数理解析研究所講究録 1223 巻 2001 年 93-106

L^2-torsion of a surface bundle over S^1 and a hyperbolic volume

Teruaki KITANO, Tokyo Inst. Tech.
(北野晃朗、東京工業大　理工) * ,
Takayuki MORIFUJI, Tokyo Univ. Agricul. Tech.
(森藤孝之、東京農工大　工)†
and Mitsuhiko TAKASAWA, Tokyo Inst. Tech.
(高沢光彦、東京工業大　情報理工)

April, 2001

目 次

---

*住友財団より援助
†風樹会より援助

1 はじめに

古典的な Mostow の剛性定理により、完備で有限体積を持つ双曲的多様体の基本群はその多様体の体積を知っています。では具体的に、その基本群の表示が一つ与えられたとして、その表示から体積を計算するにはどうしたらよいでしょうか？　その一つの方法を L^2-torsion は与えてくれます。もちろん、それは理論的にで、実際に計算を実行できるという意味ではありません。

L^2-torsion は、モースの不等式の一般化に関する研究 [22, 23]、そして、リーマン多様体上の等長的な有限群の作用に関する Reidemeister-Ray-Singer torsion の研究を経て、L^2-analytic torsion が Lott[13]、Mathai[20] らによって定義されました。これは有限次元平坦ベクトル束に対する Ray-Singer analytic torsion の無限次元平坦ヒルベルト加群束への拡張と言う事ができます。特に [13] では、3 次元閉双曲的多様体に対して、L^2-analytic torsion の -3π 倍がその多様体の双曲的体積と一致する事が示されています。その後 [10, 18] において、一般の奇数次元の双曲的多様体に対しても、同様の結果が成り立つ事が示されています。

一方で、Carey-Mathai, Lück ら [5, 15] によって、元々の組み合わせ的な Reidemeister torsion に対応する組み合わせ的な L^2-combinatorial torsion もほぼ同時期に定義されました。

当然、両者が定義された時から、これらの L^2-torsion は等しいかという事は問題とされました。これについては、まず、Burghela-Friedlander-Kappeler-McDonald [3] により、閉リーマン多様体に対して両者は等しい事が証明されました。その後、Carey-Farber-Mathai[4] による別証明も与えられています。後に、Lück-Schick [18] によってカスプを持つ体積有限な双曲多様体に対しても L^2-analytic torsion が拡張され、2 つの torsion が一致する事が証明されています。

この原稿の中では、これらの事実を踏まえて 2 つの torsion を区別せずに、単に L^2-torsion と呼ぶ事にします。そして、以下 L^2-torsion の組み合わせ的定義、基本的な性質に関して述べた後、より計算可能で 双曲的多様体の体積へ収束していく L^2-torsion の列を構成する試みとその現状、具体例の計算について述べる事とします。

2 L^2-torsion

この章では、組み合わせ的な L^2-torsion の定義及びその基本的性質について簡単に述べます。詳しくは、[12, 15] を参照して下さい。

2.1 諸定義

π を有限表示可能群とします。一般に群 π を調べるために、その群を適当な線形空間上に表現してその性質を調べます。では、一番自然に π が作用する線形空間とは何でしょう。無限次元になる事を厭わなければ、それは群 π の群環ではないでしょうか？

定義 2.1 群 π の $\mathbb{C}$ 上の群環 $\mathbb{C}\pi$ とは、有限和

$$\sum_{g\in\pi}\lambda_g g \quad (\lambda_g\in\mathbb{C})$$

たち全体のなす $\mathbb{C}$ 上の線形空間です。ここで有限和とは $\lambda_g\neq 0$ となる g は有限個という意味です。

群 π が無限群なら、これは $\mathbb{C}$ 上の線形空間として無限次元になります。この群環 $\mathbb{C}\pi$ には元々の群演算から自然に積構造も誘導されます。

さらに $\mathbb{C}\pi$ には自然な内積

$$\left(\sum_{g\in\pi}\lambda_g g,\sum_{h\in\pi}\mu_h h\right):=\sum_{g\in\pi}\bar{\lambda}_g\mu_g$$

