数理解析研究所講究録 1221 巻 2001 年 112-124

離散射影微分幾何学はやわかり
– A QUICK INTRODUCTION TO DISCRETISED PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY –

井ノ口 順一 (Jun-ichi Inoguchi)

福岡大学理学部応用数学科
(Department of Applied Mathematics, Fukuoka University)

Abstract. In this talk, I would like to give a "quick course" to discretised projective differential geometry (integrable quadrilateral lattices).

はじめに

まずはクイズから始めたい：

2次元戸田方程式が Darboux の本[3] に登場していたことはよく知られています. では戸田方程式の解が記述する幾何学的実体は何でしょうか？

答えはこの講演で取り上げる「ラプラス系列」である。ラプラス系列は射影微分幾何学と呼ばれる分野の中心的研究対象のひとつであるだけでなく、ここ数年の間に急速に進展した "quadrilateral lattices" の数学的（幾何学的）骨格である。この講演では Doliwa, Santini, Mañas らの仕事[4]–[13], [25]–[30] の数学的構造・背景を理解するために必要な数学的素地を「手っ取り早く」習得できるコースを提供する。

1. Laplace の方法

2変数函数 $Z = Z(x,y)$ に対する偏微分方程式

$$Z_{xy} + a(x,y)Z_x + b(x,y)Z_y + c(x,y)Z + l(x,y) = 0 \tag{1.1}$$

を求積法で解くことを考える。(1.1) を

$$\frac{\partial}{\partial x}(Z_y + aZ) + b(Z_y + aZ) + \{l - (a_x + ab - c)Z\} = 0. \tag{1.1$'$}$$

と書き換え

$$h := a_x + ab - c \tag{1.2}$$

とおく。さらに $h \equiv 0$ と仮定する。このとき (1.1) は次の形になり

$$\frac{\partial}{\partial x}(Z_y + aZ) + b(Z_y + aZ) + l = 0. \tag{1.1$''$}$$

求積法で解ける。実際：

$$s := \int b(x,y)dx, \quad S := e^s(Z_y + aZ)$$

とおくと

$$\frac{\partial S}{\partial x} = e^s b(Z_y + aZ) + e^s\{-b(Z_y + aZ) - l\} = -le^s$$

より

$$S(x,y) = -\int e^s l dx + F(y)$$

の形であることがわかる。従って

$$Z_y + aZ = -e^s\{\int e^s l dx - F(y)\} \tag{1.3}$$

を得た。同様に

$$\tilde{s} := \int a(x,y)dx, \quad \tilde{S} := e^{\tilde{s}} Z$$

とおくと

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = ae^{\tilde{s}}Z + e^{\tilde{s}}Z_y = -e^{\tilde{s}-s}\{\int e^s l dx - F(y)\}$$

より

$$\tilde{S}(x,y) = -\int e^{\tilde{s}-s}\{\int e^s l dx - F(y)\}dy + G(x)$$

を得る。従って

$$Z(x,y) = -e^{-\tilde{s}}\left[\int e^{\tilde{s}-s}\{\int e^s l dx - F(y)\}dy + G(x)\right] \tag{1.4}$$

という形であることがわかる。

途中に出てきた函数 $F(y), G(x)$ は初期条件 $Z(x_0, y)$, $Z(x, y_0)$ を指定することで決まる。この事実を確認しておこう。

$$\begin{aligned} F(y) &= S(x,y) + \int e^s l dx = e^s(Z_y + aZ) + \int e^s l dx \\ &= \left[e^s(Z_y + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}Z) + \int e^s l dx\right](x,y). \end{aligned}$$

$F(y)$ は x に依存しないのだから右辺の $x = x_0$ での値で決まってしまう。また

$$G(x) = \tilde{S}(x,y) + \int e^{\tilde{s}-s}\{\int e^s l dx - F(y)\}dy$$

より $G(x)$ は右辺の $y = y_0$ での値で決まる。ここまでの議論は $k := b_y + ab - c \equiv 0$ の場合にも並行して行えることを注意しておく。以上を整理しておく。

定理 1.1. 偏微分方程式：

$$Z_{xy} + a(x,y)Z_x + b(x,y)Z_y + c(x,y)Z + l(x,y) = 0 \tag{1.1}$$

において $h = a_x + ab - c \equiv 0$ あるいは $k = b_y + ab - c \equiv 0$ であればこの偏微分方程式は求積法で解ける。

この定理の結論からすれば 2 種の函数 h, k は (1.1) が求積法で解けるための障害 (obstructions) と考えられる。h, k を (1.1) の「ラプラス不変量」(*Laplace invariants*) とよぶ。

註. 「ラプラス不変量」という名称を用いたが "どのような意味で不変量" であるかはまだ明らかではない。偏微分方程式論から「曲面の射影微分幾何学」へ移行することで「不変性」が説明される。また定理 1.1 は自然にベクトル値函数に拡張できることに注意されたい。

