\right)^l f(t_1, t_2, \dots)g(t'_1, t'_2, \dots)\bigg|_{t'=t}.$$

特に,

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\log\tau, \qquad v = \frac{\sigma}{\tau}, \qquad \bar{v} = \frac{\bar{\sigma}}{\tau},$$

とおけば, u, v, $\bar{v}$ は次の結合型 KP 方程式を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(4\frac{\partial u}{\partial t_3} - 6u\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3}\right) - 3\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + 24\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(v\bar{v}) + 0, \tag{2a}$$
$$2\frac{\partial v}{\partial t_3} + 3u\frac{\partial v}{\partial t_1} + \frac{\partial^3 v}{\partial t_1^3} + 3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1\partial t_2} + v\int^{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\mathrm{d}t_1\right) = 0, \tag{2b}$$
$$2\frac{\partial \bar{v}}{\partial t_3} + 3u\frac{\partial \bar{v}}{\partial t_1} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial t_1^3} + 3\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t_1\partial t_2} + \bar{v}\int^{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\mathrm{d}t_1\right) = 0. \tag{2c}$$

方程式から分かるように, $\sigma = 0$ または $\bar{\sigma} = 0$ の場合には通常の KP ヒエラルキーに一致する. また, その場合には (2a) は通常の KP 方程式に一致する.

広田・太田の論文では, 広田型の双線形方程式に基づいた議論がなされていて, 方程式の階層全体としての構造には言及されていない. 方程式がラックス形式で表されるか, 無限個の保存量を持つか, などといったことも明らかにされてはいなかった.

一方, 結合型 KP ヒエラルキーが直交・シンプレクティック集団に対する行列積分と関係することが, (筆者を含めた) 数名の研究者により独立に指摘されている [AM, K1, vdL]. 筆者はこの観点

---

*2001 年 4 月より, 立教大学理学部数学科

から結合型 KP ヒエラルキーの研究を開始し, その構造を調べてきた. 以下では, 我々(= 筆者 + 共同研究者)がこれまでに得た結果について報告する.

Remark: 論文 [AHM, AM, ASM] で議論されている "Pfaff lattice" のヒエラルキーは, どうやら広田・太田の結合型 KP ヒエラルキーと同一のもの (より正確には, 「負ベキ」の時間発展を着け加えたもの) のようである. 定式化が我々のものとは異なるので現時点では完全には理解できていないが, 少なくとも双線形恒等式は同じものが得られている.

2 パフィアン

まずはパフィアンの定義を述べておこう. 偶数次反対称行列 A_{2N} に対して, その (i,j) 成分を単に (i,j) と表すことにする. このとき, パフィアン $\mathrm{Pf}[A_{2N}]$ を次のように定める.

$$\mathrm{Pf}[A_{2N}] = \sum_{\substack{j_1<j_3<\cdots<j_{2N-1} \\ j_1<j_2,\dots,j_{2N-1}<j_{2N}}} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2N \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{2N}\end{pmatrix} (j_1,j_2)(j_3,j_4)\cdots(j_{2N-1},j_{2N}).$$

このパフィアンを $(1,2,\dots,2N)$ と書くこともある. 例えば,

$$(1,2,3,4) = (1,2)(3,4) - (1,3)(2,4) + (1,4)(2,3)$$

等のようになる. また, 次のような展開則 ("Wick の定理") が成り立つことも知られている:

$$(1,2,\dots,2n) = \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j (1,j)(2,\dots,\widehat{j},\dots,2n). \tag{3}$$

ただし, $\widehat{j}$ は j を除くことを意味する.

パフィアンを用いると, 広田型微分方程式 (1a-f) の特解を具体的に書き表すことができる.

<u>**ロンスキ型パフィアン**</u>

(i,j) が次の線形微分方程式を満たすことを要請する.