が定義されます。その内積に関して完備化して得られるヒルベルト空間が

$$l^2(\pi):=\left\{\sum_{g\in\pi}\lambda_g g|\lambda_g\in\mathbb{C},\sum_{g\in\pi}|\lambda_g|<\infty\right\}$$

です。一般には群環 $\mathbb{C}\pi, l^2(\pi)$ は無限次元ですが、そこから解析的な手法を使って、幾何的情報（体積）を取り出すそのポイントは以下に定義する $M(n,\mathbb{C}\pi)$ 上の非可換な成分を持つ行列式です。

群環 $\mathbb{C}\pi$ の元 $\sum_{g\in\pi}\lambda_g g$ に対して、その $\mathbb{C}\pi$-トレースを単位元 $e\in\pi$ の係数

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi}\left(\sum_{g\in\pi}\lambda_g g\right)=\lambda_e\in\mathbb{C}$$

で定めます。次に、行列 $B=(b_{ij})\in M(n,\mathbb{C}\pi)$ に対して、その $\mathbb{C}\pi$-トレースを対角成分毎の $\mathbb{C}\pi$-トレースの和

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi}(b_{ii})$$

と拡張します。

行列 $B\in M(n,\mathbb{C}\pi)$ の L^2-ベッチ数を次の様に定義します。まず、行列 B の $\oplus_{i=1}^{n}l^2(\pi)$ への自然な右作用から決まる有界 π-同変作用素

$$R_B:\oplus_{i=1}^{n}l^2(\pi)\to\oplus_{i=1}^{n}l^2(\pi)$$

を考えます。K はこの作用素 R_B の作用素としてのノルム $||R_B||_\infty$ に対して、$K\geq||R_B||_\infty$ を満たす実数で、以下一つ固定します。

定義 2.2

$$b(B)=\lim_{p\to\infty}\ tr_{\mathbb{C}\pi}\left(\left(1-K^{-2}\cdot BB^*\quad\right)^p\right)\in\mathbb{R}_{\geq 0}.$$

ここで、B^* は行列 B の随伴行列を表します。但し、B の随伴行列は

$$B^* = {}^t\left(\overline{b_{ij}}\right), \qquad \overline{\sum \lambda_g g} = \sum \overline{\lambda_g} g^{-1}$$

とします。これは前に述べた群環上の内積から自然に定まる $\oplus_{i=1}^n l^2(\pi)$ 上の内積に関して、作用素として随伴作用素を取る事に対応しています。

注意 2.1 L^2-ベッチ数 $b(B)$ は、定数 $K \geq ||R_B||_\infty$ の選び方によらないことがわかります。一つの選び方として、

$$K = \sqrt{n} \cdot \max\left\{||b_{ij}||_1 \mid 1 \leq i, j \leq n\right\}$$

と取れます。但し、$||u||_1 = \sum_{g\in\pi} |\lambda_g| \left(u = \sum_{g\in\pi} \lambda_g g \in \mathbb{C}\pi\right)$ と定めます。

以後、$b(B) = 0$ を仮定します。その時、次のように可換とは限らない成分を持つ行列式を定義します。

定義 2.3 行列 B の *Fuglede-Kadison* 行列式：

$$\det(B) = K^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left(tr_{\mathbb{C}\pi}\left(\left(1 - K^{-2}\cdot BB^*\right)^p\right)\right)\right)$$

注意 2.2 L^2-ベッチ数 $b(B)$ と同様に、Fuglede-Kadison 行列式 $\det(B)$ は、定数 $K \geq ||R_B||_\infty$ の選び方によらないことがわかります。

これらの準備の下で、3 次元多様体の L^2-torsion を定義します。M をコンパクトで向きのついた既約で連結な 3 次元多様体とします。M 上に CW-複体としての構造を一つ取ります。M の普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ 上にその CW-複体の構造を持ち上げた時、$\pi_1 M$ が deck 変換として その構造を保って作用しているとします。（もし、満たされていなければ、最初の複体の構造を十分細かく細分すればよい。）そこで、普遍被覆 $\widetilde{M}$ の $\mathbb{C}\pi_1 M$-鎖複体 $C_*(\widetilde{M}; \mathbb{C}\pi_1 M)$ を考えます:

