数理解析研究所講究録 1224 巻 2001 年 1-10

逐次 Bhattacharyya 型下界の達成について

筑波大学・数学系　小池健一　(Ken-ichi Koike)

1　はじめに

非逐次の場合, 未知母数の関数の不偏推定量の分散に対する下界を与える式として, Cramér-Rao の情報不等式があり, さらに, この不等式を精密化した Bhattacharyya の情報不等式が成り立つことが知られている. Cramér-Rao の情報不等式の下界の達成については, Wijsman [Wi76] や Joshi [J76] がある. 一方, Cramér-Rao の情報不等式を逐次推定の場合に拡張した Wolfowitz の情報不等式 ([Wo47]) がよく知られているが, この場合にその下界を達成することとは非常にまれであり ([D59], [Wa64], [BK66], [K94], [K96], [KA93], [KA95]), ほとんどの場合には達成不可能であることもわかってきた ([G87], [St85], [St90]). このことは非逐次の場合には, 指数型分布族の下では多くの場合に達成可能であることに比べて顕著な差異のように思われる. 一方, 逐次推定における Bhattacharyya の情報不等式に関する研究には Seth [Se49] があるが, そこで与えられた下界は不完全なものとなっている. 最近 Akahira [A95] により, 逐次推定において費用を考慮した場合に, 推定方式に対する漸近的な Bhattacharyya 型の下界と, その下界を漸近的に達成する逐次推定方式が示され, このことは, 非逐次での推定における結果よりも

強い結果を導出できるという意味で意義がある. また, Koike [K97] により, 逐次推定の場合に exact な意味での Bhattacharyya 型の下界が与えられ, 逐次二項標本抽出について考察している. ここでは, 仮定する確率分布を自然母数をもつ指数型分布とし, 下界の達成について考える.

2　逐次 Bhattacharyya 型不等式

$X, X_1, X_2, \ldots$ を互いに独立にいずれも (σ-有限測度 μ に関する) 密度関数 $f(x,\theta)$ に従う確率変数とする. 但し, θ は実母数とする. ここで密度 $f(x,\theta)$ に関して, θ に関しての滑らかさや $f(x,\theta)$ の台, すなわち $A=\{x : f(x,\theta)>0\}$ が θ と無関係であるといったような正則条件は必要に応じて課すものとする. また, $\ell(\theta,x) := \log f(x,\theta)$, $\ell^{(k)}(\theta,x) := (\partial^k/\partial\theta^k)\ell(\theta,x)$ $(k=1,2)$ とするとき, $I(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^2\right]$, $J(\theta) := E_\theta\left[\ell^{(1)}(\theta,X)\ell^{(2)}(\theta,X)\right]$, $K(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^3\right]$, $L(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^4\right]$, $M(\theta) := E_\theta\left[\left\{\ell^{(2)}(\theta,X)\right\}^2\right] - I^2(\theta)$, $N(\theta) :=$

$E_\theta\left[\left\{\ell^{(1)}(\theta,X)\right\}^2\ell^{(2)}(\theta,X)\right]+I^2(\theta)$ とし，これらの値が有限確定とする．また，$n=1,2,\ldots$ に対して $\mathbf{X}_{(n)}:=(X_1,\ldots,X_n)$ と表わす．

ここで τ を，$E(\tau^3)<\infty$ となる停止則としたとき，Bhattacharyya 型の情報不等式を正則な逐次推定における場合に拡張し次の定理を得る．

定理 1 (Koike [K97]). $g(\theta)$ を Θ 上で 2 回微分可能な関数，T_τ を $g(\theta)$ の (正則条件を満たす) 不偏推定量とする．このとき，T_τ の分散 $\mathrm{Var}_\theta(T_\tau)$ について次の不等式が成り立つ．

$$\mathrm{Var}_\theta(T_\tau)\geq(g'(\theta),g''(\theta))\,V^{-1}\,(g'(\theta),g''(\theta))'$$

