

# 組み合わせ論とクリスタル

有木 進 (東京商船大学)

## 1 はじめに

ここでは、従来組み合わせ論で研究されてきた RSK<sup>1</sup> 対応、jeu de taquin、LR<sup>2</sup> 規則などが表現論とくに柏原のクリスタルのコンテキストのなかでどう理解されているかについて紹介する。さて、RSK 対応についてはもともと伊達・神保・三輪によりクリスタルとの関係が発見されたこともあって（というかむしろこれが柏原が結晶基底を導入する動機となった）クリスタルの分野でも比較的よく理解されていると思うが、他方箱玉系で鳥居・高橋・薩摩により発見された保存則はこの考え方では説明できないため、箱玉系とクリスタルの関係が発見されてのちも比較的なぞとされてきた。しかしこれもこの組み合わせ論とクリスタルの説明の中で自然に説明がつく。さらにエネルギー関数から導入された保存則と鳥居・高橋・薩摩の保存則の関係も証明できる。<sup>3</sup> ([A1] 参照) また Littelmann のパスモデルを知っていればいろいろ思うこともあるであろう。このように従来 Stanley や Fomin を中心とする MIT 学派で研究されてきた組み合わせ論とクリスタル、そして箱玉系の関係を解説する。

## 2 Fomin-Greene 理論の紹介

RSK 対応は半順序集合の理論の中に自然な拡張をもち、符号語に対応するヤング図形の形がどうなるかについても半順序集合の理論の中で説明できる。ここではまずそれを紹介したい。文献としては [BF] と [F] をあげておく。また、RSK 対応についてはすでに知っているものとし、記号だけ以下のように定めておく。

**定義 1**  $[1, r] = \{1, 2, \dots, r\}$  をアルファベットの集合とし、 $x = x_1 \cdots x_n \in [1, r]^n$  を語長  $n$  の符号語とする。このとき、

$$P(x) = (\cdots (\emptyset \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \cdots) \leftarrow x_n \quad (1)$$

により準標準盤  $P(x)$  を定める。ここで  $T \leftarrow x_i$  とは  $x_i$  の準標準盤  $T$  への挿入であり、まず 1 行めから順にサーチして bumping を行なう手続きの結果得られる準標準盤のことである。各アルファベットを挿入することによりヤング図形の成長列が得られるからこれを標準盤と同一視し  $Q(x)$  とあらわす。対応  $x \leftrightarrow (P(x), Q(x))$  を RSK 対応と呼ぶ。

<sup>1</sup>Robinson-Schensted-Knuth

<sup>2</sup>Littlewood-Richardson

<sup>3</sup>これについてはこの研究集会の中で国場氏よりこういう関係式が予想されているのですよ、と教えていただいた。ここで感謝したい。簡単なことではあるがここで紹介する話からすぐ証明できるので翌日の講演ではこれも追加して紹介した。

符号語  $x$  中に  $i$  が  $n_i$  回現れたとすると、これに左から  $i_1, i_2, \dots, i_{n_i}$  と名前をつけることによりすべてのアルファベットが異なる場合に帰着できる。たとえば、 $x = 312143$  なら  $\tilde{x} = 3_1 1_1 2_1 2_2 4_3 3_2$  とする。このとき、

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & P(x) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tilde{x} & \longrightarrow & P(\tilde{x}) \end{array} \quad (2)$$

であるから、(右の対応は  $P(\tilde{x})$  に書き込まれた数字の添字を忘れることにより  $P(x)$  を得る対応) 本質的には  $x$  が  $S_n$  の元、すなわち  $1, \dots, n$  の並べ替えのときのみ考えればよい。

さて、ここで Fomin-Greene 理論について紹介しよう。 $(\mathcal{P}, \leq)$  を半順序集合とするとき、**chain** とは  $\mathcal{P}$  の全順序部分集合のことであり、**antichain** とは比較可能な元を持たない  $\mathcal{P}$  の部分集合のことである。

**定義 2**  $(\mathcal{P}, \leq)$  を半順序集合とする。このとき、各  $k \in \mathbb{N}$  に対し、 $I_k(\mathcal{P})$ ,  $D_k(\mathcal{P})$  を次のように定める。

$$I_k(\mathcal{P}) := \max\{|C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k| \mid C_i: (\text{possibly empty}) \text{ chain}\} \quad (3)$$

$$D_k(\mathcal{P}) := \max\{|A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k| \mid A_i: (\text{possibly empty}) \text{ antichain}\} \quad (4)$$