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

このとき、境界作用素 ∂_i は $\mathbb{C}\pi_1 M$ 係数の行列として表示されることになります。そこで、∂_i の随伴行列

$$\partial_i^* : C_{i-1} \longrightarrow C_i$$

を先に述べたように取ると、i 番目の (組み合わせ) ラプラス作用素 $\Delta_i : C_i \to C_i$ が

$$\Delta_i = \partial_{i+1} \circ \partial_{i+1}^* + \partial_i^* \circ \partial_i$$

で定義されます。

今、Δ_i の L^2-ベッチ数 $b(\Delta_i)$ が、全て零とします。このとき、M の（組み合わせ）L^2-torsion $\rho(M)$ は古典的な Reidemeister torsion の一般化として次のように定義されます。

定義 2.4

$$\rho(M) = \prod_{i=0}^{3} \det{}_{\mathbb{C}\pi_1 M}(\Delta_i)^{(-1)^{i+1}i}.$$

注意 2.3 古典的な *Reidemeister torsion* の定義に対応させると、基本群の正則表現に対応した *torsion* 不変量という事ができます。

さて、全ての L^2-ベッチ数 $b(\Delta_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ が零ならば、形式的には L^2-torsion はこれで定義されますが、行列式の中の無限和が収束するとは限りません。それを保証するのが、全ての Novikov-Shubin 不変量 $\alpha(\Delta_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ が正の実数、という条件です。Novikov-Shubin 不変量の定義については、文献 [14, 15, 22] を参照して下さい。

例えば、向きのついたコンパクトで連結な 3 次元多様体 M が以下の条件を満たせば、L^2-ベッチ数と Novikov-Shubin 不変量に関する条件は満たされる事が知られています [7, 14, 15]。

(i) $\pi_1 M$ が無限群。
(ii) M は既約な 3 次元多様体、または $S^1 \times S^2$、または $\mathbb{R}P^3 \sharp \mathbb{R}P^3$ にホモトピー同値。
(iii) $\partial M \neq \phi$ ならば、∂M はトーラスからなる。
(iv) $\partial M = \phi$ ならば、M は適当な有限被覆を取れば、双曲的またはザイフェルトまたはハーケン多様体にホモトピー同値。

2.2 位相的体積としての L^2-torsion

この節では、L^2-torsion の体積との関連を述べますが、それらについては [15] を参照して下さい。

ここで、3 次元多様体をトーラス分解 (Jaco-Shalen-Johanson) したときに、ザイフェルトでない部分に断面曲率 -1 の双曲構造が入るとき、そのような分解を $JSJT(Jaco - Shalen - Johanson - Thurston)$-分解と呼ぶことにします。

定理 2.1 M を境界が空または非圧縮トーラスの非交和である、コンパクトで既約な有向 3 次元多様体で基本群が無限であるとします。さらに、M は $JSJT$-分解をもつと仮定します。このとき、$\rho(M)$ は *well-defined* であり

$$\rho(M) = \prod_{i=1}^{r} \rho(M_i)$$

が成り立ちます。ただし、M_i は M の $JSJT$-分解における有限体積の双曲構造をもつ部分です。

この結果から $\log \rho$ は Gromov の simplicial volume [9] と同じ振る舞いをする事が分かります。実際それらは本質的に一致する事が知られています。

定理 2.2 上の定理と同じ仮定のもと、

$$\log \rho(M) = C_3 \cdot ||M||$$

が成り立つ。ここで、C_3 は次元のみによる定数であり、$||M||$ は M の simplicial volume を表す。特に、M が 3 次元双曲的多様体ならば、

$$\log \rho(M) = -\frac{1}{3\pi}\mathrm{Vol}(M)$$

が成り立つ。

3 S^1 上の曲面束の L^2-torsion

この章では、S^1 上の境界を 1 つ持った曲面束に限って L^2-torsion を考えます。

$\Sigma_{g,1}$ を種数 $g \geq 1$ の向き付けられたコンパクトな曲面 (実 2 次元多様体) で境界を 1 つ持つものとします。ここで、

$$\varphi : \Sigma_{g,1} \to \Sigma_{g,1}$$

を $\Sigma_{g,1}$ 上の向きを保つ微分同相写像とします。この写像 φ の mapping torus を W_φ と書きます。このトーラスを境界に持つ 3 次元多様体 W_φ には、自然な射影 $W_\varphi \to S^1$ が存在し、S^1 上の $\Sigma_{g,1}$ 束の構造が入ります。以下簡単のため、