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(l,m) = (l+n,m) + (l,m+n) \quad (n=1,2,\dots) \tag{4}$$

このとき, $\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ を次のように定めれば, (1a-f) は満たされる.

$$\tau_{\mathrm{W}} = (1,2,\dots,2N), \quad \sigma_{\mathrm{W}} = (1,2,\dots,2N-2), \quad \bar{\sigma}_{\mathrm{W}} = (1,2,\dots,2N+2).$$

<u>**グラム型パフィアン**</u>

$\tau, \sigma, \bar{\sigma}$ として, 次の形のものを選ぶ.

$$\tau_{\mathrm{G}} = (1,2,\dots,2N), \quad \sigma_{\mathrm{G}} = (c_1,c_0,1,2,\dots,2N), \quad \bar{\sigma}_{\mathrm{G}} = (d_0,d_1,1,2,\dots,2N). \tag{5}$$

ただし, 成分は

$$\begin{aligned} &(i,j) = c_{ij} + \int^x (f_i g_j - f_j g_i)\mathrm{d}x, \qquad c_{ji} = -c_{ij}, \\ &(d_n,i) = \partial_x^n f_i(x), \qquad (c_n,i) = \partial_x^n g_i(x), \\ &(d_n,d_m) = (c_n,c_m) = (c_n,d_m) = 0, \end{aligned}$$

の形として, さらに $f_k(x,t)$, $g_k(x,t)$ が

$$\partial_n f_k(x,t) = \partial_x^n f_k(x,t), \qquad \partial_n g_k(x,t) = (-1)^{n-1}\partial_x^n g_k(x,t),$$

を満たすことを要請する. こうすると, これらも (1a-f) を満たす.

ロンスキ型, グラム型, いずれの場合も, 広田型微分方程式 (1a-f) はパフィアンの恒等式に帰着される [Hi1, HO].

3 行列積分との関係

1990 年前後に 2 次元量子重力の模型として行列模型を用いることが提唱されて以来, 行列積分と可積分系との関係が盛んに研究されてきた. 典型的な例としては, Hermitian 1-matrix integral の固有値表示

$$Z_N^{(\beta)} = \frac{1}{N!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{1\le j<k\le N}(x_j-x_k)^\beta \exp\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} x_i^m t_m\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N, \tag{6}$$

と KP ヒエラルキーとの関係が挙げられる. すなわち, 相関関数として現れる行列積分が KP ヒエラルキーの τ 関数とみなされるわけである. このような場合は可積分系の手法を用いることで, モデルの非摂動論的情報を導き出すことができる.

行列積分 (6) におけるパラメータ β は, 考える行列のアンサンブルが直交行列, ユニタリー行列, シンプレクティック行列であることに対応して, それぞれ $\beta = 1, 2, 4$ の値を取る. 特に $\beta = 2$ の場合は, 多重積分 (6) が 1 重積分の行列式として表すことができる:

$$\begin{aligned} Z_N^{(\beta=4)} &= \frac{1}{N!}\int\cdots\int \det\left[x_k^j\right]^2_{j,k=1,\dots,N}\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\eta(x_i,t)\right]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ &= \det\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^{k+j-2}\exp\left[2\eta(x,t)\right]\mathrm{d}x\right]_{j,k=1,\dots,N}, \end{aligned}$$

(ただし $\eta(\lambda,t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m t_m$). このことから, $Z_N^{(\beta=2)}$ が KP ヒエラルキーの τ 函数であることが直ちに示される [Mo, MMM, Mu1, Mu2]. この書き換えに際して用いるのは, 次の公式である [An, B]:

$$\begin{aligned} &\int\cdots\int \det(\phi_j(x_k))_{j,k=1,\dots,N}\cdot\det(\psi_j(x_k))_{j,k=1,\dots,N}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ &\qquad = N!\det\left(\int\phi_j(x)\,\psi_k(x)\,\mathrm{d}x\right)_{j,k=1,\dots,N}. \end{aligned}$$

$\beta = 1, 4$ の場合にも, de Brujin [B] による多重積分の公式

$$\begin{aligned} &\int\cdots\int_{x_1\le\cdots\le x_N} \det\left[\phi_j(x_k)\right]_{j,k=1,\dots,N}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ &\qquad = \mathrm{Pf}\left[\int\int \mathrm{sgn}(y-x)\,\phi_j(x)\,\phi_k(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right]_{j,k=1,\dots,N} \\ &\qquad = \mathrm{Pf}\left[\int\int_{x<y}(\phi_j(x)\,\phi_k(y)-\phi_j(y)\,\phi_k(x))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right]_{j,k=1,\dots,N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int\cdots\int \det\left[\phi_j(x_k),\quad \psi_j(x_k)\right]_{j=1,\dots,2N,\ k=1,\cdots,N}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ &\qquad = N!\,\mathrm{Pf}\left[\int(\phi_j(x)\,\psi_k(x)-\phi_k(x)\,\psi_j(x))\,\mathrm{d}x\right]_{j,k=1,\dots,2N}, \end{aligned}$$

