数理解析研究所講究録 1224 巻 2001 年 118-125

Non-Gaussian P-function and disturbance of operation in quantum estimation for noised coherent light

筑波大・数学　　津田 美幸 (Yoshiyuki TSUDA)

1 はじめに

量子力学では, 対象となる物理系を可分な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で表す. $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表し,

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \rho = \rho^* \geq 0, \mathrm{Tr}(\rho) = 1\}$$

とし, $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ を密度作用素と呼ぶ. ただし, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して, A^* は 複素共役転置, $A \geq 0$ は非負定値, $\mathrm{Tr}(A)$ はトレースを表す.

ある可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$ に対して,

- $\Pi(\emptyset) = 0$ (零元), $\Pi(\Omega) = I$ (単位元),
- 任意の $F \in \mathcal{F}(\Omega)$ に対して, $\Pi(F) \geq 0$,
- 互いに素な可算列 $\{F_n(\in \mathcal{F}(\Omega))\}$ に対して, $\Pi(\bigcup_n F_n) = \sum_n \Pi(F_n)$

を満たす $\Pi : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を正作用素値測度 (POVM) と呼ぶ.

量子系の測定は, 対応する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と状態を表す密度作用素 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, 測定値の可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$ と POVM Π の組によって定まり, 事象 $F \in \mathcal{F}(\Omega)$ が観測される確率は

$$\Pr(F \mid \rho, \Pi) = \mathrm{Tr}(\rho\Pi(F))$$

で定義される. 密度作用素 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ が未知である場合には, 観測者は $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$ と POVM Π を選択して観測を行い, 得られた観測値 $F \in \mathcal{F}(\Omega)$ に基づいて ρ を推定することが問題になる. これを量子推定問題と呼ぶ.

2 つの物理系 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ に対して, 合成系は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ で表される. $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ が互いに独立な場合, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の状態は $\rho_1 \otimes \rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ ($\rho_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$, $\rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$) で表される. $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ が同型で, $\rho_1 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$, $\rho_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ が $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ となる場合, $\rho^{\otimes 2} := \rho_1 \otimes \rho_2$ と書く.

また, 系の時間発展は, $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ を $U\rho U^* \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に移す unitary 作用素 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ によって表される.

以下, 量子力学系の特別な場合である量子光学系について述べる. 実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の 複素数値 $\mathcal{L}_2$-可積分関数全体 $\mathcal{L}_2(\boldsymbol{R})$ のある完備正規直交基底を $|n\rangle_\nu$ ($n \in \boldsymbol{N}_0$: 非負整数全体) とする. また, θ ($\in \boldsymbol{C}$: 複素数体) に対して,

$$|\theta\rangle_c := \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\theta|^2/2) \frac{\theta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_\nu$$

とし, ${}_{\nu}\langle n| := |n\rangle_{\nu}^{*}$, ${}_{c}\langle\theta| := |\theta\rangle_{c}^{*}$ とする. $|n\rangle_{\nu\nu}\langle n|$ $(\in \mathcal{S}(\mathcal{L}_2(\boldsymbol{R})))$ は光子数確定状態と呼ばれ, n は光子数に対応する. $|\theta\rangle_{cc}\langle\theta|$ $(\in \mathcal{S}(\mathcal{L}_2(\boldsymbol{R})))$ は coherent 光状態と呼ばれ, θ は複素振幅に対応する. さらに,

$$\begin{aligned}\Pi_1 :\ & \mathcal{F}(\boldsymbol{N}_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{L}_2(\boldsymbol{R})) \quad (\Pi_1(\{n\}) = |n\rangle_{\nu\nu}\langle n|\,),\\ \Pi_2 :\ & \mathcal{F}(\boldsymbol{C}) \to \mathcal{B}(\mathcal{L}_2(\boldsymbol{R})) \quad (\Pi_2(\eta)d^2\eta = |\eta\rangle_{cc}\langle\eta|d^2\eta\,)\end{aligned}$$