$$\pi := \pi_1(W_\varphi, *),$$

$$\Gamma := \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$$

とします。但し、π と Γ の基点 $*$ は $\Sigma_{g,1} \times \{0\} \subset W_\varphi$ 上の同一の点とします。この時、π は Γ と $\mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$ の半直積 $\Gamma \rtimes \mathbb{Z}$ と同型になります。

注意 3.1 φ が擬アノソフ微分同相写像であれば、W_φ の内部はトーラスカスプを持つ完備な双曲的多様体となることが知られています。

ここで、$B(l^2(\pi), l^2(\pi))^\pi$ を π-左同変な $l^2(\pi)$ 上の有界線形作用素の全体とします。前の章では基本群 π の右正則表現

$$\pi \to B\left(l^2(\pi), l^2(\pi)\right)^\pi$$

を考え、それを使って L^2-torsion $\rho(W_\varphi)$ を定義しました。

以下では $l^2(\pi)$ を Γ の降中心化列を使って近似することを考え、それによって、元々の L^2-torsion $\rho(W_\varphi)$ を近似する L^2-torsion の列 $\rho_k(W_\varphi)$ $(k = 1, 2, \dots)$ を構成する一つの試みに付いて述べます。

3.1 降中心化列から定まる L^2-torsion

基本群 $\pi_1(\Sigma_{g,1}) = \Gamma$ は、階数が $2g$ の自由群です。そこで、自由群 Γ の降中心化列

$$\Gamma_1 := \Gamma \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$$

を考えます。但し、$\Gamma_2 := [\Gamma_1, \Gamma_1]$、一般に $k > 2$ に対して、$\Gamma_k := [\Gamma_{k-1}, \Gamma_1]$ です。さらに Γ の冪零商 $N_k := \Gamma/\Gamma_k$、そして、そこへの自然な射影 $p_k : \Gamma \to N_k$ を考えます。

注意 3.2 古典的に自由群 Γ は、剰余冪零性を持つことが知られています。すなわち、自明でない任意の元 $x \in \Gamma$ に対して、ある k が存在して $p_k(x) \neq e$ となります。これらについては [8, 19] を参照して下さい。

前の章では π の $l^2(\pi)$ の上への正則表現を考えました。Γ_k は π の正規部分群なので、その商群 $\pi(k) := \pi/\Gamma_k$ を考える事ができます。そこで、π の $l^2(\pi(k))$ の上への表現、すなわち、

$$\pi \to B\left(l^2(\pi(k)), l^2(\pi(k))\right)^\pi$$

を考えましょう。元々、基本群 $\pi \cong \Gamma \rtimes \mathbb{Z}$ でした。よって、今の場合 $\pi(k) \cong N_k \rtimes \mathbb{Z}$ です。この事から、群の列 $\{\pi(k)\}$ は Γ の剰余冪零性から素朴な意味で π の近似列です。この近似列から定まる表現

$$\pi \to B\left(l^2(\pi(k)), l^2(\pi(k))\right)^\pi$$

はもともとの正則表現

$$\pi \to B(l^2(\pi), l^2(\pi))^\pi$$

の近似列と見なすことができます。よってこれから定まる L^2-torsion を考えれば、これは元々の L^2-torsion を近似しているはずです。

これにより、前の章と同様に、3 次元多様体 W_φ の L^2-torsion $\rho_k(W_\varphi)$ を 2 つの仮定、すなわち、L^2-ベッチ数の消滅と Novikov-Shubin 不変量の正値性の下で考えます。

定義 3.1

$$\rho_k(W_\varphi) = \prod_{i=0}^{3} \det{}_{\mathbb{C}\pi(k)}(\Delta_i^{(k)})^{(-1)^{i+1}i}.$$