を用いれば同様の書き換えが可能である. ただし, 今度は行列式ではなくパフィアンが現れるわけである.

$$\begin{aligned} Z_N^{(\beta=1)} &= \int\cdots\int_{x_1\le\cdots\le x_N} \det\left[x_k^{j-1}\right]_{j,k=1,\dots,N} \exp\left[\sum_{i=1}^N \eta(x_i,t)\right] \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ &= \mathrm{Pf}\left[\iint_{x<y} (x^{j-1}y^{k-1}-y^{j-1}x^{k-1})\exp\left[\eta(x,t)+\eta(y,t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]_{j,k=1,\dots,N}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} Z_N^{(\beta=4)} &= \frac{1}{N!}\int\cdots\int \det\left[x_k^j,\ (j-1)x_k^j\right]_{\substack{j=1,\dots,2N\\ k=1,\dots,N}} \exp\left[\sum_{i=1}^N \eta(x_i,t)\right] \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ &= \mathrm{Pf}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(k-j)x^{k+j-3}\exp\left[2\eta(x,t)\right]\mathrm{d}x\right]_{j,k=1,\dots,N}. \end{aligned} \tag{8}$$

これら (7), (8) のいずれの場合もその成分は微分方程式(4) を満たすので, $Z_N^{(\beta=1)}$, $Z_N^{(\beta=4)}$ は結合型 KP ヒエラルキーの τ 関数とみなすことができる [K1]. 冒頭にも述べたように, 同様の指摘は Adler-van Moerbeke のグループ [AHM, AM, ASM], および van de Leur [vdL] によってもなされていることを再度注意しておく.

4 なぜパフィアンが現れるか?

通常の KP ヒエラルキーの場合, 行列式が現れる背景にはある種の「直接法」があった. (ここでは「直接法」という言葉を, 逆散乱の操作を経由しない手法という意味で用いている. もちろん「広田の直接法」もその一つである.) すなわち, 解空間である無限次元グラスマン多様体の有限次元部分多様体を特徴付ける線型方程式を, クラメルの公式を使って直接解く際に現れるのがロンスキー行列式であったり, グラム型行列式であったりしたわけである.

BKP ヒエラルキーの場合にも同様の理解の仕方ができることが, 広田氏によって示されている [Hi2]. キーとなるのは, 次の事実である.

Proposition 1 *(反対称行列の逆行列)*
$A=(a_{ij})$ を偶数次反対称行列で $\mathrm{Pf}(A)\neq 0$ を満たすものとする. このとき, $A=(a_{ij})$ の逆行列はパフィアンを用いて次のように表される:

$$(A^{-1})_{jk} = (-1)^{k+j-1}\mathrm{Pf}(\tilde{A}_{kj})/\mathrm{Pf}(A).$$

ここで $\tilde{A}_{kj}$ は A の (k,j)-余因子である.

証明は通常の場合と全く同じで, 展開則 (3) を用いればよい.

このアイデアは結合型 KP ヒエラルキーの場合でも同様に適用できる [K2]. 用いる手法は, Zakharov-Shabat の "dressing method" [ZS] である. まず, 次の積分演算子 $\boldsymbol{F}$ を考える:

$$\widehat{\boldsymbol{F}}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(x,z)\psi(z)\mathrm{d}z.$$

ただし, 積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ は 2×2 行列値の函数であり, 微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}}\boldsymbol{F}(x,z) - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\boldsymbol{F}(x,z) + (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial z^n}\boldsymbol{F}(x,z)\boldsymbol{E}_a = 0 \tag{9}$$

を満たすことを要請しておく.

次に, この $\boldsymbol{F}(x,z)$ の "Volterra 分解" を考える:

$$(1+\widehat{\boldsymbol{F}}) = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)^{-1}(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_-).$$

ただし, $\widehat{\boldsymbol{K}_\pm}$ は次のような積分演算子である:

$$\widehat{\boldsymbol{K}}_+\psi(x) = \int_x^\infty \boldsymbol{K}_+(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z, \qquad \widehat{\boldsymbol{K}}_-\psi(x) = \int_{-\infty}^x \boldsymbol{K}_-(x,z)\boldsymbol{\psi}(z)\mathrm{d}z.$$

こうして得られる $\widehat{\boldsymbol{K}_\pm}$ で "bare operarors"

$$\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}, \qquad (\boldsymbol{E}_a)_{i,j} = \delta_{a,i}\delta_{i,j} \quad (a=1,2) \tag{10}$$