2. Laplace 変換

前節では「求積法」で解けるための障害物としてラプラス不変量を導入した。ここでは発想を逆転させて「消えないとはどういうことか」に関心を向ける。

ラプラス不変量 h, k が消えていない場合を考えよう。

$$Z_1 := Z_y + aZ \tag{2.1}$$

と定義する。(1.1) より

$$(Z_1)x + bZ_1 + (l - hZ) = 0,$$
$$(Z_1)xy + b(Z_1)y + b_y Z_1 + (l - hZ)_y = 0$$

を得る。ここで

$$a_1 := a - \frac{h_y}{h},\ b_1 := b,\ c_1 := ab + h(\frac{b}{h})_y - h$$

と定義すると Z_1 についての次の方程式が得られる。

$$(Z_1)_{xy} + a_1(Z_1)_x + b_1(Z_1)_y + c_1(Z_1) + l_1 = 0 \tag{2.2}$$

Z_1 は (1.1) の解ではないが同じ形の別の偏微分方程式 (2.2) の解を与えている。変換 $Z \mapsto Z_1$ の意味をつかむためには幾何学の知識を必要とする。同様に $Z \mapsto Z_{-1} = Z_x + bZ$ も考えられる。

定義 2.1. Z_1 を Z の 1st *Laplace transform*, Z_{-1} を (-1)st *Laplace transform* と呼ぶ。

命題 2.2. $Z_1 = \mathcal{L}_+(Z)$, $Z_{-1} = \mathcal{L}_-(Z)$ と書くことにすると

$$(\mathcal{L}_- \circ \mathcal{L}_+(Z) + l) = hZ, \quad (\mathcal{L}_+ \circ \mathcal{L}_-(Z) + l) = kZ$$

が成立する。

特に $l = 0$ の場合は

$$\mathcal{L}_- \circ \mathcal{L}_+(Z) = h,\ \ \mathcal{L}_+ \circ \mathcal{L}_-(Z) = k$$

である。これはラプラス変換が「射影幾何学的」であることを示唆している。

3. 曲面に対する LAPLACE 変換

Darboux は前節で与えたラプラス変換を微分幾何学に応用した。まず幾何学のどういう場面にこの形の偏微分方程式が現れるかを考えよう。手始めに (局所的) 曲面の微分幾何学における基本方程式「ガウスの公式」を思い出そう。$\mathbf{Z}(u^1, u^2)$ で 3 次元（ユークリッド）空間内の曲面の位置ベクトル場を表すことにしよう。単位法ベクトル場を $\mathbf{n}$ と書く。$\mathbf{Z}$ の 2 階微分 $\mathbf{z}_{u^i u^j}$ を曲面の接方向と法方向に分解した式:

$$(3.1) \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial u^k} + h_{ij}\mathbf{n}$$

を Gauss の公式 (Gauss formula) とよぶ。接方向の係数 Γ_{ij}^k を接続係数、 法方向の係数 h_{ij}(で決まる対称微分形式 ($II = h_{ij}du^i du^j$) を第二基本形式とよぶ。接続係数は $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ を満たすことを注意しておく。

実はラプラス変換が適用可能な曲面については「計量」がなくてもよい。実際 (3.1) のような分解さえあればよい。すなわち次のような状況下で話を進めてよい。

曲面 $\mathbf{Z}$ に対し接続 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ と横断的ベクトル場 ξ が存在し次の分解が成立する。

$$(3.2) \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial u^k} + h_{ij}\xi, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

この状況にあう設定には

(I) 擬ユークリッド空間 $\mathbb{E}_\nu^3$, $\nu = 0, 1, 2$ における空間的曲面・時間的曲面[1];

(II) 等積アファイン空間 $\mathbb{A}^3$ におけるアファイン曲面[2]

がある。(1.1) の形の偏微分方程式は次の定義 3.1 の形の局所座標系を扱う際に自然に登場する。

定義 **3.1.** (I) または (II) の設定下で $h_{12} = 0$ となる局所座標系 (u^1, u^2) が採れるとき (u^1, u^2) を共軛網 (*conjugate nets*) と呼ぶ。

共軛網で径数づけられたはめ込みの場合, ガウスの公式は

$$(3.2) \qquad \mathbf{Z}_{u^1 u^2} - \Gamma_{12}^1 \mathbf{Z}_{u^1} - \Gamma_{12}^2 \mathbf{Z}_{u^2} = \mathbf{0}$$

となりこれは (1.1) の形である。さらにラプラス変換は次で与えられる:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{u^2}/\Gamma_{12}^1, \quad \mathbf{Z}_{-1} = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{u^1}/\Gamma_{12}^2.$$