但し，$V=V(\theta):=\{V_{ij}(\theta)\}$ (2×2 行列) とし，

$$\begin{aligned}
V_{11}(\theta)&=E(\tau)I(\theta),\\
V_{12}(\theta)&=V_{21}(\theta)=E(\tau)\{J(\theta)+K(\theta)\}+2I(\theta)E\left\{T\sum_{n=1}^{\tau}\ell^{(1)}(\theta,X_n)\right\},\\
V_{22}(\theta)&=E(\tau)\{-3I^2(\theta)+L(\theta)+M(\theta)+2N(\theta)\}-2E(\tau^2)I^2(\theta)\\
&\quad+4E\left\{\tau\sum_{n=1}^{\tau}\ell^{(1)}(\theta,X_n)\right\}\{J(\theta)+K(\theta)\}+4E\left[\tau\left\{\sum_{n=1}^{\tau}\ell^{(1)}(\theta,X_n)\right\}^2\right]I(\theta)
\end{aligned}$$

とし，$|V|\neq 0$ とする．等号が成立するための必要十分条件は，θ にのみ依存する関数 $a(\theta)$ と $b(\theta)$ があって T_τ が次を満たすことである：

$$\begin{aligned}
T_n(\mathbf{x}_{(n)})=\frac{a(\theta)}{\prod_{j=1}^n f(x_j,\theta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{j=1}^n f(x_j,\theta)\right\}+\frac{b(\theta)}{\prod_{j=1}^n f(x_j,\theta)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\prod_{j=1}^n f(x_j,\theta)\right\}&\\
+g(\theta)\quad\text{a.e. }\{\tau=n\}\quad\text{for all}\quad n\geq 1.&\qquad(2.1)
\end{aligned}$$

(証明略)

注意. 定理 1 の特別な場合として，確率 1 で $\tau\equiv n$ となるときを考えると，V の成分は

$$\begin{aligned}
&V_{11}(\theta)=nI(\theta),\ V_{12}(\theta)=V_{21}(\theta)=n\{J(\theta)+K(\theta)\},\\
&V_{22}(\theta)=n\{-3I^2(\theta)+L(\theta)+M(\theta)+2N(\theta)\}+2n^2I^2(\theta)
\end{aligned}$$

となる．このとき，上の V を用いて作られる下界は，通常 (非逐次の場合のとき) の Bhattacharyya 型の下界に等しくなる (Zacks [Z71]).

3 逐次 Bhattacharyya 型下界の達成

$\{P_\theta\}$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率分布族とする．ただし $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^1$ とする．$X_1,X_2,\ldots$ を，互いに独立に同一分布に従う $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率変数列とする．X_1 の可測空間を $(\mathcal{X},\mathcal{B},\mu)$

とする．ただし，$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^1$ で，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{X}$ の Borel 集合族，μ を $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の σ-有限測度とする．この節では，$X_1, X_2, \ldots$ の密度を

$$\frac{\mathrm{d}P_\theta^X}{\mathrm{d}\mu}(x) = \exp(\theta x - \gamma_\theta), \quad x \in \mathcal{X},\ \theta \in \Theta$$

とする．ただし，$P_\theta(X_1 \in \mathbb{R}^1 - \mathcal{X}) = 0$，$\Theta$ は $\int_{\mathcal{X}} \mathrm{e}^{\theta x} \mathrm{d}\mu(x) < \infty$ なる最大の開区間，γ_θ は Θ 上の実数値関数とする．ここでは，θ の実数値関数 $g(\theta)$ の推定問題を Ghosh [G87] に従って考える．

次の正則条件を仮定する．

(i) $g(\theta)$ は Θ 上で 2 回微分可能な，恒等的に定数にならない θ の関数である．
(ii) 各 $\theta \in \Theta$ について停止則 τ は $E_\theta(\tau^3) < \infty$ を満たす．
(iii) 推定方式 (τ, T_τ) は $g(\theta)$ の不偏推定方式で $V_\theta(T_\tau) < \infty$ を満たす．

密度の定義から

$$\mathrm{e}^{\gamma_\theta} = \int_{\mathcal{X}} \mathrm{e}^{\theta x} \mathrm{d}\mu(x)$$