に, 次のようにして「服を着せる」:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{B}_n^{(a)}\right)(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm) = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_\pm)\left(\frac{\partial}{\partial t_n^{(a)}} - \boldsymbol{E}_a\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right).$$

先ほどの要請 (9) により積分演算子 $\widehat{\boldsymbol{F}}$ は bare operarors (10) と可換となるので, 演算子 $\boldsymbol{B}_n^{(a)}$ が積分項を含まないことが分かる. この操作により, 自明でない可換な微分演算子の族が得られる. 可換性の帰結として $\boldsymbol{B}_m^{(a)}$ の係数の満たすべき非線形方程式系が得られるが, それが 2 成分 KP ヒエラルキーである.

次に, 積分核 $\boldsymbol{F}(x,z)$ が以下の対称性を持つことを要請する:

$${}^t\boldsymbol{F}(x,z) = -\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}(z,x)\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

この要請の下では, $\boldsymbol{F}(x,z)$ の時間発展も制限を受ける. 簡単な計算により $\boldsymbol{F}(x,z)$ は $t_n = \{t_n^{(1)} - (-1)^n t_n^{(2)}\}/2$ のみに依存するべきであることが分かる. この t_n に対応して, 次のように $\widehat{\boldsymbol{A}}_n$ を定義しよう:

$$\widehat{\boldsymbol{A}}_n = (1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)\left\{\frac{\partial}{\partial t_n} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\partial_x^n\right\}(1+\widehat{\boldsymbol{K}}_+)^{-1}.$$

特に, $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{A}}_3$ の可換性より, 結合型 KP 方程式 (2a-c) が得られる [K2]. すなわち, $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{A}}_3$ は結合型 KP 方程式に対するラックス対である.

特解を構成するためには, まず (9), (11) を満たす $\boldsymbol{F}(x,z)$ から出発する. 一つの例としては,

$$\boldsymbol{F}(x,z) \ = \ -\boldsymbol{J}\,{}^t\Xi(x)\boldsymbol{C}^{-1}\Xi(z) \tag{12}$$

とすることである. ただし, $\boldsymbol{C}$ は可逆な反対称行列であり, $\Xi(x)$ は

$${}^t\Xi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_N(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & \cdots & g_N(x) \end{pmatrix}$$

で与える. また, 条件 (9) が満たされるように, 函数 $f_j(x)$, $g_j(z)$ は以下の方程式に従うものとする:

$$\frac{\partial}{\partial x_n}f_i = \frac{\partial^n}{\partial x^n}f_i, \qquad \frac{\partial}{\partial x_n}g_i = (-1)^{n-1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}g_i.$$

一般の場合に $\boldsymbol{F}(x,z)$ に対応する $\boldsymbol{K}_+(x,z)$ を構成するには, 次の積分方程式 (Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式)

$$\boldsymbol{K}_+(x,z)+\boldsymbol{F}(x,z)+\int_x^\infty \boldsymbol{K}_+(x,y)\boldsymbol{F}(y,z)\mathrm{d}y=0 \tag{13}$$

を解くことになる. しかし (12) の $\boldsymbol{F}(x,z)$ に対しては, $\boldsymbol{K}_+(x,z)$ を

$${}^t\boldsymbol{K}_+(x,z)=\boldsymbol{P}\mathcal{K}(x)\Xi(z),\qquad {}^t\mathcal{K}(x)=\begin{pmatrix} K_1(x) & K_2(x) & \cdots & K_N(x)\\ \tilde{K}_1(x) & \tilde{K}_2(x) & \cdots & \tilde{K}_N(x)\end{pmatrix},$$

とおくと, 積分方程式 (13) は有限次元の線型方程式に退化する:

$$\left[\boldsymbol{C}+\int_x^\infty \Xi(y)\boldsymbol{J}\,{}^t\Xi(y)\mathrm{d}y\right]\mathcal{K}(x)=\Xi(x).$$

さらに, 今の場合は退化した線形方程式の係数行列は反対称となるので, 先ほどの Proposition 1 とより, 積分核 $\boldsymbol{K}_+(x,z)$ のパフィアンによる表示が得られるわけである. こうして得られた結合型 KP ヒエラルキーの特解は, 広田・太田のグラム型パフィアン解 (5) と一致する.