---

[1]相対論等に応用される

[2]情報幾何学に応用される. また Dodd-Bollough 方程式の幾何学的研究に必要な概念である

例 **3.2.** (回転面)
3 次元ユークリッド空間内の回転面：

$$\mathbf{Z}(x,y)=(f(x)\cos y,\ f(x)\sin y,\ g(x)),\ f>0,\ f'(x)^2+g'(x)^2=1.$$

を考える。回転面の計量 I, 第二基本形式 II は次で与えられる:

$$I=dx^2+f(x)^2dy^2,\quad II=(f'g''-f''g')dx^2+fg'dy^2.$$

特に (x,y) は共軛網である。$(u^1,u^2)=(x,y)$ と選べば

$$\Gamma^1_{12}=0,\quad \Gamma^2_{12}=(\log f)'.$$

であるから回転面 $\mathbf{Z}$ は次をみたす。

$$\mathbf{Z}_{xy}-(\log f)'\mathbf{Z}_y=\mathbf{0}.$$

ラプラス不変量を計算してみると

$$h=-\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}\equiv 0,$$

$$k=-\frac{\partial}{\partial y}\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\log f(x))\equiv 0$$

であるからラプラス変換を考えることはできない。ただし形式的には $\mathbf{Z}_{-1}$ を計算することはできる。

$$\mathbf{Z}_{-1}=\mathbf{Z}_x-\frac{f'}{f}\mathbf{Z}=(0,0,g'-fg')$$

この場合 $\mathbf{Z}_{-1}$ は回転軸の一部である。

例 **3.3.**
共軛網 (x,y) で径数づけられた曲面:

$$\mathbf{z}(x,y)=\left(\frac{e^{xy}(xy-1)}{y^2},\frac{e^{xy}(x^2-2xy+2)}{y^3},\cos y\right)$$

を考える。この例では $h=1$ である。$\mathbf{z}$ の 1st Laplace transform $\mathbf{z}_1$ は

$$\mathbf{z}_1=\left(\frac{e^{xy}(xy-2)}{xy^3},\frac{e^{xy}(x^2y^2-4xy+6)}{xy^4},\frac{x\cos y+\sin y}{x}\right)$$

で与えられる [37]。

4. 射影空間

いままでの観察からするとラプラス変換は「射影幾何学的」であるといえる。そこで, 次節から 3 次元実射影空間内の曲面に対するラプラス変換を考える。この節では「少々の準備・復習」と「寄り道」をする。

$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を通る直線全体を P^n で表し n 次元射影空間とよぶ。$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n+1}$ が同一の直線 $x \in P^n$ を定めることと $\mathbf{y} = \mathbf{x}\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R}^*$ であることが同値なので P^n は商空間 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathbb{R}^*$ と表示される。射影 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to P^n$ は（位置）ベクトル $\mathbf{x}$ に対し $\mathbf{x}$ を通る直線 $x = \pi(\mathbf{x})$ を対応させるものとして定まる。$x \in P^n$ に対し $x = \pi(\mathbf{x})$ となる $\mathbf{x}$ をひとつとり、その成分の連比 $x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}$ を x の斉次座標 (homogeneous coordinates) とよび $[\mathbf{x}] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$ と表す。($\mathbf{x}$ そのものを斉次座標と呼んでしまうこともある). あとは非斉次座標 (inhomogeneous coordinates), affine chart を復習しておく必要がある。一般的な表記よりも $n = 1$ の場合を書いてみるのがわかりやすい。

$$\hat{U}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mid x_1 \neq 0\ \},\quad \hat{U}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mid x_2 \neq 0\ \},$$

とおく。

$$P^1 = U_1 \cup U_2,\quad U_i = \pi(\hat{U}_i)$$

であることに注意しよう。$U_1 \ni x = [x_1, x_2]$, $x_1 \neq 0$ に対し $[x_1, x_2] = [1 : x_2/x_1]$ であるから U_1 内の "点" x の座標として x_2/x_1 を採用できる。これを x の (U_1 における) 非斉次座標とよぶ。対応:

$$\mathbb{R}^1 \ni z \mapsto [1 : z] \in U_1,$$

$$U_1 \ni [p : q] \mapsto q/p \in \mathbb{R}^1$$

により $\mathbb{R}^1 \subset P^1$ とみることができる (U_2 についても同様). $\mathbb{R}^1 \subset P^1$ を P^1 の affine chart とよぶ.