但し、

$$\Delta_i^{(k)} : C_i(\tilde{M}; \mathbb{C}\pi(k)) \longrightarrow C_i(\tilde{M}; \mathbb{C}\pi(k))$$

は $\mathbb{C}\pi(k)$ 上のラプラス作用素。

[16] の定理 2.1 をそのまま適用することにより、次の補題が証明できます。

補題 3.1 上の表現 $\pi \to B\left(l^2(\pi(k)), l^2(\pi(k))\right)^\pi$ で捻った W_φ の L^2-ベッチ数は全て零。

この補題により、以下で述べることは全て、Novikov-Shubin 不変量の正値性が成り立つと仮定すれば、数学的に正しい事が証明されます。しかし、その正値性については一般的には未だ未解決と思われます。

注意 3.3 正則表現をその他の無限次元表現に取り替えて L^2-torsion を定義した仕事はもともと Carey-Mathai[5] にあります。この論文では L^2-ベッチ数が消滅し、Novikov-Shubin 不変量の正となる表現の事を admissible 表現と呼び、このような表現に対して L^2-torsion を定義しています。

以下、これら L^2-torsion $\rho_k(W_\varphi)$ を Lück の公式を使って具体的に書き下します。

3.2 Lück の公式

この節ではまず、S^1 上の境界付き曲面束に話を限った場合に Lück[15] の与えた公式から、$\rho(W_\varphi)$ のがモノドロミーの言葉でどう書けるかに付いて述べます。そして、この表示を使って ρ_k の場合に、それがどう書けるかに付いて述べます。収束性は別に示す必要はありますが、この公式を形式的には S^1 上の $\Sigma_{g,1}$ 束の ρ_k の定義と見なすことができます。

自由群 Γ の標準的な基底を $x_1, x_2, \dots . x_{2g}$ とします。これを使って π の表示として

$$\left\langle x_1, \dots, x_{2g}, t \mid r_1 := t x_1 t^{-1}(\varphi_*(x_1))^{-1}, \cdots, r_{2g} := t x_{2g} t^{-1}(\varphi_*(x_{2g}))^{-1} \right\rangle$$

が得られます。ここで $\varphi_* : \Gamma \to \Gamma$ は $\varphi : \Sigma_{g,1} \to \Sigma_{g,1}$ から誘導される準同型写像です。関係子 $r_1, \dots, r_{2g}$ に Fox の自由微分を施すことにより

$$A := \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in M(2g; \mathbb{Z}\pi)$$

を得ます。Lück の公式をこの S^1 上の $\Sigma_{g,1}$ 束の場合に書き下すと、次のようになります。

Lück の公式：

$$\begin{aligned} \log \rho(W_\varphi) &= -2 \log \det_{\mathbb{C}\pi}(A) \\ &= -4g \log K + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi}\left((I - K^{-2} A A^*)^p \right). \end{aligned}$$

但し、定数 K は $K \geq ||R_A||_\infty$ を満たす任意の正の実数。

では、$\rho_k(W_\varphi)$ はどのように書けるでしょうか？これは次のようになります。$p_k : \Gamma \to N_k$ から誘導される自然な準同型写像

$$\pi \to \pi(k) = N_k \rtimes \mathbb{Z}$$

も同じ記号で表します。この写像から誘導される群環上の写像

$$p_{k*} : \mathbb{C}\pi \to \mathbb{C}\pi(k)$$

を考えます。この時、

$$A_k := \left(p_{k*}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right) \in M(2g; \mathbb{C}\pi(k))$$

とします。定数 K_k を $K_k \geq ||R_{A_k}||_\infty$ を満たす任意の正の実数として取ります。Lück の公式の証明の議論はこの場合にも、そのまま成り立つので収束性を認めれば、次を得ます。

Lück の公式の ρ_k 版：

$$\begin{aligned}\log \rho_k(W_\varphi) &= -2\log \det{}_{\mathbb{C}\pi(k)}(A_k)\\ &= -4g\log K_k + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi(k)}\left((I - K_k^{-2}A_kA_k^*)^p\right).\end{aligned}$$

注意 3.4 定数 K、K_k はすべての $A, A_k (k = 1, 2, \ldots)$ に対して等しく、すなわち、$K_k = K$ と取ることができる事は容易に分かります。例えば、*[6]* の *part1*, *chapter1* の命題 *8* 参照。