となる．よく知られているように (例えば Barndorff-Nielsen [B78])

$$E_\theta(X_1) = \gamma'_\theta,\ V_\theta(X_1) = \gamma''_\theta,\ E_\theta(X_1 - \gamma'_\theta)^3 = \gamma'''_\theta,\ E_\theta(X_1 - \gamma'_\theta)^4 = \gamma''''_\theta + 3(\gamma''_\theta)^2,$$

が成り立つ．さらに，第 2 節の ℓ は $\ell(\theta, x) = \theta x - \gamma_\theta$ となるから，I, J, K, L, M, N について，簡単な計算により

$$I(\theta) = \gamma''_\theta,\ J(\theta) = 0,\ K(\theta) = \gamma'''_\theta,\ L(\theta) = \gamma''''_\theta + 3(\gamma''_\theta)^2,\ M(\theta) = N(\theta) = 0$$

となる．従って，定理 1 の Bhattacharyya 型下界の V の成分は

$$V_{11} = \gamma''_\theta E(\tau),\ V_{12} = V_{21} = \gamma'''_\theta E(\tau) + 2\gamma''_\theta E\left\{\tau \sum_{n=1}^{\tau} \ell^{(1)}(\theta, X_n)\right\},$$

$$\begin{aligned} V_{22} = \gamma''''_\theta E(\tau) - 2(\gamma''_\theta)^2 E(\tau^2) &+ 4\gamma'''_\theta E\left\{\tau \sum_{n=1}^{\tau} \ell^{(1)}(\theta, X_n)\right\} \\ &+ 4\gamma''_\theta E\left[\tau \left\{\sum_{n=1}^{\tau} \ell^{(1)}(\theta, X_n)\right\}^2\right] \end{aligned}$$

で与えられる．

(2.1) 式より，この下界の達成の必要十分条件は，T_τ が $\{\frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{\tau} f(x_i, \theta)\}/\prod_{i=1}^{\tau} f(x_i, \theta)$ と $\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\prod_{i=1}^{\tau} f(x_i, \theta)\}/\prod_{i=1}^{\tau} f(x_i, \theta)$ の線形関数となる，すなわち

$$\begin{aligned} T_n(\mathbf{x}_{(n)}) = &a_\theta(S_n(\mathbf{x}_{(n)}) - n\gamma'_\theta) + b_\theta\{-n\gamma''_\theta + (S_n(\mathbf{x}_{(n)}) - n\gamma'_\theta)^2\} \\ &+ g(\theta) \quad \text{a.e. } \{\tau = n\},\ {}^\forall n \geq 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

である．ただし，$\mathbf{x}_{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$, $S_n(\mathbf{x}_{(n)}) = \sum_{i=1}^n x_i$ とする．まず，次が分かる．

定理 2． 定理 1 の下界を $\theta_0 \in \Theta$ で達成する推定方式について，各 $\theta \in \Theta$ について

$$c_1 S_\tau^2 + c_2 \tau S_\tau + c_3 \tau^2 + c_4 S_\tau + c_5 \tau = c_6$$

が，P_θ についてほとんど至るところ成り立つ．但し，a_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ は θ に依存する定数で，$\sum_{i=1}^5 c_i^2 > 0, c_6 > 0$ を満たす．

(証明) (3.1) 式は，P_θ に関して，ほとんどいたるところ

$$T_\tau = a_\theta(S_\tau - \tau\gamma_\theta') + b_\theta(-\tau\gamma_\theta'' + (S_\tau - \tau\gamma_\theta')^2) + g(\theta)$$

が成り立つことを示している．$\theta = \theta_0$ で上式が成立すれば任意の θ で上式が成立する．仮定から，$g(\theta)$ は定数関数ではないので，$g(\theta_1) \neq g(\theta_0)$ なる θ_1 を選ぶ．ここで一般性を失わずに $g(\theta_0) - g(\theta_1) > 0$ としてよい．T_τ の差を取ると

$$c_1 S_\tau^2 + c_2 \tau S_\tau + c_3 \tau^2 + c_4 S_\tau + c_5 \tau = g(\theta_0) - g(\theta_1)$$