ここで Logistic 方程式を例にとり射影構造の観点に親しんでもらう.[3] Logistic 方程式

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1 - \lambda N)$$

の双線型化および差分化のキーポイントは Logistic 方程式のもつ「ゲージ不変性」であった. まず「有理形変換」$N = g/f$ を行う。このとき Logistic 方程式は

$$g'f - gf' = \alpha g(f - \lambda g)$$

の形になる。この方程式は「ゲージ変換」

$$f(t) \mapsto f(t)h(t),\quad g(t) \mapsto g(t)h(t)$$

で不変である。「ゲージ不変性」と有理形変換は射影的解釈ができる。未知函数 N を

$$N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^1 \subset P^1$$

[3]この例は廣田先生の講演[18] を聞いて思いついた。

と思い直す. つまり $N(t) = [1 : N(t)]$ と理解する. すると $[1 : N(t)] = [1 : g(t)/f(t)] = [g(t) : f(t)]$ であるから「有理形変換とは未知函数の斉次座標を一つ選ぶこと」である。次にゲージ変換をみよう。斉次座標を $[f(t) : g(t)] = [\tilde{f}(t) : \tilde{g}(t)]$ と取り替えてみると (定義から)$\tilde{f} = fh,\ \tilde{g} = gh$ となる函数 h が存在する. つまり

$$[f(t) : g(t)] = [f(t)h(t) : g(t)h(t)]$$

これは先に挙げたゲージ変換そのものである。非斉次座標でみれば

$$\frac{g(t)h(t)}{f(t)h(t)} = \frac{g(t)}{f(t)} = N(t)$$

である。従って「ゲージ変換とは未知函数の斉次座標変換」に他ならないことがわかる。(ここまでの話では単なる「別解釈」を挙げただけにみえる) 実は射影的にみることで射影変換群 $\mathrm{PSL}_2\mathbf{R}$ による対称性が明確になることを喚起しておく。[4]

この例に限らず「有理形変換で解ける」ことは射影不変性の反映であると考えられる。最後にも注意するが「射影幾何」は可積分系理論において「馴染み深い幾何」である。

5. 射影微分幾何学

いよいよ射影微分幾何を始める。なお本節の内容は佐々木[33] による。曲面 $z : M \to P^3$ の斉次座標ベクトル場を $\mathbf{z}$ で表わす。まず射影微分幾何学における「共軛網」の定義を引用しておく。

定義 5.1. A coordinate system (x, y) is said to be a *conjugate net* if the limit of the line $T_{z(x,y)} \cap T_{z(x+dx,y)}$ as $dx \to 0$ tends to a line that is parallel to the vector z_y. Here $T_{z(x,y)}$ denotes the tangent space of the surface in P^3.

このままでは使いにくいので次の補題を用意する。

補題 5.2. M の局所座標系 (x, y) が曲面 $z : M \to P^3$ に対する共軛網であるための必要十分条件はある斉次座標ベクトル場 $\mathbf{z}$ に対し

$$\mathbf{z}_{xy} \wedge \mathbf{z}_x \wedge \mathbf{z}_y \wedge \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

が成立することである。(従ってどの斉次座標ベクトル場についてもこの関係を満たす。) 言い換えると

$$\mathbf{z}_{xy} + a(x, y)\mathbf{z}_x + b(x, y)\mathbf{z}_y + c(x, y)\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

となる函数 a, b, c が存在することである。

証明). 斉次座標を $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{w}$ と変えると (5.1) は

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}_{xy} + (a(\log\lambda)_y)\mathbf{w}_x + (b(\log\lambda)_x)\mathbf{w}_y \\ &\quad + \{c + a + (\log\lambda)_x + b + (\log\lambda)_y + \lambda_{xy}/\lambda\}\mathbf{w} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.2}$$

[4]最近の「可積分系の幾何学的研究」で見えてきたことの一つに「中間的な対称性の群」がある。有限次元対称性の群（ユニタリ群など）と無限次元群（ループ群）の他になにか別の対称性の群が存在していることを指す。これらの「中間的な対称性」が離散化のキーポイントである。([23] 参照) 直交群より大きい「射影変換群」や「共形変換群」などが典型例である。現代では無限次元対称性に我々は慣れ親しんでしまったから "hidden"という感じが薄れているようにも思える。そこで（個人的には）このような「中間的な対称性」こそ "hidden symmetry" とよんでみたいと思っている。

と変わる。 □

とくに λ が (5.1) の解 (scalar solution) ならば

$$\mathbf{w}_{xy} + \tilde{a}\mathbf{w}_x + \tilde{b}\mathbf{w}_y = \mathbf{0}$$

の形にできる。(5.1), (5.2) はともに (1.1) の形である。従って $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ に対しラプラス変換を考えられる。

補題 5.3. $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ それぞれのラプラス不変量を h, k, h', k' とすれば

$$h = h',\ k = k'$$

である。

補題 5.4. 共軛網の変換

$$x = x(u),\ y = y(v)$$

を行ったとき新しい共軛網に関するラプラス不変量を $\tilde{h}$, $\tilde{k}$ で表わすと

$$hdxdy = \tilde{h}dudv,\ kdxdy = \tilde{k}dudv.$$

が成立する。

これらの補題から次のことが読み取れる。M が共軛網で覆われているならば $h^{\#} = hdxdy$, $k^{\#} = kdxdy$ は大域的に定義された微分形式である。そこで $h^{\#}$, $k^{\#}$ を z のラプラス不変量と呼ぶ。これでやっと「不変」の意味が説明できた。以下では微分形式 $h^{\#}$, $k^{\#}$, その係数 h, k もどちらもラプラス不変量と呼ぶことにする。[5]