4 ρ_1、ρ_2 について

4.1 第 1 項 ρ_1

ここで、ρ_1 を考えてみましょう。$\pi(1) = \pi/\Gamma_1 \cong \mathbb{Z} = \langle t\rangle$ なので、A_1 はモノドロミー φ の曲面のホモロジーへの作用から決まる行列 φ_* の特性行列と一致します。この行列の成分は t の多項式なので、それらは互いに可換です。したがって、普通の意味での行列式が定義されます。しかし、ρ_1 の定義では Fuglede-Kadison 行列式を用いて、数値的な不変量を定めます。これらの間にどのような関係があるでしょうか？

Lück は論文の中で

$$\rho_1(W_\varphi) = \int_{S^1}\log(\Delta_{\varphi_*}(t)\Delta_{\varphi_*}(\bar{t}))dvol$$

と証明なしで述べています。この事は専門家の間では知られていた事と思われますが、次の事が証明できます。

定理 4.1 *(i)* ρ_1 は *well-defined* で、次が成立する*:*

$$\log \rho_1(W_\varphi) = -2\int_0^1 \log|\Delta_{\varphi_*}(\exp(2\pi\sqrt{-1}\theta))|^2 d\theta.$$

(ii) $\bar{\Delta}_{\varphi_*}$ を $GL(2g; \mathbb{C})$ の中で *Jordan* 標準形を考え、周期的部分と *unipotent* な部分を取り除いた行列の特性多項式とする。この時、次が成立する：

$$\log \rho_1(W_\varphi) = -2\int_0^1 \log|\bar{\Delta}_{\varphi_*}(\exp(2\pi\sqrt{-1}\theta))|^2 d\theta.$$

証明のポイントはアーベル群 $\mathbb{Z}$ から定まるヒルベルト空間 $l^2(\mathbb{Z})$ が S^1 上の L^2-関数のなすヒルベルト空間 $L^2(S^1)$ と同一視でき、トレースがその上では S^1 上の積分に置き換えられる事です。

この公式の系として、次が得られます。

系 4.2 $\varphi_* \in Sp(2g, \mathbb{Z})$ の固有値が全て 1 の冪根ならば、$\log \rho_1(W_\varphi) = 0$.

4.2 幾何学的意味付け

この ρ_1 に限れば、曲面束でなくても、例えば、S^3 内の結び目に対して定義可能で、かつ、この場合に限れば、ρ_1 の積分表示には次のような意味を与える事ができます。この事は Joan Porti 氏に指摘されました。

K を S^3 内の結び目とします。そして、$M(n) \to S^3$ を K で分岐する n 重巡回被覆とします。ここで、$ord(n)$ を $H_1(M(n), \mathbb{Z})$ の位数とします。但し、H_1 の位数が無限大なら $ord(n) = 0$ とします。この時、以下が成立する事が Seifert[25] により、古典的に知られています。

$$ord(n) = \prod_{i=1}^{n-1} |\Delta_K(\zeta_i)|,$$

ここで、Δ_K は K のアレキサンダー多項式、$\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ は 1 の自明でない n 乗根。

この式を以下のように変型します。まず、両辺を 2 乗し、その n 乗根を取ります。さらに、両辺の log を取ります。すると、

$$\frac{2}{n} \log ord(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log |\Delta_K(\zeta_i)|^2$$

が得られます。ここで、$n \to \infty$ とする極限を取ると、右辺は先ほどの積分公式の右辺と定数倍を除いて一致します。従って、S^3 内の結び目の場合には、有限巡回被覆空間のホモロジーの位数という幾何学的な量の漸近挙動が ρ_1 の幾何的な意味です。

4.3 具体例の計算

今述べた公式から、Maple 6 を使って ρ_1 を具体的に求めてみました。まず S^1 上のトーラス束の場合です。表の一番左の欄は、トーラス上の同相写像を行列で表した時のそのトレースです。まん中の欄では、体積との比較を念頭に入れて、ρ_1 の値を -3π 倍して考えています。双曲的体積は SnapPea で計算しています。