これで結合型 KP ヒエラルキーがパフィアンで表される特解を持つ理由に対して, 一つの説明が与えられたことになる. しかし, 以上のような定式化から見ると, パフィアン解に対応する積分核 (12) は, (9), (11) を満たすものの中の特殊な例となっている. このパフィアンで表される一連の解が, より一般の解の中でどういう位置を占めているかは, 現時点ではよく分かっていない.

5 対称性・多項式解

結合型 KP ヒエラルキーはその特殊化として AKP, BKP ヒエラルキーを含むのであるが, このことに関して文献 [Hi1] では次のように述べられている (p. 136, [注 2]).

『結合型 KP 方程式に作用する群 (筆者はカッツ・ムーディ・リー群に含まれると信じる) がどのようなものであるかは全く不明である. 群論の立場では KP 方程式に作用する群 (A 型) がもっとも一般的で, BKP 方程式に作用する群はそれを特殊化したものであると考える. この考えは筆者の観点 (パフィアンの方が行列式より一般的であるとする) と今のところ両立しない. 』

こういったことを議論するには, 自由フェルミオンによって定式化すると見通しがよい.

冒頭でも述べたように, 結合型 KP ヒエラルキーと等価な系が数グループにより研究されている. しかしよく調べてみると, このヒエラルキーが最初に扱われたのは論文 [JM] であると思われる. (R. Willox 氏 (東大数理科学) による発見. 本節の内容は, R. Willox 氏との共同研究に基づいている.)

論文 [JM], p. 974 において, 無限次元リー代数 D'_∞ が次のように定義されている:

$$D'_\infty=\left\{\sum a_{jk}:\psi_j\psi_k^*:+\sum b_{jk}\psi_j\psi_k+\sum c_{jk}\psi_j^*\psi_k^*+d\right\}.$$

ただし ψ_j, ψ_j^* ($j\in\mathbb{Z}$) は自由フェルミオンであり, 次の正準反交換関係を満たす:

$$[\psi_i,\psi_j^*]=\delta_{ij},\qquad [\psi_i,\psi_j]=[\psi_i^*,\psi_j^*]=0.$$

この代数から出発すると, 次の「双線形恒等式」が得られる:

$$\begin{aligned}&\oint\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}k}k^{n-n'-1}\mathrm{e}^{\xi(x-x',k)}\tau_{n'+1}(x'+[k^{-1}])\tau_{n-1}(x-[k^{-1}])\\ &+\ \oint\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\mathrm{i}k}k^{n'-n-1}\mathrm{e}^{\xi(x'-x,k)}\tau_{n+1}(x+[k^{-1}])\tau_{n'-1}(x'-[k^{-1}])\\ &=\ \begin{cases}0 & (n-n'\equiv 0 \bmod 2),\\ \tau_n(x)\tau_{n'}(x') & (n-n'\equiv 1 \bmod 2).\end{cases}\end{aligned} \tag{14}$$

$$\tau_n(x) = \langle n|\mathrm{e}^{H(x)}g|n+\ell\rangle \quad (n\text{が偶数なら } \ell=0,\ n\text{が奇数なら } \ell=1), \tag{15}$$

$$g = \mathrm{e}^X \ (X \in D'_\infty), \qquad H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi^*_{j+n}$$

$$\xi(x,k) = \sum_i x_i k^i, \qquad [k^{-1}] = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}, \frac{1}{3k^3}, \dots\right),$$

である. (後の便宜のため, τ 関数の定義を [JM] から若干変更してある.) この式から通常の手続きを経て, (1a-f) 等の双線形方程式が導かれる. また, 結合型 KP 方程式に対するラックス対 $\widehat{\boldsymbol{A}}_2$, $\widehat{\boldsymbol{A}}_3$ を, 双線形恒等式から導出することも可能である.

以下ではこの定式化を用いて, 多項式解の性質を調べてみる. まず, s をパラメータとして,

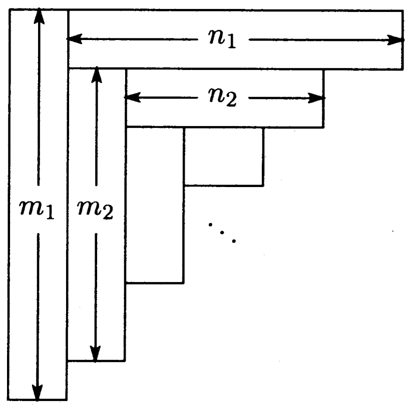
$$\varphi_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left\{(1+s)\psi_n + (-1)^n(1-s)\psi^*_{-n}\right\},$$
$$\varphi^*_{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left\{(1-s)\psi_n + (-1)^n(1+s)\psi^*_{-n}\right\}.$$