また、 $\lambda_k(\mathcal{P})$ ,  $\lambda'_k(\mathcal{P})$  を次式で定める。

$$\lambda_k(\mathcal{P}) := I_k(\mathcal{P}) - I_{k-1}(\mathcal{P}), \quad \lambda'_k(\mathcal{P}) := D_k(\mathcal{P}) - D_{k-1}(\mathcal{P}) \quad (5)$$

次の定義が重要である。

$$\lambda(\mathcal{P}) := (\lambda_1(\mathcal{P}), \lambda_2(\mathcal{P}), \dots) \quad (6)$$

$$\lambda'(\mathcal{P}) := (\lambda'_1(\mathcal{P}), \lambda'_2(\mathcal{P}), \dots) \quad (7)$$

この一般的な状況下で次の Greene と Fomin による定理が成り立つ。

**定理 1** 任意の半順序集合  $\mathcal{P}$  に対し、 $\lambda(\mathcal{P})$  と  $\lambda'(\mathcal{P})$  は分割になる。すなわち、

$$\lambda_1(\mathcal{P}) \geq \lambda_2(\mathcal{P}) \geq \dots \geq \lambda_k(\mathcal{P}) \geq \dots, \quad (8)$$

$$\lambda'_1(\mathcal{P}) \geq \lambda'_2(\mathcal{P}) \geq \dots \geq \lambda'_k(\mathcal{P}) \geq \dots. \quad (9)$$

さらに、分割  $\lambda'(\mathcal{P})$  は分割  $\lambda(\mathcal{P})$  の転置である。

さて、この一般論と従来の RSK 対応との関係を見るには、次の形の半順序集合を考えればよい。上で述べたように符号語は  $1, \dots, n$  の置換のみ考えれば十分なので、以下の定義では符号語を対称群の元と同一視する。

**定義 3**  $S_n$  を  $n$  次対称群とし、 $[1, n]$  の置換群と思う。このとき、 $w \in S_n$  に付随した半順序集合  $(\mathcal{P}(w), \leq)$  とは、次で定義されるものである。

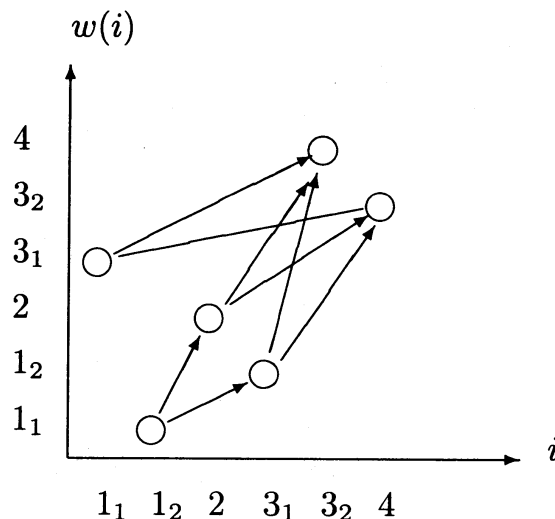
$$\mathcal{P}(w) = \{(i, w(i)) \mid i \in [1, n]\} \quad (10)$$

$$(i, w(i)) \leq (j, w(j)) \Leftrightarrow i \leq j, w(i) \leq w(j) \quad (11)$$

ここで、 $w \in S_n$  を符号語  $w(1)w(2)\dots w(n) \in [1, n]^n$  と同一視することにより、 $(\mathcal{P}(w), \leq)$  を符号語に付随した半順序集合とも呼ぶ。

例をやってみよう。

例 1 符号語を  $x = 312143 \in [1, 4]^6$  とする。これを  $3_1 1_1 2_1 2_2 4_3 2_2$  により  $S_6$  の元とみなす。ここでは  $S_6$  を集合  $\{1_1 < 1_2 < 2 < 3_1 < 3_2 < 4\}$  の置換群とみなしている。このとき、 $x$  に付随した半順序集合  $\mathcal{P}(x)$  は次のように与えられる。



また、 $I_1 = 3, I_2 = 5, I_3 = 6, I_4 = 6, \dots$ , より  $\lambda(\mathcal{P}(x)) = (3, 2, 1)$  である。ここで、このヤング図形は次の計算の結果得られるヤング図形と同じであることに注目していただきたい。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(x) = \emptyset \leftarrow 312143 &= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \leftarrow 12143 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \leftarrow 2143 \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \leftarrow 143 \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \leftarrow 43 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \leftarrow 3 \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