となり題意を得る． □

定理 2 から，逐次の Bhattacharyya の下界を達成する推定方式では，S_τ と τ がある 2 次曲面上に集中していることが分かる．このことは，逐次の Cramér-Rao の下界 (Wolfowizt の下界) を達成する推定方式では，S_τ と τ がある超平面上に集中していることと比べて顕著な差異であるといえる．

ここでは $b_\theta = 0$ となる場合を考える．また，以下では停止則として狭義の逐次停止則，すなわち任意の $m \in \mathbb{N}$ について $P_\theta(\tau = m) < 1$ が成り立つとする．このとき次が成り立つ．

定理 3． τ を，$I = \{n_1, n_2, \ldots\}$ $(1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots)$ でのみ正の確率をとる停止則とする．適当な正則条件の下で，定理 1 の下界を $\theta = \theta_0 \in \Theta$ で達成し，$b_{\theta_0} = 0$ となるための必要十分条件は次の通りである．

$$\begin{cases} \text{停止則}: \tau = \inf\left\{ n \in I \ : \ \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i = \alpha + \beta n \right\} \quad (\alpha, \beta\text{はある条件を満たす定数}), \\ \text{被推定関数}: g(\theta) = A + B\alpha(\gamma_\theta' - \beta)^{-1}, \\ \text{推定量}: T_\tau = A + B\tau \ \ \text{a.e.} \ \ P_\theta. \end{cases} \tag{3.2}$$

(証明)（十分性）(3.2) 式と Wald の等式 (Chow et al. [CRT56]) より $0 = E_\theta\{S_\tau - \tau\gamma_\theta'\} = \alpha - (\gamma_\theta' - \beta)E_\theta(\tau)$ となるので，

$$E_\theta(\tau) = \alpha(\gamma_\theta' - \beta)^{-1}$$

を得る．2 次モーメントに対する Wald の等式 (Chow et al. [CRT56]) から，$\gamma''_\theta E_\theta(\tau) = E_\theta(S_\tau - \tau\gamma'_\theta)^2 = E_\theta\{\alpha - (\gamma'_\theta - \beta)\tau\}^2$

$$\mathrm{Var}(\tau) = \alpha\gamma''_\theta(\gamma'_\theta - \beta)^{-3},$$

同様に，3 次モーメントに関しては，Koike [K97] の Lemma 2.2 から

$$E\{\tau - \alpha(\gamma'_\theta - \beta)^{-1})\}^3 = \frac{\alpha\gamma'''}{\gamma' - \b{e}ta} + \frac{3\alpha\gamma''^2}{(\gamma' - \beta)^3}$$

を得るので，これらを代入すれば単純な計算で等号成立が示される．

(必要性) 定理 1 において θ で下界を達成し，(3.1) 式で $b_\theta = 0$ とすると

$$T_n = a_\theta \sum_{i=1}^{n} \ell^{(1)}(\theta, x_i) + g(\theta) = a_\theta\{S_n(\mathbf{x}_{(n)}) - n\gamma'_\theta\} + g(\theta) \tag{3.3}$$

なので，Chow et al. [CRT65] より

$$\mathrm{Var}_\theta(T_\tau) = a_\theta^2 E_\theta(\tau)\gamma''_\theta \tag{3.4}$$

となる．一方下界は，

$$(g', g'')\frac{1}{|V|}\begin{pmatrix} V_{22} & -V_{12} \\ -V12 & V_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g' \\ g'' \end{pmatrix} = \frac{1}{|V|}(g'^2V_{22} - 2g'g''V_{12} + g''^2V_{11}) =: v_\theta(\geq 0)$$