命題 2.2 からラプラス変換 $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}_{\pm 1}$ が「射影的」であることが予想された。実際次を示せる。(やさしい。)

命題 5.5. 斉次座標ベクトル場に対するラプラス変換は射影空間内の曲面に対する変換を誘導する。すなわち

$$[\mathbf{z}_{\pm 1}] = [\mathbf{w}_{\pm 1}].$$

証明).

$$\mathcal{L}_+(\mathbf{z}) = (\lambda\mathbf{w})_y + \lambda a\mathbf{w} = \lambda_y\mathbf{w} + \lambda\mathbf{w}_y + \lambda(\tilde{a} - \frac{\lambda_y}{\lambda})\mathbf{w} = \lambda(\mathbf{w}_y + \tilde{a}\mathbf{w})$$

従って $[\mathbf{z}_1] = [\mathbf{w}_1]$. □

これら誘導された変換も「ラプラス変換」と呼ぶ。命題 2.2 より P^3 内ではラプラス変換は可逆である:

$$(z_1)_{-1} = z,\ (z_{-1})_1 = z \quad \text{in} \quad P^3.$$

ラプラス変換を繰り返し施すことで P^3 内の「曲面の列」を得る。

$$\cdots \leftarrow z_{-i} \leftarrow \cdots \leftarrow z_{-2} \leftarrow z_{-1} \leftarrow z \to z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_i \to \ldots$$

この系列 $\{z_i\}$ を「ラプラス系列」と呼ぶ。対応するラプラス不変量を $\{h_i\}$, $\{k_i\}$ で表わそう。ラプラス不変量の列の関係式が次で与えられる。

---

[5] 曲面 $z : M \to P^3$ において $(M, h^{\#}, k^{\#})$ は bi-conformal structure を定めている。これは大雑把には「曲面の可積分性」を象徴している。KdV に対する bi-Hamiltonian structure を想起されたい。

命題 5.6.

(1)
$$h_{i+1}=2h_i-k_i-\frac{\partial^2\log h_i}{\partial x\partial y},$$
$$k_{i+1}=h_i,$$
$$k_i=2k_{i+1}-h_{i+1}-\frac{\partial^2\log k_{i+1}}{\partial x\partial y},$$

(2)
$$h_{i+1}+h_{i-1}=2h_i-\frac{\partial^2\log h_i}{\partial x\partial y},\quad k_{i+1}+k_{i-1}=2k_i-\frac{\partial^2\log h_i}{\partial x\partial y},$$

(3)
$$h_{i+1}=h_i+h-k-\left(\log(\prod_{j=0}^{i}h_j)\right)_{xy},\quad k_{i+1}=k_i+h-k-\left(\log(\prod_{j=1}^{i}h_j)\right)_{xy}.$$

ただし $h_0=h$ と規約した。さらに $h_i=e^{\omega_i}$ とおけば (2) は A 型の戸田場方程式である。ただし ω_i の個数は有限とは限っていない。以下では「周期的ラプラス系列」に関心を向ける。ラプラス不変量から見れば周期的戸田方程式（アファイン戸田方程式）を考えることに他ならない。

例 5.6. (周期 1 の場合) 周期 $=1$ より $h_1=h$, $k_1=k$ である。特に $h=k$ である。ゆえに $(\log h)_{xy}=0$ を得るがこれは $h(x,y)=u(x)v(y)$ を意味する。そこで共軛網の変更を行い $h=k=1$ とする。変更後の共軛網も同じ記法 (x,y) で表わすと
$$z_{xy}=z$$
を得る。

例 5.7. (周期 2 の場合) $h_2=h$, $k_2=k$ より
$$2k-2h=\frac{\partial^2\log h}{\partial x\partial y},\quad 2h-2k=\frac{\partial^2\log k}{\partial x\partial y}$$
を得る。さらに $\{\log(hk)\}_{xy}=0$ がわかる。そこで共軛網の変更を行い $hk=1$ とする。変更後の共軛網も同じ記法 (x,y) で表わし $h=e^{\omega}$ とおくと戸田方程式は
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=4\sinh\omega$$
の形になる。この方程式は 3 次元ミンコフスキー空間内の平均曲率一定時間的曲面のガウス・コダッチ方程式とみなせることを注意しておく。Hu [20] 及び拙著 [21] 参照.