一般に次の定理が成り立つ。

定理 2 符号語  $x \in [1, r]^n$  に付随した半順序集合を  $\mathcal{P}(x)$  とするとき、 $\lambda(\mathcal{P}(x))$  は  $\mathcal{P}(x)$  のヤング図形に等しい。

その他、この理論の応用として、いわゆる局所規則による RSK 対応の計算と  
いうのが得られるのであるが、ここでは省略する。

### 3 箱玉系への応用

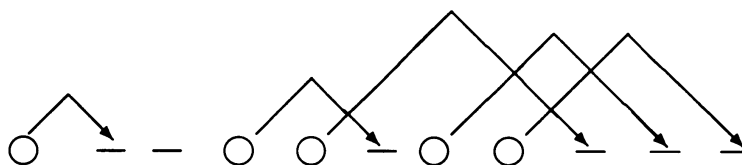
さて、ここでは現在  $A_1^{(1)}$  ソリトンセルオートマトンと呼ばれている箱玉系を考  
える。ルールはよく知られているように一番左端から順に右の空いているところ  
に移していくのであるが、詳しい定義は省略し、以下の実例で理解してもらうこ  
ととする。

#### 例 2

$$t : \quad \dots 00100110110000 \dots$$

$$t+1 : \quad \dots 00010001001110 \dots$$

この時間発展は玉が次のように移動して得られたものである。



さて、鳥居・高橋・薩摩はこの箱玉系に対して、スタック順列という順列を対  
応させ、この符号語に対する RSK 対応の結果得られる標準盤は時間発展で保存  
しないが、ヤング図形の形自体は保存されることを示した。スタック順列とは次  
のように定義されるものである。このとき、スタック順列は 13542 になる。

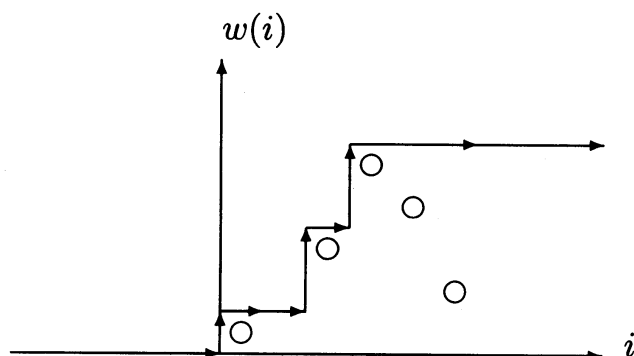
$$\begin{aligned} & \dots 00()0((())())0 \dots \\ & \dots \quad 1 \quad 3 \quad 542 \quad \dots \end{aligned} \tag{12}$$

この定理は今までの説明から自然に理解できる。このことを説明しよう。そ  
のためには、0 を  $\rightarrow$  に、1 を  $\uparrow$  に対応させ、平面上の折れ線が箱玉系の状態を  
表わすと考える。このとき、スタック順列がこの折れ線との関係で自然に理解で  
きる。たとえば上の例の場合、次のような折れ線になる。以下の例ではスタック  
順列  $w = 13542$  は  $\circ$  で表示されている。この  $\circ$  の位置はスタック順列を定義す  
るときの括弧付けに対応して自然に定まっておき、またこの  $\circ$  の集合をそのまま  
 $w$  に付随した半順序集合とみなすことができる、という点に注意されたい。