は POVM である. Π_1 を光子数測定, Π_2 をヘテロダイン測定と呼ぶ. Coherent 状態 $|\theta\rangle_{cc}\langle\theta|$ に対して, 光子数測定 Π_1 を行うと, 測定値 n の確率分布は Poisson 分布であり,

$$\mathrm{Tr}(|\theta\rangle_{cc}\langle\theta|\Pi_1(\{n\})) = \exp(-|\theta|^2)|\theta|^{2n}/n!$$

となる. また, coherent 状態 $|\theta\rangle_{cc}\langle\theta|$ に対してヘテロダイン測定 Π_2 を行うと, 測定値 η の確率分布は 2 変量 Gauss 分布であり,

$$\mathrm{Tr}(|\theta\rangle_{cc}\langle\theta|\Pi_2(\eta))d^2\eta = \frac{1}{\pi}\exp\left(-|\eta-\theta|^2\right)d^2\eta$$

となる.

任意の $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{L}_2(\boldsymbol{R}))$ に対して,

$$\rho = \iint_{\boldsymbol{C}} |\zeta\rangle_{cc}\langle\zeta|P(\zeta)d^2\zeta \ \in \mathcal{S}(\mathcal{L}_2(\boldsymbol{R})) \tag{1.1}$$

となる (超) 関数 $P(\cdot)$ が存在し, P 関数と呼ぶ (Walls and Milburn [3]). 特に,

$$\rho_{\theta,\sigma^2} := \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{\boldsymbol{C}} |\zeta\rangle_{cc}\langle\zeta| \exp\left(-\frac{|\zeta-\theta|^2}{2\sigma^2}\right)d^2\zeta \tag{1.2}$$

を coherent 光の熱雑音状態と呼ぶ.

2 複素振幅と熱雑音の推定

Hayashi [1] は (1.2) の状態族 $\mathcal{S}_1 := \{\rho_{\theta,\sigma^2} \mid \theta \in \boldsymbol{C},\ \sigma^2 \in \boldsymbol{R},\ \sigma^2 > 0\}$ の θ, $2\sigma^2$ に対する推定問題を考え, 漸近的に最適な測定方法と推定量を提案した. まず, 2^m 個の独立な状態 $\rho_{\theta,\sigma^2}^{2^m}$ を beam splitter を用いた物理的操作によって,

$$\rho_{\theta,\sigma^2}^{\otimes 2^m} \mapsto U_m\cdots U_1\rho_{\theta,\sigma^2}^{\otimes 2^m}U_1^*\cdots U_m^* = \rho_{0,\sigma^2}^{\otimes 2^m-1}\otimes\rho_{\sqrt{2^m}\theta,\sigma^2} \tag{2.1}$$

と時間発展させる. ただし, $1 \le j \le m$ に対して

$$U_j := \prod_{k=1}^{2^{m-j}} \exp\left(\frac{\pi}{4}(a_{2^jk-2^{j-1}}^* a_{2^jk} - a_{2^jk}^* a_{2^jk-2^{j-1}})\right)$$

とし, $1 \le l \le 2^m$ に対して, a_l は l 番目の系に対する消滅作用素, a_l^* は生成作用素とする. また, 消滅作用素 a_l は l 番目の系の coherent 光ベクトルの Hamiltonian

であり, 任意の複素数 θ と任意の v_j ($\in \mathcal{H}$, $1 \le j < l-1$, $l+1 < j \le 2^m$) に対して,

$$\begin{aligned} &a_l v_1 \otimes \cdots \otimes v_{l-1} \otimes |\theta\rangle_c \otimes v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_{2^m} \\ &= \theta v_1 \otimes \cdots \otimes v_{l-1} \otimes |\theta\rangle_c \otimes v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_{2^m} \end{aligned}$$

が成り立つ. POVM $\Pi : \mathcal{F}(\boldsymbol{N}_0^{2^m-1} \times \boldsymbol{C}) \to \mathcal{C}_1(\mathcal{L}_1(\boldsymbol{R})^{\otimes 2^m})$ を

$$\begin{aligned} &\Pi(\{n_1\}, \ldots, \{n_{2^m-1}\}, \eta) d^2\eta \\ &\quad = \Pi_1(\{n_1\}) \otimes \cdots \otimes \Pi_1(\{n_{2^m-1}\}) \otimes \Pi_2(\eta) d^2\eta \\ &\quad = |n_1\rangle_{\nu\nu}\langle n_1| \otimes \cdots \otimes |n_{2^m-1}\rangle_{\nu\nu}\langle n_{2^m-1}| \otimes |\eta\rangle_{cc}\langle\eta| d^2\eta \end{aligned}$$