註.
周期 4 の場合が Finikof [16], Hu [19], [20], Su [36] で扱われている。また周期 6 の場合が Ferapontov–Schief [14] で扱われている。周期 3 の場合は Dodd-Bollough 方程式に還元する.[6]

註. 楕円型の戸田方程式
$$h_{i+1}+h_{i-1}=2h_i-\frac{\partial^2\log h_i}{\partial z\partial\bar z},\quad z=x+\sqrt{-1}y$$
の幾何学的意味については Bolton-Pedit-Woodward [2] を参照.[7]

---

[6] これについては次回（来年度）解説したい

[7] [2] では一般のルート系に対するアファイン戸田方程式の幾何学的対応物を記述し

6. 離散化

いよいよ離散化であるが既にページを浪費してしまったので昨年同様、“どうやるか”を手短かに紹介するにとどめる。[8]

射影空間内の「共軛網で径数付けられた曲面」$z : M \to P^3$

$$\mathbf{z}_{xy} + a\mathbf{z}_x + b\mathbf{z}_y + c\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{6.1}$$

の離散化を考える。[9] 方程式 (6.1) は $\mathbf{z}_{xy}$ が「$\mathbf{z}_x, \mathbf{z}_y, \mathbf{z}$ の定める平面に収まる」という意味だから[10] 離散化は次のように定義される。

定義 **6.1.** $z = z(n_1, n_2) : \mathbb{Z}^2 \to P^3$ が次の条件を満たすとき *quadrilateral lattice* とよぶ。

$$T_1T_2z \in \langle z, T_1z, T_2z \rangle$$

ここで T_i は方向のシフト作用素 $\langle z, T_1z, T_2z \rangle$ は z, T_1z, T_2z の定める平面を表す。

Doliwa たちは非斉次座標系を用いた表示を使っているのでそれにあわせておこう。

定義 6.1′. 格子 $z = z(n_1, n_2) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ が discrete Laplace equation

$$\Delta_1\Delta_2 z = (T_1A_{12})\Delta_1 z + (T_2A_{21})\Delta_2 z$$

を満たすとき quadrilateral lattice とよぶ。ここで $\Delta_i := T_i - 1$ は i 方向の差分作用素を表す。

T_iz 方向の係数に T_iA_{ij} という番号の付け方をするのは「離散ラプラス系列」の添え字を国場・中西・鈴木[24] と合わせるためである.[11] ラプラス変換の離散化は次のように定義される。

$$\mathcal{L}_+ z := z - \frac{1}{A_{21}}\Delta_1 z, \quad \mathcal{L}_- z := z - \frac{1}{A_{12}}\Delta_2 z.$$

命題 **6.2.** 離散ラプラス変換は可逆:

$$\mathcal{L}_+ \circ \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_- \circ \mathcal{L}_+.$$

離散ラプラス変換で係数 A_{ij} は次のように変わる:

$$\mathcal{L}_+ A_{12} = \frac{A_{21}}{T_2A_{21}}(T_1A_{12} + 1) - 1,$$

$$\mathcal{L}_+ A_{21} = T_2^{-1}\left(\frac{T_1\mathcal{L}_+(A_{12})}{\mathcal{L}_+(A_{12})}(A_{21} + 1)\right) - 1.$$

離散ラプラス変換を繰り返して得られる系列 $\{z^l\}$

$$z^l := \mathcal{L}_+^l z, \ z^{-l} := \mathcal{L}_-^l z, \ l \in \mathbb{N}$$

を（離散）ラプラス系列とよぶ。

---

[8]「離散化以前の “射影微分幾何学”が学びにくいのであってそこさえつかんでしまえば後は “勝手知ったる領域”であるから原論文にあたるのはたやすくなるはず」という言い訳をさせてください。また「弦理論」的解釈については齋藤[32] を参照.

[9][23] でも注意したように「曲面の離散化」ではなく「座標系の離散化」を行う.

[10](6.1) $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{z}_{xy} \wedge \mathbf{z}_x \wedge \mathbf{z}_y \wedge \mathbf{z} = \mathbf{0}$ を思い出す.

[11]これは鈴木・高木 のお二人が講演直後に黒板で確かめてくれた。

命題 6.3. (*Laplace sequences*) 離散ラプラス系列の係数 $\{A^l_{ij}\}$ は次の差分方程式[12]をみたす。

$$\frac{\Delta_2 A^l_{21}}{A^l_{21}} = \frac{T_1 A^l_{12} - A^{l+1}_{12}}{(T_1 A^l_{12}+1)(A^{l+1}_{12}+1)},$$

$$\frac{\Delta_1 A^l_{12}}{A^l_{12}} = \frac{T_2 A^l_{12} - A^{l-1}_{21}}{(T_2 A^l_{21}+1)(A^{l-1}_{21}+1)}.$$

ここで「複比」を使う。$\mathbb{R}^3$ 内の colinear な 4 点 q_1, q_2, q_3, q_4 に対し

$$Q(q_1,q_2,q_3,q_4) := \left(\frac{q_3-q_1}{q_3-q_2}\right) : \left(\frac{q_4-q_1}{q_4-q_2}\right)$$