なので，(3.4) 式から $a_\theta^2 = v_\theta/\{E_\theta(\tau)\gamma''_\theta\}$, すなわち

$$a_\theta = \{v_\theta/E_\theta(\tau)\gamma''_\theta\}^{1/2}$$

を得る．ここで，P_θ が互いに絶対連続なので，$\theta = \theta_0$ で (3.3) 式が成立すれば任意の θ で (3.3) 式が成立する．従って，$v_{\theta_0} = 0$ とすると $a_{\theta_0} = 0$ より $T_n \equiv g(\theta_0)$ となり，任意の θ について $E_\theta(T_\tau) = g(\theta_0)$ となってしまう．これは $g(\theta)$ が定数関数でないことに矛盾するので $v_{\theta_0} \neq 0$ を得る．$k, m \in \mathbb{N}(k > m)$ について，$\mathbf{x}_{(k)} \in \{\tau = k\}$, $\mathbf{x}'_{(m)} \in \{\tau = m\}$ に対して，(3.3) 式から

$$T_k(\mathbf{x}_{(k)}) - T_m(\mathbf{x}'_{(m)}) = a_{\theta_0}\{(S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - S_m(\mathbf{x}'_{(m)})) - (k - m)\gamma'_{\theta_0}\} \tag{3.5}$$

を得，$g(\theta_0) \neq g(\theta_1)$ なる $\theta_1 \in \Theta$ についても同様に

$$T_k(\mathbf{x}_{(k)}) - T_m(\mathbf{x}'_{(m)}) = a_{\theta_1}\{(S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - S_m(\mathbf{x}'_{(m)})) - (k - m)\gamma'_{\theta_1}\}. \tag{3.6}$$

を得る．この 2 式を等値して

$$a_{\theta_0}\{(S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - S_m(\mathbf{x}'_{(m)})) - (k - m)\gamma'_{\theta_0}\} = a_{\theta_1}\{(S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - S_m(\mathbf{x}'_{(m)})) - (k - m)\gamma'_{\theta_1}\},$$

$$(S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - S_m(\mathbf{x}'_{(m)}))(a_{\theta_0} - a_{\theta_1}) = (k-m)(\gamma'_{\theta_0} a_{\theta_0} - \gamma'_{\theta_1} a_{\theta_1}). \tag{3.7}$$

となる．ここで，$a_{\theta_0} = a_{\theta_1}$ とすると，$\gamma'_{\theta_0} a_{\theta_0} - \gamma'_{\theta_1} a_{\theta_1} = 0$ となるので $\gamma'_{\theta_0} = \gamma'_{\theta_1}$ を得る．これを (3.1) 式に代入すれば

$$T_k(\mathbf{x}_{(k)}) = a_{\theta_0}(S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - k\gamma'_{\theta_0}) + g(\theta_0) = a_{\theta_1}(S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - k\gamma'_{\theta_1}) + g(\theta_1)$$

より，$g(\theta_0) = g(\theta_1)$．これは θ_0 と θ_1 の取り方に矛盾．よって $a_{\theta_0} \neq a_{\theta_1}$ を得る．このとき (3.7) 式から

$$\frac{S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - S_m(\mathbf{x}'_{(m)})}{k-m} = \frac{\gamma'_{\theta_0} a_{\theta_0} - \gamma'_{\theta_1} a_{\theta_1}}{a_{\theta_0} - a_{\theta_1}} =: \beta \quad (\theta\text{と無関係})$$

とおける．よって

$$S_k(\mathbf{x}_{(k)}) - \beta k = S_m(\mathbf{x}'_{(m)}) - \beta m \qquad \text{a.e.} \quad \{\tau = k\}, \{\tau = m\}$$

となる．いま，$\{\tau = k\} \cap \{\tau = m\} = \emptyset$ より，$\mathbf{x}'_{(m)}$ を固定して $\{\tau = k\}$ で $\mathbf{x}_{(k)}$ を動かして

$$S_k(\mathbf{x}_{(k)}) = \alpha + \beta k \quad \text{a.e. } \{\tau = k\}$$

となる．以上は各 $k \in I$ について成り立ち，(3.2) 式の停止則の命題が成立する．次に被推定関数について考える．まず，Wald の等式から

$$E_\theta(S_\tau) = E_\theta(\alpha + \beta\tau) = \alpha + \beta E_\theta(\tau) = E_\theta(X_1)E_\theta(\tau) = \gamma'_\theta E_\theta(\tau)$$