で定義する. すると, 測定値 $(n_1, \ldots, n_{2^m-1}, \eta)$ の確率分布は,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\left(\rho_{0,\sigma^2}^{\otimes 2^m-1} \otimes \rho_{\sqrt{2^m}\theta,\sigma^2}\, \Pi(\{n_1\}, \ldots, \{n_{2^m-1}\}, \eta)\right) d^2\eta \\ &= \frac{1}{(2\sigma^2+1)^{2^m-1}} \left(\frac{2\sigma^2}{2\sigma^2+1}\right)^{n_1+\cdots+n_{2^m-1}} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{|\eta - \sqrt{2^m}\theta|^2}{2\sigma^2}\right) d^2\eta \end{aligned}$$

となる. そこで, $\mathrm{Re}(\theta)$, $\mathrm{Im}(\theta)$, $2\sigma^2$ の推定量をそれぞれ

$$\bar{\eta}_1 := \mathrm{Re}(\eta)/\sqrt{2^m}, \quad \bar{\eta}_2 := \mathrm{Im}(\eta)/\sqrt{2^m}, \quad \hat{\kappa}_2 := \sum_{j=1}^{2^m-1} \frac{n_j}{2^m-1}$$

とすると, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, $\bar{n}$ は不偏推定量となり, その共分散行列は

$$\begin{pmatrix} \sigma^2/2^m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2/2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma^2(1+2\sigma^2)/(2^m-1) \end{pmatrix}$$

となる. これは, $\rho_{\theta,\sigma^2}^{\otimes 2^m}$ に対する RLD Fisher 情報行列による不偏推定量の共分散行列のトレースの下限

$$\sigma^2/2^{m-1} + 2\sigma^2(1+2\sigma^2)/2^m$$

と漸近的に一致している. この意味で最適な測定, 推定方法である.

3 P関数がGaussianでない場合

しかし, 実際には, (1.2) における Gaussian の仮定は必ずしも成り立つわけではなく, むしろそうでない場合が多い. そこで, (1.1) において, 3次と4次の cumulant が有限であるが必ずしも 0 ではない場合について考える. ただし, cumulant は以下のように定まる. まず, $\beta := -\beta_1/2 + i\beta_2/2$ (β_1, $\beta_2 \in \boldsymbol{R}$) に対して, ρ の正規順特性関数を

$$\chi_N(\beta) := \mathrm{Tr}\{\rho \exp(\beta a_1^*) \exp(-\beta^* a_1)\}$$

で定義する (Walls and Milburn [3]). 次に, j, k ($\in \boldsymbol{N}$) に対して cumulant を

$$\kappa_{j,k} := \frac{\partial^j}{\partial \beta_1^j}\frac{\partial^k}{\partial \beta_2^k}\log(\chi_N(0))$$

で定義する. また, $\kappa_{j,k} = \kappa_{k,j}$ ($j+k \geq 2$) と仮定する.

すると, 前節の問題設定は, $\kappa_{1,0}$, $\kappa_{0,1}$, $2\kappa_{2,0}$, の推定問題に拡張される.

(2.1) によって状態を変化させた後の状態 $U_m \cdots U_1 \rho^{\otimes 2^m} U_1^* \cdots U_m^*$ に対して, POVM Π による測定を行う. 得られた測定値 $(n_1, \cdots, n_{2^m-1}, \eta)$ から $\kappa_{1,0}$, $\kappa_{0,1}$, $\kappa_2 := 2\kappa_{2,0}$ の推定量

$$\hat{\kappa}_{1,0} := \mathrm{Re}(\eta)/\sqrt{2^m}, \quad \hat{\kappa}_{1,0} := \mathrm{Im}(\eta)/\sqrt{2^m}, \quad \hat{\kappa}_2 := \sum_{j=1}^{2^m-1} \frac{n_j}{2^m-1}$$

を定めると, 以下が成り立つ.