で定まる実数 $Q = Q(q_1,q_2,q_3,q_4)$ を複比 (cross ratio) とよぶ。複比は P^3 の射影変換 $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ で不変な量である。Q は "形式的" に

$$Q(q_1,q_2,q_3,q_4) := \frac{q_3-q_1}{q_3-q_2} \cdot \frac{q_4-q_2}{q_4-q_1}$$

と計算することができる。[13]

離散ラプラス系列に対し次の 2 種の複比を考えられる。

$$K_{12} := Q(z, \mathcal{L}_+(z), T_1 z, T_2 \mathcal{L}_+(z)),$$
$$K_{21} := Q(z, \mathcal{L}_-(z), T_2 z, T_1 \mathcal{L}_-(z)).$$

ここで $K = K_{12}$ と略記しよう。すると K に関する次の方程式が得られる。

$$T_2\left(\frac{K^{l+1}+1}{K^l+1}\right) T_1\left(\frac{K^{l-1}+1}{K^l+1}\right) = \frac{(T_1T_2K^l)K^l}{(T_1K^l)(T_2K^l)}.$$

これは国場・中西・鈴木 [24] における T-system である。(廣田[16] による差分戸田方程式のゲージ不変形式)[14]

この拙ない解説を手がかりに原論文に挑もうという場合はまず SIDE III Proceeding 内の Doliwa [6], Doliwa-Santini [11] から読み始めるとよいと思う。

おわりに

射影（微分）幾何、とくに line geometry とよばれていた内容は可積分系の研究者には実は馴染み深いものであることを注意してこの「はやわかり」を終えたい。[15]

- （有限次元・無限次元を問わず）グラスマン多様体は Plücker 埋め込みを介して射影空間内の部分多様体として「射影幾何学」の範疇で取り扱うことができる。
- 廣田形式に書かれた KP は普遍グラスマン模型の Plücker 関係式と理解される。[16]

---

[12] discrete coupled Volterra equations

[13] 共形不変な複比は平均曲率一定曲面の離散化のキーであった（[23] に説明あり）

[14] と Doliwa は呼んでいる。

[15] A. Doliwa, Discrete asymptotic nets and W-congruences in Plücker line geometry, solv-int/9909015 も参照されるとよい。

[16] 三輪・神保・伊達「ソリトンの数理」, 岩波応用数学対象 4 , 8 章から 10 章。

• 直接法[17] で活躍する行列式・Pfaff 式・ラプラス展開・Plücker 関係式は射影幾何 (line geometry) において自然な概念である。

謝辞: 昨年に引き続き講演の機会をくださった筧三郎 先生・中村佳正先生に感謝いたします。また講演後に[6] と[24] の関連につきご教示いただいた廣田良吾先生・国場敦夫先生・鈴木淳史先生・高木太一郎先生に感謝いたします。

References

1. L. V. Bogdanov and B. G. Konopelchenko, Lattice and q-difference Darboux–Zakharov– Manakov system via $\bar{\partial}$ method, J. Phys. A **28** (1995), 173-178.
2. J. Bolton, F. Pedit and L. Woodward, Minimal surfaces and the affine Toda field model, J. Reine Angew. Math. **459** (1995), 119–150 MR96f:58040.
3. G. J. Darboux, *Théorie Générale des Surfaces*, Chelsea, 1888–1896.
4. A. Doliwa, Geometric discretization of the Toda system, Phys. Letter A. **234** (1997), 187-192.
5. ———, Quadratic reductions of quadrilateral lattices, J. Geom. Phys. **30** (1999), 169–186.
6. ———, Lattice geometry of Hirota equation, *SIDE III–symmetries and integrability of difference equations* (*Sabsudia*, 1998), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 25, Amer. Math. Soc., 2000, pp. 93–100.
7. A. Doliwa, S. V. Manakov and P. M. Santini, $\bar{\partial}$-reduction of the multidimensional quadrilateral lattice. The mulitidimensional circular lattice, Comm. Math. Phys. **196** (1998), 1-18 MR 2000a:57072.
8. A. Doliwa, M. Mañas and A. L. Martínez, Generating quadrilateral and circular lattice in KP theory, Phys. Lett. A **262** (1999), 330–343.
9. A. Doliwa, M. Mañas, A. L. Martínez, E. Medina and P. M. Santini, Charged free fermions, vertex operators and the classical theory of conjugate nets, J. Phys. A **32** (1999), 1197–1216 MR 2000f:37094..
10. Doliwa and P. M. Santini, Multidimensional quadrilateral lattices are integrable, Phys. Lett. A **233** (1997), 365–372 MR98f:58100.
11. ———, Integrable discrete geometry: the quadrilateral lattice, its transformations and reductions, *SIDE III–symmetries and integrability of difference equations* (*Sabsudia*, 1998), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 25, Amer. Math. Soc., 2000, pp. 101–119.
12. ———, The symmetric, d-invariant and Egorov reduction of the quadrilateral lattice, J. Geom. Phys. **36** (2000), 60–102.
13. A. Doliwa, P. M. Santini and M. Mañas, Transformations of quadrilateral lattices, J. Math. Phys. **41** (2000), 944–990.
14. E. V. Ferapontov and W. K. Schief, Surfaces of Demoulin: Differential geometry, Bäcklund transformations and Integrability, J. Geom. Phys. **30** (1999), 343–363.
15. P. S. Finikoff, Sur les suites de Laplace constent des congruences de Wilczinski, C. R. Acad. Sci. **189** (1929), 517–519.
16. R. Hirota (廣田良吾), Discrete analogue of a generalized Toda equation, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3785-3791.
17. ———, 差分方程式の形, 数学セミナー, 2000-9, 38–41.
18. ———, 差分方程式の "理想的" 差分化, This volume (本講究録).
19. H.-S. Hu (胡和生), Darboux transformation of Su-chain, *Differential Geometry– Proc. Symp. in honour of Prof. Su Buchin on his 90th birthday*, World Scientific, 1993, pp. 108–113.
20. ———, On the geometry of sinh-Gordon equation, *Proc. Workshop on Qualitative Aspects and Applications of Nonlinear Evolution Equations*, World Scientific, 1994, pp. 35–47.
21. J. Inoguchi, Darboux transformations on timelike constant mean curvature surfaces, J. Geom. Phys. **32** (1999), 57–78.
22. ———, Integrable systems in projective differential geometry I (in Japanese), *Hamiltonian Systems in Differential Geometry* (R. Miyaoka and Y. Ohnita, eds.), Tokyo Metropolitan University, 1998, pp. 68–78.