とおく. これを用いて,

$$S_Y^{(s)}(x) \overset{\text{def}}{=} \langle \mathrm{vac}|\mathrm{e}^{H(x)}\varphi^*_{m_1}\cdots\varphi^*_{m_k}\varphi_{n_k}\cdots\varphi_{n_1}|\mathrm{vac}\rangle$$

とする. ただし, Y は次のヤング図形とする:

$Y =$



このようにして定めた $S_Y^{(s)}(x)$ は, $s=1$ とすると通常の Schur 関数に一致する. さらに, $s=1$ とおいて $t_2 = t_4 = \cdots = 0$ とおくと, Schur の Q-関数に一致する. この意味で, $S_Y^{(s)}(x)$ は Schur 関数と Schur の Q-関数をパラメータ s でつなぐものとみなすことができる.

例: 1-hook $Y = (n+1, 1^{m-1})$ の場合

$$\begin{aligned} S^{(s)}_{(n+1,1^{m-1})} &= \langle \mathrm{vac}|\mathrm{e}^{H(x)}\varphi^*_m\varphi_n|\mathrm{vac}\rangle \\ &= \frac{(-1)^m(1+s)^2}{4}\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{m+\nu}(-x)p_{n-\nu}(x) + \frac{(-1)^n(1-s)^2}{4}\sum_{\nu=1}^{\infty} p_{m+\nu}(x)p_{n-\nu}(-x) \end{aligned}$$

自由フェルミオンによる定式化を用いて, 戸田格子的な拡張 (離散変数を 1 つ導入し, "負べキ方向" の時間発展を入れる) を考えることも可能である. 双線形恒等式 (14) では τ 関数を (15) で定義したが, 通常の戸田格子ヒエラルキーの場合 [Ta] と同様に

$$\tau_{n,\ell}(x,y) = \langle n|\mathrm{e}^{H(x)}g\mathrm{e}^{-\bar{H}(y)}|\ell\rangle, \qquad \bar{H}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi^*_{j-n}$$

として負の時間変数 $y = (y_1, y_2, \dots)$ を導入すれば, (14) の場合と同様の計算により次の双線形恒等式が得られる:

$$\begin{aligned}
&\oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}k} \Big\{ k^{n-n'-1} \mathrm{e}^{\xi(x-x',k)} \tau_{n'+1,\ell'}(x' + [k^{-1}], y') \tau_{n-1,\ell}(x - [k^{-1}], y) \\
&\qquad + k^{n'-n-1} \mathrm{e}^{\xi(x'-x,k)} \tau_{n'-1,\ell'}(x' - [k^{-1}], y') \tau_{n+1,\ell}(x + [k^{-1}], y) \Big\} \\
&= \oint \frac{\mathrm{d}k}{2\pi \mathrm{i}k} \Big\{ k^{\ell-\ell'+1} \mathrm{e}^{\xi(y-y',k)} \tau_{n',\ell'-1}(x', y' + [k]) \tau_{n,\ell+1}(x, y - [k]) \\
&\qquad + k^{\ell'-\ell+1} \mathrm{e}^{\xi(y'-y,k)} \tau_{n',\ell'+1}(x', y' - [k]) \tau_{n,\ell-1}(x, y + [k]) \Big\} .
\end{aligned} \tag{16}$$

ここに含まれる双線形方程式としては, 例えば以下のものが挙げられる:

$$\begin{aligned}
&D_1 D_{-1} \tau_{n,l} \cdot \tau_{n,l} = \tau_{n+1,l-1} \tau_{n-1,l+1} - \tau_{n+1,l+1} \tau_{n-1,l-1}, \\
&D_1 \tau_{n,l+1} \cdot \tau_{n,l-1} + D_{-1} \tau_{n+1,l} \cdot \tau_{n-1,l} = 0
\end{aligned}$$

パフィアンの恒等式の立場からもこれらと同じ離散方程式が導出されることが, 辻本・近藤 [TK] によって報告されている. また, 双線形恒等式 (16) と類似のものは, [ASM] でも与えられていることを注意しておく ([ASM] (3.1) 式).