定理 3.1 $\kappa_{1,1} = \kappa_{3,0} = \kappa_{2,1} = \kappa_{1,2} = \kappa_{0,3} = \kappa_{3,1} = \kappa_{1,3} = 0$ ならば,

$$\begin{aligned} E(\hat{\kappa}_{1,0}) &= \kappa_{1,0}, \quad E(\hat{\kappa}_{0,1}) = \kappa_{0,1}, \quad E(\hat{\kappa}_2) = 2\kappa_{2,0}, \\ V(\hat{\kappa}_{1,0}) &= V(\hat{\kappa}_{0,1}) = \frac{\kappa_{2,0}+1/2}{2^m}, \\ V(\hat{\kappa}_2) &= 2\kappa_{2,0}\frac{1+2\kappa_{2,0}}{M_*} + 2\frac{M+1}{3MM_*}(\kappa_{4,0}+\kappa_{2,2}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

となる. ただし, $M := 2^m$, $M_* := 2^m - 1$ とする.

4 Beam splitter の透過率の確率モデル

また, Hayashi [1] では, (2.1) の unitary 変換を実行する際に用いられる beam splitter の透過率が 1/2 であることを仮定しているが, 実際に使われる beam splitter の透過率は理想的な値 (1/2) から少しずれていることが多い. そこで, $\kappa_{1,0}$, $\kappa_{0,1}$, κ_2 を推定する問題において, 互いに独立な実数値確率変数 $\epsilon_{j,k}$ に対して, (2.1) において

$$U_j := \prod_{k=1}^{2^{m-j}} \exp\left((\pi/4 - \sqrt{2}\,\epsilon_{j,k})(a_{2^jk-2^{j-1}}^* a_{2^jk} - a_{2^jk}^* a_{2^jk-2^{j-1}})\right)$$

となるモデルを考える. ただし, 共通の分散 $V(\epsilon) := V(\epsilon_{j,k})$ (> 0) は十分小さいとし,

$$E(\epsilon_{j,k}) = E\left((\epsilon_{j,k})^3\right) = 0, \quad E\left((\epsilon_{j,k})^4\right) = 3V(\epsilon)^2$$

とする. $\{\cos(\pi/4 - \sqrt{2}\,\epsilon_{j,k})\}^2$ は, (j,k) 番目の beam splitter の透過率に対応する.

定理 4.1 $\kappa_{1,1}=\kappa_{3,0}=\kappa_{2,1}=\kappa_{1,2}=\kappa_{0,3}=\kappa_{3,1}=\kappa_{1,3}=0$ ならば,

$$\begin{aligned}
E(\hat{\kappa}_{1,0}) &= \kappa_{1,0}, \quad E(\hat{\kappa}_{0,1}) = \kappa_{0,1}, \\
E(\hat{\kappa}_2) &= 2\kappa_{2,0}+2\frac{Mm(\kappa_{1,0}^2+\kappa_{0,1}^2)+2(2M_*-m)\kappa_{2,0}}{M_*}V(\epsilon)+O(V(\epsilon)^2), \\
V(\hat{\kappa}_{1,0}) &= V(\hat{\kappa}_{0,1}) = \frac{(2V(\epsilon)+1)^m\kappa_{2,0}+1/2}{2^m}
\end{aligned}$$

となり, さらに, $\kappa_{2,2}=0$ ならば,

$$\begin{aligned}
V(\hat{\kappa}_2) &= 2\kappa_{2,0}\frac{1+2\kappa_{2,0}}{M_*}+2\frac{M+1}{3MM_*}\kappa_{4,0}+\Big\{18M(2M_*-m)\kappa_{2,0} \\
&\quad +8M(2M_*-m){\kappa_{2,0}}^2+3mM^2({\kappa_{0,1}}^2+{\kappa_{1,0}}^2)(1+4\kappa_{2,0}) \\
&\quad +4(4M^2-3m-4)\kappa_{4,0}\Big\}\frac{2V(\epsilon)}{3MM_*^2}+O(V(\epsilon)^2)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる. ただし, $M:=2^m$, $M_*:=2^m-1$ とする.