なので，任意の θ について

$$E_\theta(\tau) = \frac{\alpha}{\gamma'_\theta - \beta}$$

が成り立つ．仮定より，$0 < E_\theta(\tau) < \infty$，$\gamma''_\theta > 0$ から γ'_θ は単調増加なので

「$\alpha > 0$ かつ $\beta \leq \inf_\theta \gamma'_\theta$」または「$\alpha < 0$ かつ $\beta \geq \sup_\theta \gamma'_\theta$」

を得る．一方，(3.3) 式に $a_\theta, S_k(\mathbf{x}_{(k)})$ を代入して

$$T_n(\mathbf{x}_{(k)}) = g(\theta) + \alpha v_\theta + v_\theta(\beta - \gamma'_\theta)n \quad \text{a.e. } \{\tau = n\} \qquad n = k, m, \quad \theta = \theta_0, \theta_1 \tag{3.8}$$

となり，ここで，(3.8) 式で $\theta = \theta_0, \theta_1$ とした式を等値して

$$(b_{\theta_1} - b_{\theta_0})m = a_{\theta_0} - a_{\theta_1} = (b_{\theta_1} - b_{\theta_0})k \tag{3.9}$$

を得る．ただし，$a_{\theta_i} = g(\theta_i) + \alpha v_{\theta_i}$, $b_{\theta_i} = (\beta - \gamma'_{\theta_i})v_{\theta_i}$ $(i = 0, 1)$．$k \neq m$ より，(3.9) 式は a_i が定数 A，b_i が定数 B のときのみ成立することが分かる．よって $v_{\theta_i} = B(\beta - \gamma'_\theta)^{-1}$, $A = g(\theta_i) + \alpha v_{\theta_i}$ $(i = 0, 1)$，すなわち

$$g(\theta_i) = A - \alpha v_{\theta_i} = A - \alpha B(\beta - \gamma'_{\theta_i})^{-1} \ \ (i = 0, 1)$$

となる．(3.3) 式に $g(\theta_i) = A + B\alpha(\gamma'_\theta - \beta)^{-1}$, $v_{\theta_i} = B(\beta - \gamma'_\theta)^{-1}$, $S_n = \alpha + \beta n$ を代入して

$$T_n = A + Bn \quad \{\tau = n\},\ n \geq 1,$$

すなわち

$$T_\tau = A + B\tau \quad \text{a.e. } P_\theta \ (\theta = \theta_i, i = 0, 1)$$

を得る．ここで，P_θ は互いに絶対連続なので，$T_\tau = A + B\tau$ が任意の θ で成立する．よって $T_\tau = A + B\tau$ の期待値をとれば定理の命題が成立する． □

定理 4 (Linnik and Romanovsky [LR72], Ghosh [G87])．μ が $\mathcal{X}_c \subset X$ において連続で $P_\theta(X_1 \in \mathcal{X}_c) > 0$ ならば，定理 2 の τ は $P_\theta(\tau = \infty) > 0$ を満たす．

定理 5 (Linnik and Romanovsky [LR72], Ghosh [G87])．μ が $\mathcal{X}$ において離散型で，少なくとも 3 つの点で正の確率をもつとき，定理 2 の τ は $P_\theta(\tau = \infty) > 0$ を満たす．

以上より，X_1 が 2 点でのみ正の確率をもつ (Bernoulli 試行) のときのみ考えればよい．ここで，次の二つの停止則を定義する．$\tau \equiv n$ $(k \in \mathbb{N})$ となる停止則 τ を single sampling plan (SSP(n)) という．また，$\tau = \inf\{n \in I : \sum_{i=1}^n X_i = k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ となる停止則 τ を inverse sampling plan (ISP(k)) という．ここで，SSP(n) は，狭義の停止則とはならないことに注意．

定理 2 のタイプの停止則が閉であるための条件として，次の定理がある．

定理 6 (DeGroot [D59])．Bernoulli 試行列に対して，定理 2 の τ について $P_\theta(\tau < \infty) = 1$ となるための必要十分条件は，τ が SSP(n) または ISP (k) となることである．

この定理から，閉でない，すなわち，$P(\tau = \infty) > 0$ であれば，$E(\tau) = \infty$ となり，条件 (ii) に反してしまう．従って，以下の定理を得る．