6　離散化・超離散化

双線形恒等式 (14) に対していわゆる「三輪変換」を適用することで, 対応する離散方程式が得られる [JM]. 例えば, 離散変数を ℓ, m, n と 3 つ用意して,

$$x = (\ell+1)[a] + (m+1)[b] + (n+1)[c], \qquad x' = \ell[a] + m[b] + n[c] \tag{17}$$

(ただし, $[a] = (a, a^2/2, a^3/3, \dots)$) とすると,

$$\begin{aligned}
&abc(a-b)(b-c)(c-a) \tau_{N+2}(\ell+1, m+1, n+1) \tau_{N-2}(\ell, m, n) \\
&\quad + \ a(b-c) \tau_N(\ell, m+1, n+1) \tau_N(\ell+1, m, n) \\
&\quad + \ b(c-a) \tau_N(\ell+1, m, n+1) \tau_N(\ell, m+1, n) \\
&\quad + \ c(a-b) \tau_N(\ell+1, m+1, n) \tau_N(\ell, m, n+1) \ = \ 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&(a-b)(b-c)(c-a) \tau_{N+2}(\ell+1, m+1, n+1) \tau_{N-1}(\ell, m, n) \\
&\quad + \ (b-c) \tau_{N+1}(\ell, m+1, n+1) \tau_N(\ell+1, m, n) \\
&\quad + \ (c-a) \tau_{N+1}(\ell+1, m, n+1) \tau_N(\ell, m+1, n) \\
&\quad + \ (a-b) \tau_{N+1}(\ell+1, m+1, n) \tau_N(\ell, m, n+1) \ = \ 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

という離散方程式が得られる. 方程式 (18) は [ASM] の (3.6) 式と一致するので, “Pfaff lattice” と結合型 KP ヒエラルキーとは同一の双線形恒等式に従うと言える. ただし, [ASM] では (19) については議論されていないようである.

特殊解については, 元の双線形恒等式のパフィアン型の解に対して三輪変換を適用することで, 離散方程式に対するパフィアン型の解も得られる. 逆に, パフィアンの恒等式の立場からも同じ離散方程式が導出されることが, 辻本・近藤, Gilson により報告されている [TK, G]. また, 新沢は離散方程式 (18), (19) に付随する格子の構造とルート系との関係を議論している [S].

次に超離散化について考えてみる. 超離散化の手続き

$$\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon \log(\mathrm{e}^{a/\epsilon} + \mathrm{e}^{b/\epsilon}) = \max(a, b)$$

を適用する際に大切なことは, 離散的な発展方程式の係数を全て正にとることができるかどうかである. 例えば離散 Lotka-Volterra 方程式

$$V_n^{t+1} = \frac{1+\delta V_{n+1}^t}{1+\delta V_{n-1}^{t+1}} \cdot V_n^t$$

の場合には, $\delta > 0$ととることで係数は全て正となり, ([ST] にも述べられているように) 超離散化の手続きが実行できる.

さて, それではD型の場合にはどうなるだろうか? 残念ながら現時点では完全に理解できているとは言いがたいのであるが, 超離散化が可能であることを示唆する結果は得られている. 三輪変換 (17) の代わりに

$$x = (m+1)[a] + (n+1)[b], \qquad x' = m[a] + n[b] \tag{20}$$

を考えよう. そうすると, 双線形恒等式 (14) より次の離散方程式が得られる.

$$\begin{aligned} &a\, \tau_s(m,n+1)\tau_{s+1}(m+1,n) \\ &\quad -b\, \tau_s(m+1,n)\tau_{s+1}(m,n+1) \\ &\quad -(a-b)\tau_s(m,n)\tau_{s+1}(m+1,n+1) \\ &\quad +ab(a-b)\tau_{s+2}(m+1,n+1)\tau_{s-1}(m,n) \;=\; 0 \end{aligned} \tag{21}$$

ただし, $\tau_s(m,n)$ は (15) の τ 関数に対して変換 (20) を適用したものとする. ここでさらに "4-reduction" の条件,

$$\tau_{s+4}(m,n) = \tau_s(m,n)$$

をおくと, (21) は $\tau_s(m,n)$ $(s=1,2,3,4)$ という4つの従属変数に対する差分方程式となるが, それを $\tau_s(m+1,n+1)$ $(s=1,2,3,4)$ について解くと, 例えば

$$\begin{aligned} \tau_1(m+1,n+1) &= \frac{1}{(a^4b^4-1)\tau_1(m,n)\tau_2(m,n)\tau_4(m,n)} \\ &\quad \times\{\tau_j(m,n), \tau_j(m+1,n), \tau_j(m,n+1)\ (j=1,2,3,4) \text{ の斉4次式}\} \end{aligned}$$