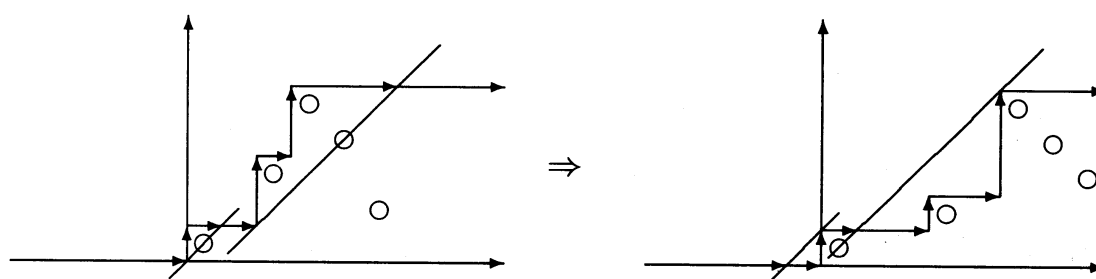
#### 例 3 次の状態

$$\dots 00100110110000 \dots \tag{13}$$

に対する折れ線は次の通り。



このとき、時間発展は次のようになる。すなわち折れ線の折り返しを繰り返して時間発展していく。



ここで、Greene-Fomin 理論を思い出すと、標準盤の形が保存するとはこのスタック順列に付随した半順序集合の chain を考えたとき、 $k$  個の合併の覆う  $\circ$  の個数の最大値が保存するという他に他ならない。これは、スタックの深さが等しい  $\circ$  から作られる chain の長さが保存されるということに等しい。たとえば  $k=1$  ならこれは角の個数の保存ということで図をみれば明らかに成立している。 $k=2$  の場合もこの角を除いて考えれば  $k=1$  の場合に帰着し、以下同様にして任意の  $k$  に対する保存が図をみることによりわかる。詳しくは [A1] を参照していただきたい。つまり、この定理のいっている保存量とスタックの深さとの関係がこのように上の折れ線の時間発展から自然に理解されるというわけである。

## 4 Knuth 同値

さて、RSK 対応の一般論に戻ろう。ここで重要な概念は符号語の集合に対して導入された Knuth 同値性という同値類別である。

**定義 4** 符号語  $x, y \in [1, r]^n$  が次のどちらかの関係で結ばれているとき、 $x \sim_K y$  とかき、この関係で生成される同値類を *Knuth 同値類* という。  $x, y$  が同じ *Knuth 同値類* に属するときも  $x \sim_K y$  とかく。

$$\begin{cases} x = \cdots cab \cdots \\ y = \cdots acb \cdots \end{cases} (a \leq b < c), \quad \begin{cases} x = \cdots bac \cdots \\ y = \cdots bca \cdots \end{cases} (a < b \leq c) \quad (14)$$

Fomin-Greene 理論のもうひとつの重要な結果が次の定理である。

**定理 3**  $x \underset{K}{\sim} y$  ならば  $I_k(\mathcal{P}(x)) = I_k(\mathcal{P}(y))$ ,  $D_k(\mathcal{P}(x)) = D_k(\mathcal{P}(y))$  である。

Greene-Fomin 理論ではこの定理を用いて次の Knuth の定理が示される。

**定理 4**  $x \underset{K}{\sim} y$  であるための必要十分条件は  $P(x) = P(y)$  である。

さて、ここで準標準盤  $T$  に対し、 $reading(T)$  を次のように定める。すなわち、 $T$  の一番下の行から順に左から右へ数字を読んでいって得られる符号語が  $reading(T)$  である。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow 423112$$

このとき、一般に  $x \underset{K}{\sim} reading(\mathcal{P}(x))$  が成り立つ。さらに、次の定理が成立し、 $reading(\mathcal{P}(x))$  を  $x$  を含む Knuth 同値類の代表元とみなすことができる。

**定理 5** 各 Knuth 同値類は準標準盤の  $reading$  として得られる符号語をただひとつ含む。

さて、Knuth 同値類は符号語のあいだの同値関係であるが、準標準盤にも同値関係を導入することができる。ここではヤング図形の形が  $\lambda/\mu$  という形も許す。すなわち、ふたつのヤング図形  $\lambda, \mu$  を上辺と左辺をそろえて並べてかいたとき、包含関係  $\mu \subset \lambda$  が成立していて  $\lambda \setminus \mu$  に数字が書き込まれている準標準盤も考える。