定理 7．τ を，$I = \{n_1, n_2, \ldots\}$ $(1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots)$ でのみ正の確率をとる停止則とする．適当な正則条件の下で，定理 1 の下界を $\theta = \theta_0 \in \Theta$ で達成し，$b_{\theta_0} = 0$ となるための必要十分条件は次の通りである．

$$\begin{cases} \text{確率変数}: P_\theta(X_1 = 1) = \dfrac{\mathrm{e}^\theta}{1 + \mathrm{e}^\theta} = 1 - P_\theta(X_1 = 0), \\ \text{停止則}: \tau = \mathrm{ISP}(k), \\ \text{被推定関数}: g(\theta) = A + Bk\dfrac{1 + \mathrm{e}^\theta}{\mathrm{e}^\theta}, \\ \text{推定量}: T_\tau = A + B\tau \ \text{ a.e. } P_\theta. \end{cases}$$

注意. 上の定理で，X_1 の取りうる値として，1 または 0 としたが，これは本質的ではない．$P(X_1 = a) = 1 - P(X_1 = b)$ $(a \neq b)$ としても同様の結果を得る．

4 逐次二項標本抽出への応用

この節では，逐次二項標本抽出，すなわち，Bernoulli 試行列に対する逐次推測問題について，Bhattacharyya 型下界との関連を例を用いて論じる．

$X_1, X_2, \ldots$ を，互いに独立に，共通の成功の確率 p をもつ Bernoulli 試行の列，すなわち各 $i = 1, 2, \ldots$ について，確率ベクトル $X_i = (X_{i1}, X_{i2})$ で次を満たすものとする：

$$P_p\{X_{i1} = 1\} = p, \quad P_p\{X_{i2} = 1\} = q(= 1 - p),$$

但し，$X_{ij} \in \{0, 1\} \quad (j = 1, 2), \quad X_{i1} + X_{i2} = 1, (0 < p < 1)$ とする．

各 $n \geq 1$ について，X_{n+1} 個めの標本を取るか否かを，$X_1, \ldots, X_n$ に基づいて決定すると，標本の大きさ（すなわち停止則）τ がランダムになる．このとき，確率ベクトル $Z_\tau = (X, Y) = \sum_{n=1}^{\tau} X_n$ は p に対する十分統計量となる (例えば Ferguson (1967)) ので，Rao-Blakkwell の定理から Z_τ に基づいた統計的決定関数のみを考えれば良いことになる．また，Z_τ に基づいた停止則のみを考える．具体的な τ の決め方は以下のようにする：φ を

$$\varphi(z) = (\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2), \ldots)$$

を満たす関数とする．但し，$z = (z_1, z_2, \ldots)$ で 各 $n \geq 1$ について φ_n は Z_n の標本空間上で定義される．さらに，φ_n は 0 または 1 のみの値をとり，値 $\varphi_n(z_n)$ は，統計家が $Z_n = z_n$ を観測したときに観測を止める条件付き確率を表す．φ が与えられたとき，Z_τ の確率関数は

$$P_p\{Z_\tau = (x, y)\} = c(x, y)p^x(1 - p)^y,$$

となる．但し，$0 \leq c(x, y) \leq (x + y)!/x!y!$ とする．以下では，観測を停止する点 $Z_\tau = (X, Y)$ を境界点（その全体を境界領域）という．

例 1 (Koike [K97]) (ISP(n)). この場合，$Y = S_\tau$ (もしくは $Y = \tau - S_\tau$) は負の二項分布 $NB(k; p)$ に従うので，非逐次の場合の計算が使えて，簡単な計算により，$T_\tau = aY^2 + bY + c$ とした推定方式 $(ISP(n), T_\tau)$ が下界を達成することが分かる．但し，a, b, c は定数で $a^2 + b^2 \neq 0$ を満たす任意の定数とする．

例 2 (Koike [K97]). 次の点で停止する停止則を考える：$(\tau, S_\tau) = (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (1, 1)$. この場合，境界点は $(\tau - 3)(\tau + S_\tau - 3) = 0$ を満たすから，定理 2 の条件を満たしているが，定理 3 や 7 の停止則の条件を満たしていない．