$trace(\varphi_*)$	$-3\pi\log\rho_1$ の近似値	双曲的体積
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	18.1412584724627	2.0298832128
4	24.8240715245874	2.6667447835
5	29.5334698358513	2.9891202829
6	33.2270014461213	3.1772932786
7	36.2825168855271	3.2969024143
8	38.8948730158471	3.3775974082
9	41.1795720326583	3.4345408859
10	43.2113662660811	3.4761739892

つぎに種数 2 の曲面束の場合です。$t_1, \ldots, t_5$ を種数 2 の曲面のリコリッシュ生成元とし、T_i をその標準的なホモロジーの基底に関する Sp-像とします。具体的には次の行列で与えられます。

$$T1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Penner[24] により、写像類 $t_1^l t_3^m t_5^n t_2^{-1} t_4^{-1} (l, m, n \geq 1)$ は擬アノソフ写像になることが知られています。先に述べた公式を使って (l, m, n) を変えて ρ_1 を計算してみました。これも Maple6 を使っています。体積の計算方法は、

(i) 市原 [11] による 曲面束の link 表示を具体的に求め、SnapPea[28] により体積を計算。

(ii) Brinkmann、Schleimer[1] による 1 点付き曲面束の理想 4 面体分割を Brinkmann による実装 Train Tracks! [2] を使用して求め、SnapPea により体積を計算。

この二通りで、どちらも (当然のことながら) 同じ値になります。

(i,j,k)	$-3\pi\log\rho_1$ の近似値	双曲的体積の近似値
(1,1,1)	47.6747282482692	10.6497813754
(1,1,2)	52.9544769222802	11.4666578757
(1,1,3)	56.9524589673563	11.8937138137
(1,1,4)	60.2003564513063	12.1434702788
(1,1,5)	62.9462610289146	12.3010254753
(1,2,1)	54.4237752394003	11.9187558233
(1,2,2)	59.2291561987713	12.7824557985
(1,2,3)	62.9462610289146	13.2306812552
(1,2,4)	66.0036368428994	13.4904289941
(1,2,5)	68.6103164760672	13.6529808192
(1,3,1)	59.3208237316364	12.4291049018

4.4　第2項 ρ_2

一方種数の高い曲面の場合、基本群が非可換ですから、ρ_2 の計算は容易ではありません。しかし、φ が曲面のホモロジー群に自明に作用する場合、すなわち、トレリー群の元の場合、ρ_2 は次のようになります。

定理 4.3 ρ_2 は *well-defined*で、$\log\rho_2(W_\varphi)$ はトレリー群上のマグナス表現の特性多項式の積分として表される。

マグナス表現については [21, 26] を参照して下さい。ポイントは φ がトレリー群の元の場合、$N_2 \rtimes \mathbb{Z}$ が $H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ と同型で、アーベル群になるという事です。

5　今後の課題

本稿の内容に関連した今後の課題に付いて述べます。

問題 1. $\rho_k(W_\varphi)$ が一般に定義可能である事を証明せよ。すなわち、Novikov-Shubin 不変量の正値性を証明せよ。

これが証明された時に問題となるのは次の事です。

問題 2. $k \to \infty$ の時、$\rho_k(W_\varphi) \to \rho(W_\varphi) = -\frac{1}{3\pi}\mathrm{Vol}(W_\varphi)$ か?

この問題は $k \to \infty$ の時の Novikov-Shubin 不変量が一様に振る舞うかどうかに関係しています。すなわち、もし、次のような定数 $C>0,\ \alpha>0$ が存在する事が示されれば問題 2 は証明されます。

問題 3. 全ての n,k に対して、

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi(k)}\left(I - A_k A_k^*/K^2\right)^n \le \frac{C}{n^\alpha}$$

かつ

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}\pi}\left(I - AA^*/K^2\right)^n \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

が成立するような定数 $C > 0,\ \alpha > 0$ が存在するか？

$\rho_k \to \rho$ に関わる問題で、現在わかっている事実と関連して、次の事が問題となります。

問題 4. ホロノミーのトレースの絶対値が 2 以下の S^1 上のトーラス束の ρ と ρ_1 はともにゼロである。$\rho_k (k \geq 2)$ はゼロか？