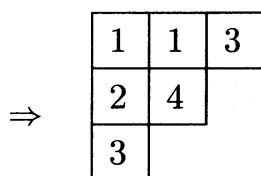
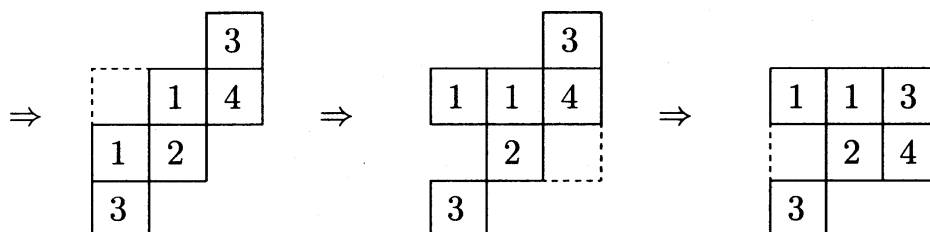
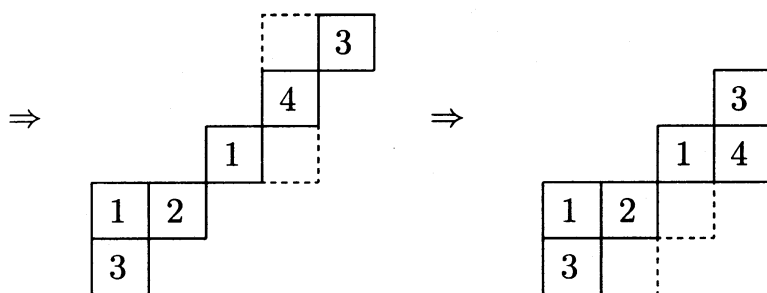
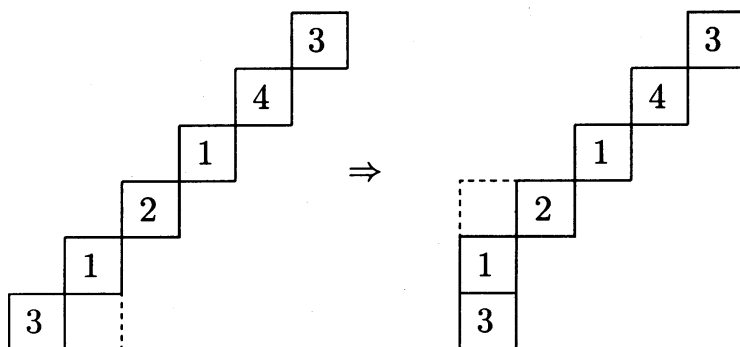
**定義 5** *jeu de taquin* とは次の操作のことである。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline & b \\ \hline a & \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline a \\ \hline \end{array} & (b < a) \\ \downarrow & & & \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} & & & (a \leq b) \end{array}$$

準標準盤  $T_1$  に *jeu de taquin* を繰り返すことにより準標準盤  $T_2$  が得られるとき、 $T_1$  と  $T_2$  は *jeu de taquin* 同値であるといい、 $T_1 \underset{jdt}{\sim} T_2$  とかく。

例をやってみよう。

例 4 符号語 312143 に対し次の形の準標準盤を考えて以下変形していく。



これを  $\emptyset \leftarrow 312143$  と較べると等しいことがわかる。これは一般的な現象であって次の定理が成り立つ。

**定理 6**  $T, T_1, T_2$  を準標準盤とすると次が成立。

- (1)  $T \underset{jdt}{\sim} \text{reading}(T)$ ,
- (2)  $T_1 \underset{jdt}{\sim} T_2 \Leftrightarrow \text{reading}(T_1) \underset{K}{\sim} \text{reading}(T_2)$ .

すなわち、 $x \underset{K}{\sim} \text{reading}(P(x))$  に注意すればこの定理により、 $\text{reading}(T) = x$  になる準標準盤  $T$  から始めればかならず  $P(x)$  に到達することがわかる。さて、ここで LR 規則の jeu de taquin バージョンを紹介しよう。

**定理 7** ヤング図形の形が  $\nu$  の標準盤  $T$  をひとつ固定しておく。このとき、LR 係数  $c_{\mu\nu}^\lambda$  は、形が  $\lambda/\mu$  の標準盤であって  $T$  と jeu de taquin 同値なもの個数に

## 5 クリスタル

前節で述べた組み合わせ論の諸結果のかなりの部分はクリスタルの言葉で解釈できることが知られている。すなわち、

- 符号語の集合  $[1, r]^n$  は  $(A_{r-1}$  型) クリスタル  $B_1^{\otimes n}$  と理解する。
- 形が  $\lambda/\mu$  の準標準盤の集合  $SST(\lambda/\mu)$  を reading により  $B_1^{\otimes n}$  に埋め込むとこれは単なる部分集合ではなく、部分クリスタルである。よって  $SST(\lambda/\mu)$  の代わりに  $B(\lambda/\mu)$  と書き、reading をクリスタルの埋め込み  $B(\lambda/\mu) \subset B_1^{\otimes n}$  と理解する。
- Knuth 同値  $x \underset{K}{\sim} y$  とは、同型な既約部分クリスタル  $B, B'$  が存在して  $x \in B, y \in B'$  かつ同型  $B \simeq B'$  のもとで  $x \leftrightarrow y$  と対応していることであると理解する。

jeu de taquin についても、すべての jeu de taquin がクリスタルの同型を与えるわけではないが、クリスタルの同型と理解できるものも多い。また、先ほどの LR 規則の jeu de taquin バージョンは、次の図式で自然に理解できる。

$$B(\lambda/\mu) \simeq \sqcup B(\nu)^{\otimes c_{\mu\nu}^\lambda} : T \mapsto P(\text{reading}(T)) = \exists ! P \underset{jdt}{\sim} T \quad (15)$$