という形の発展方程式が得られる. 超離散化にあたって問題となるのは分子の係数の符号であるが, パラメータ a, b を $a = \mathrm{i}\alpha$, $b = -\mathrm{i}\beta$ と置き換えれば,

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\times\ \text{分子} \;=\; &+\alpha\, \tau_1(m,n)\tau_2(m,n)\tau_1(m+1,n)\tau_4(m,n+1) \\ &+\beta\, \tau_1(m,n)\tau_2(m,n)\tau_4(m+1,n)\tau_1(m,n+1) \\ &+\alpha^2\beta\, \tau_2(m,n)\tau_3(m,n)\tau_2(m+1,n)\tau_1(m,n+1) \\ &+\alpha\beta^2\, \tau_2(m,n)\tau_3(m,n)\tau_1(m+1,n)\tau_2(m,n+1) \\ &+\alpha^3\beta^2\, \tau_3(m,n)\tau_4(m,n)\tau_3(m+1,n)\tau_2(m,n+1) \\ &+\alpha^2\beta^3\, \tau_3(m,n)\tau_4(m,n)\tau_2(m+1,n)\tau_3(m,n+1) \\ &+\alpha^4\beta^3\, \tau_4(m,n)\tau_1(m,n)\tau_4(m+1,n)\tau_3(m,n+1) \\ &+\alpha^3\beta^4\, \tau_4(m,n)\tau_1(m,n)\tau_3(m+1,n)\tau_4(m,n+1) \end{aligned}$$

となり, $\alpha, \beta > 0$ の条件の下で全ての係数は正となる.

これで, 少なくとも τ 関数のレベルでは, 時間発展を超離散化することが可能であることが分かった. これを元に適当な従属変数変換を用いて「箱玉系」的な超離散発展方程式を作ることができるかどうか, (できるのなら) それが [Ha] で議論されているような "$D_4^{(1)}$ オートマトン" と関係するかといった点については, 残念ながら現時点では分かっていない.

参考文献

[AHM] M. Adler, E. Horozov and P. van Moerbeke: *Internat. Math. Res. Notices* (1999), no. 11, 569-588.

[AM] M. Adler and P. van Moerbeke: *preprints* (solv-int/9903009, solv-int/9912008).

[ASM] M. Adler, T. Shiota and P. van Moerbeke: *preprint* (solv-int/9909010).

[An] C. Andréief: *Mém. de la Soc. Sci., Bordeaux* **2** (1883) 1-14.

[B] N. G. de Brujin: *J. Indian Math. Soc. N.S.* **19** (1955) 133-151.

[G] C. Gilson: Talk delivered at 4th International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations (SIDE IV), University of Tokyo, 27 Nov. 2000 - 1 Dec. 2000.

[Ha] 幡山五郎: 本講究録

[Hi1] 広田 良吾: 「直接法による ソリトンの数理」, 岩波書店, 1992.

[Hi2] R. Hirota: *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 2705 - 2712.

[HO] R. Hirota and Y. Ohta: *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 798 - 809.

[JM] M. Jimbo and T. Miwa: *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19** (1983) 94 - 1001.

[K1] S. Kakei: *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999) 2875 - 2877.

[K2] S. Kakei: *Phys. Lett.* A **264** (2000) 449 - 458.

[vdL] J. van de Leur: *preprint* (solv-int/9909028).

[Mo] A. Morozov: *Phys. Usp.* **37** (1994) 1-55.

[MMM] A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov; *Phys. Lett.* **B265** (1991) 99-107.

[Mu1] M. Mulase: In *Topology, geometry and field theory*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994, pp.111-127.

[Mu2] M. Mulase: In *Perspectives in mathematical physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys. III, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994, pp.151-217.

[Ta] T. Takebe, *Lett. Math. Phys.* **21** (1991) 77-84; *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **27** (1991) 491-503.

[TK] 辻本 諭, 近藤弘一: 京大数理研 短期共同研究「離散可積分系に関する最近の話題」(1999 年 8 月 2 日 - 4 日) における講演.

[S] N. Shinzawa: *J. Phys.* **A 33** (2000) 3957-3970.

[ST] 志田篤彦, 高橋大輔: 本講究録

[ZS] V. E. Zakharov and A. B. Shabat: *Funct. Anal. and its Appl.* **8** (1974) 226 - 235.