ここで，停止則として τ，その期待値 $g(p)$ の推定量として $T_\tau = aX^2 + bX + c$ をとった推定方式 (τ, T_τ) を考える．但し，a, b, c は 定数で $a^2 + b^2 \neq 0$ を満たすものとする．このと

き，簡単な計算により

$$
\begin{aligned}
g(p) &:= E_p(T_\tau) = 3ap(2p^2+1) + bp(2p^2-2p+3) + c, \\
\mathrm{Var}_p(T_\tau) &= 3a^2pq(12p^4+12p^3+24p^2+2p+1) + 2abpq(12p^4+24p^2-2p+3) \\
&\qquad + b^2pq(4p^4-4p^3+12p^2-6p+3).
\end{aligned}
$$

となり，さらに 分散 $\mathrm{Var}_p(T_\tau)$ と定理 2 の Bhattacharyya 型下界との差は

$$
2p^3q\left(\sqrt{3}a + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 \geq 0
$$

となることが示される．従って,「下界達成」$\Longleftrightarrow$「$b=-3a$」を得る．

例 1, 2 から分かるように，そこで与えられた下界達成可能な推定量は，2 次関数でもよい．このことは，定理2 で示したこととは矛盾しないが，定理 3（もしくは定理 7）で与えた条件がまだきつすぎるものであり,「$b_\theta \neq 0$」の場合には，下界達成の条件が非常に複雑な形になることが考えられること
が分かる．

参考文献

[A95] Akahira, M. (1995). The Bhattacharyya type bound for the asymptotic variance and the sequential discretized likelihood estimation procedure. *Sequential Analysis*, **14**, 193–204.

[B78] Barndorff-Nielsen, O. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory.* Wiley, New York.

[CRT65] Chow, Y. S., Robbins, H. and Teicher, H. (1965). Moments of randomly stopped sums. *Ann. Math. Statist.*, **36**, 789–799.

[D59] DeGroot, M. H. (1959). Unbiased binomial sequential estimation. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 80–101.

[G87] Ghosh, B. K. (1987). On the attainment of the Cramér-Rao bound in the sequential case. *Sequential Analysis*, **6**, 267–288.

[J76] Joshi, V. M. (1976). On the attainment of the Cramér-Rao lower bound. *Ann. Statist.*, **3**, 998–1002.

[K94] 小池健一 (1994). 逐次多項標本抽出における推定方式の許容性について. 数理解析研究所講究録, **879**, 1–13.

[K96] Koike, K. (1996). On the optimum properties of sequential estimation procedures in the multinomial sampling plans. *Sequential Analysis*, **15**, 285–298.

[K97] Koike, K. (1997). The Bhattacharyya type bound for the variance of sequential estimation procedures. *J. Japan Statist. Soc.*, **27**, 65–75.

[KA93] 小池健一, 赤平昌文 (1993). Optimal estimation procedures for sequential sampling. 研究集会「統計的推測と逐次解析」 報告集, 32–39.

[KA95] 小池健一, 赤平昌文 (1995). Sequential optimum procedures in statistical estimation. 日本数学会 1995 年度年会特別講演, 統計数学分科会アブストラクト, 131–150.

[Se49] Seth, G. R. (1949). On the variance of estimates. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 1–27.

[St85] Stefanov, V. T. (1985). On efficient stopping time. *Stochastic Process and their Applications*, **19**, 305–314.

[St90] Stefanov, V. T. (1990). A note on the attainment of the Cramér-Rao bound in the sequential case. *Sequential Analysis*, **9**, 327–334.

[Wa64] Wasan, M. T. (1964). Sequential optimum procedures for unbiased estimation of a binomial parameter. *Technometrics*, **6**, 259–271.

[Wi73] Wijsman, R. A. (1973). On the attainment of the Cramér-Rao Lower bound. *Ann. Statist.*, **1**, 538–542.

[Wo47] Wolfowitz, J. (1947). The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential process. *Ann. Math. Statist.*, **18**, 215–230.

[Z71] Zacks, S. (1971). *The Theory of Statisitcal Inference.* Wiley, New York.