RSK 対応もクリスタルで理解できる。まず、

$$B(\lambda) \otimes B_1 \simeq \bigsqcup_{\mu: |\mu/\lambda|=1} B(\mu) \quad (16)$$

に注意すれば、 $B_1$  をテンソルしたときどの既約成分に入るかを定めることにより、すなわちヤング図形の成長を記録した標準盤  $Q$  を定めることにより、 $B_1^{\otimes n}$  の既約部分クリスタルを決めることができる。これを  $B(Q)$  とかくと、

$$B_1^{\otimes n} = \bigsqcup_Q B(Q) \quad (17)$$

であり、次の伊達・神保・三輪の定理が成立する。

**定理 8**  $x \in B_1^{\otimes n}$  が  $B(Q)$  に属するのは  $Q(x) = Q$  のときであり、このとき同型  $B(Q) \simeq B(\lambda)$  が  $x \mapsto P(x)$  で与えられる。

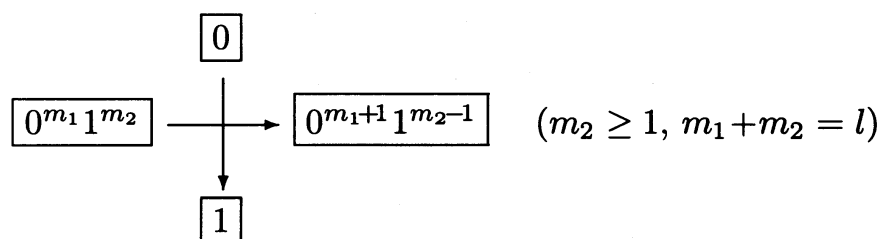
## 6 エネルギー関数とスタック順列

箱玉系に戻ろう。ここでは次の組み合わせ論的転送行列により箱玉系の時間発展を理解する。

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Aff}(B) \otimes \text{Aff}(B) \otimes \cdots \otimes \text{Aff}(B) & \\
 \otimes & \downarrow & \\
 \text{Aff}(B_i) & \xrightarrow{\quad} & \text{Aff}(B_i) \\
 & \downarrow & \downarrow \otimes \\
 & \text{Aff}(B) \otimes \text{Aff}(B) \otimes \cdots \otimes \text{Aff}(B) & 
 \end{array}$$



福田・尾角・山田 [FOY] によって与えられた保存量  $E_l$  を考えると、中屋敷・山田規則によりこれは左端の  $E_l = 0$  から始めて下図の状態に出会ったとき  $E_l$  を 1 増加させつつ右端まで抜けたときに得られる数に等しい。



このとき、次の定理が成り立ち、このことよりこの保存量と鳥居・高橋・薩摩の保存量との関係  $E_l - E_{l-1} = \lambda_l$  が得られる。

**定理 9 (A)** スタック順列を定義するとき用いた括弧付けを考えると、 $E_l$  が増加する場所の全体はスタックの深さが  $l$  以下の閉じる括弧にあたる場所の全体と一致する。

## References

- [A1] S.Ariki, Some remarks on  $A_1^{(1)}$  soliton cellular automata, **math.QA/0008091**.
- [A2] S.Ariki, Robinson-Schensted correspondence and left cells, **math.QA/9910117**.
- [BF] T.Britz and S.Fomin, Finite posets and Ferrers shapes, **math.CO/9912126**.
- [FOY] K.Fukuda, M.Okado and Y.Yamada, Energy functions in box ball systems, **math.QA/9908116**.
- [HHIKTT] G.Hatayama, K.Hikami, R.Inoue, A.Kuniba, T.Takagi and T.Tokihiro, The  $A_M^{(1)}$  automata related to crystals of symmetric tensors, **math.QA/9912209**.
- [NY] A.Nakayashiki and Y.Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, *Selecta Mathematica*, **New Series 3** (1997), 547-599.
- [F] S.V.Fomin, Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood-Richardson rule, Appendix 1 in *Enumerative Combinatorics 2* (1999), Cambridge University Press.
- [TTS] M.Torii, D.Takahashi and J.Satsuma, Combinatorial representation of invariants of a soliton cellular automaton, *Physica D* **92** (1996), 209-220.