[17]廣田「直接法によるソリトンの数理」岩波, 第２章。

23. ______, 可積分な曲面-離散化された微分幾何学へ向けて (Integrable surfaces and their discretisations),「離散可積分系に関する最近の話題」(*Recent Topics on Discrete Integrable Systems*), 京都大学数理解析研究所講究録 (RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.), vol. 1170, 2000, p. 9–22 (in Japanese).
24. A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki (国場敦夫・中西知樹・鈴木淳史), Functional relations in solvable lattice models: I. Functional relations and representation theory, Int. J. Modern Phys. A. **9** (1994), 5215-5312.
25. Q. P. Liu and M. Mañas, Vectorial Ribaucour transformations for the Lamé equations, J. Phys. A **31** (1998), L193–L200 MR 99c:58178.
26. ______, Discrete Levy transformations and Casorati determinat solutions of quadrilateral lattices, Phys. Lett. A **239** (1998), 159–166 MR 99f:39027.
27. ______, From Ramond fermions to Lamé equations for orthogonal curvilinear coordinates, Phys. Lett. B **436** (1998), 316–322 MR 99f:58101.
28. ______, Sequences of Levy transformations and multi-Wroński determinant solutions of Darboux system, J. Geom. Phys. **27** (1998), 178–184.
29. ______, Reduced vectorial Ribaucour transformation for Darboux-Egoroff equation, solv-int/980505.
30. M. Mañas, A. Doliwa and P. M. Santini, Darboux transformations for multidimensional quadrilateral lattices I, Phys. Lett. A **232** (1997), 99–105 MR98h:58178.
31. A. Morimoto (森本明彦),「*Darboux* の曲面論について（現代的視点から）」, vol. 7, Reports on Global Analysis, 1984.
32. S. Saito(斎藤暁), 弦模型の離散幾何学 (Discrete geometry of the string model),「離散可積分系の応用数理」(*Applied Mathematics of Diacrete Integrable Systems*), 京都大学数理解析研究所講究録 (RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ.), vol. 1098, 1999, p. 96–103 (in English).
33. T. Sasaki (佐々木武), *Projective Geometry and Linear Homogeneous Differential Equations*, Rokko Lectures in Math., vol. 5, Kobe University, 1999.
34. ______, *On line congruences and Laplace transformations*, in preparation.
35. ______, 名著発掘：*G. J. Darboux, "Théorie Générale des Surfaces"*, 数学の楽しみ **9** (1998), 133–141.
36. B. Su, On certain periodic sequence of Laplace of period four in ordinary space, Rep. Tôhoku Imperial Univ. **(1) 25** (1936), 227–256.
37. K. Tenenblat, *Transformations of Manifolds and Applicatuions to Differenatial Equations*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. **93**, Longman, 1998.

Department of Applied Mathematics, Fukuoka University, Nanakuma, Fukuoka, 814-0180, Japan
E-mail address: inoguchi@bach.sm.fukuoka-u.ac.jp