S^1 上のトーラス束の ρ_1 の場合の具体例の計算を見てみると、ρ_1 の大小関係と体積の大小関係は対応しています。従って、次の事が問題として挙げられます。

問題 5. ρ_k の間の大小関係から ρ の大小関係が導けるか？

また、曲面の写像類群の立場から、次の問いは興味深いと思われます。

問題 6. 写像類群の Magnus 表現の観点から、L^2-torsion ρ, ρ_k たちの性質を導け。例えば、$\rho_k \to \rho$ を示せ。

参考文献

[1] P. Brinkmann, S. Schleimer : *Computing Triangulations of Mapping Tori of Surface Homeomorphisms*, Preprint, math.GT/0012001.

[2] P. Brinkmann : *Train Tracks!*, http://www.math.uiuc.edu/~brinkman/

[3] D. Burghela, L. Friedlander, T. Kappeler and P. McDonald : *Analytic and Reidemeister torsion for representations in finite type Hilbert modules*, Geom. and Funct. Anal. **6** (1996), 751–859.

[4] A. Carey, M. Farber and V. Mathai : *Determinant lines, von Neumann algebras and L^2 torsion* , J. reine. angrew. Math. **484** (1997), 153–181.

[5] A. Carey and V. Mathai : *L^2-torsion invariants*, J. Funct. Anal. **110** (1992), 377–409.

[6] J. Diximier : *Von Neumann Algebras*, North-Holland.

[7] J. Dodziuk : *L^2-harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1979), 395–400.

[8] R. Fenn : *Techniques of Geometric Topology*, LMS Lect. Notes 57.

[9] M. Gromov : *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. IHES **56** (1982), 5–100.

[10] E. Hess and T. Schick : *Nonvanishing of L^2-torsion of hyperbolic manifold*, Manuscripta Math. **97** (1998), 329–334.

[11] K. Ichihara : *On framed link presentations of surface bundles*, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), 1087–1092

[12] **北野晃朗**, **高沢光彦** and **森藤孝之** : *L^2-torsion of 3-manifolds*, **数理研講究録** **1172** (2000) : Volume conjecture **の現状**, 8–33.

[13] J. Lott : *Heat kernels on covering spaces and topological invariants*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 471–510.

[14] J. Lott and W. Lück : *L^2-topological invariants of 3-manifolds*, Invent. Math. **120** (1995), 15–60.

[15] W. Lück : *L^2-torsion and 3-manifolds*,
In the book, Low-dimensional topology, edited by Johanson, K. Internat. Press, (1994), 75–107.

[16] W. Lück : *L^2-Betti numbers of mapping tori and groups*,
Topology. **33** (1994), 203–214.

[17] W. Lück and M. Rosenberg : *Reidemeister torsion and the K-theory of von Neumann algebras*, K-theory **5** (1991), 213–264.

[18] W. Lück and T. Schick : *L^2-torsion of hyperbolic manifolds of finite volume*, preprint (1999).

[19] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar : *Combinatorial Group Theory*, Dover.

[20] V. Mathai : *L^2-analytic torsion*, J. Funct. Anal. **107** (1992), 369–386.

[21] S. Morita : *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. **70** (1993), 699–726.

[22] S. Novikov and M. Shubin : *Morse inequalities and von Neumann invariants of non-simply connected manifolds*, Uspekhi. Matem. Nauk. **46** (1986), 222–223.

[23] S. Novikov and M. Shubin : *Morse inequalities and von Neumann II_1-factors*, Soviet Math. Dokl. **34** (1987), 289–292.

[24] R. C. Penner : *A construction of pseudo-Anosov homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 179–197.

[25] H, Seifert : *Über das Geshlecht von Knoten*, Math. Ann., **110**(1934), 571–592.

[26] M. Suzuki: *Irreducible decomposition of the Magnus representation of the Torelli group*, Preprint, Univ. Tokyo (2000).

[27] M. Takasawa : http://www.is.titech.ac.jp/~takasawa/Torsion/index. html

[28] J. Weeks: *SnapPea*, http://thames.northnet.org/weeks/index/SnapPea.html