系 4.1 $\hat{\kappa}_2$ と κ_2 の平均 2 乗誤差 MSE は

$$\begin{aligned}
MSE &= \frac{3\kappa_{2,0}+6\kappa_{2,0}^2+(1+2^{-m})\kappa_{4,0})}{3M_*} \\
&\quad +2\Big\{2(3MM_*^2m(\kappa_{0,1}^2+\kappa_{1,0}^2) \\
&\quad +6M_*^2(-2+2M-m+2Mm\kappa_{0,1}^2+2Mm\kappa_{1,0}^2)\kappa_{2,0} \\
&\quad +24(2M_*^3-M_*^2m)\kappa_{2,0}^2 \\
&\quad +\frac{4}{M}(-4+6M+4M^4-8(1+m)-3M_*^2m)\kappa_{4,0}\Big\}\frac{V(\epsilon)}{3M_*^4} \\
&\quad +O(V(\epsilon)^2)
\end{aligned}$$

である.

5 今後の課題

以上のように, Hayashi [1] の提案した実験を精密化したが, この他にも, (2.1) の unitary 変換を実行する際に用いられる光ファイバーのエネルギー損失も考える必要がある. さらに, 光子数測定をする光検出器の量子効率, dark count の影響, 複数光子の識別可能性 (Kim, Takeuchi and Yamamoto [2]) なども考慮する必要がある. これらのモデル化とその解析は今後の課題である.

本論文に対して多くの有益な助言を下さった理化学研究所脳科学総合研究センター脳数理研究チームの林正人氏に感謝致します.

付録 A　定理の証明

定理 3.1 の (3.1) 以外は定理 4.1 に含まれる. ここでは, 定理 3.1 の (3.1) と定理 4.1 を示す.

証明　まず, $1 \leq j \leq m$ に対して,

$$U_j \cdots U_1 \rho^{\otimes 2^j} U_1^* \cdots U_j^* \tag{5.2}$$

の 2^j 番目の系の P 関数 g_j の cumulant を $\kappa_{k,l}^{(j)}$ とすると, $1 \leq j < m$ に対して,

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,0}^{(j+1)} &= \sqrt{2}\,\kappa_{1,0}^{(j)}, & \kappa_{0,1}^{(j+1)} &= \sqrt{2}\,\kappa_{0,1}^{(j)}, \\
\kappa_{2,0}^{(j+1)} &= (1+2V(\epsilon))\kappa_{2,0}^{(j)}, & \kappa_{1,1}^{(j+1)} &= (1+2V(\epsilon))\kappa_{1,1}^{(j)}, \\
\kappa_{3,0}^{(j+1)} &= \frac{1+6V(\epsilon)}{\sqrt{2}}\kappa_{3,0}^{(j)}, & \kappa_{2,1}^{(j+1)} &= \frac{1+6V(\epsilon)}{\sqrt{2}}\kappa_{2,1}^{(j)}, \\
\kappa_{4,0}^{(j+1)} &= 24V(\epsilon)^2\kappa_{2,0}^{(j)} + (1/2+6V(\epsilon)+6V(\epsilon)^2)\kappa_{4,0}^{(j)}, \\
\kappa_{3,1}^{(j+1)} &= (1/2+6V(\epsilon)+6V(\epsilon)^2)\kappa_{3,1}^{(j)}, \\
\kappa_{2,2}^{(j+1)} &= 8V(\epsilon)^2\kappa_{2,0}^{(j)} + (1/2+6V(\epsilon)+6V(\epsilon)^2)\kappa_{2,2}^{(j)}
\end{aligned}$$

という漸化式が成り立つから, $1 \leq j \leq m$ に対して,

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,0}^{(j)} &= \sqrt{2}^{j-1}\kappa_{1,0}, \qquad \kappa_{0,1}^{(j)} = \sqrt{2}^{j-1}\kappa_{0,1}, \\
\kappa_{2,0}^{(j)} &= (2V(\epsilon)+1)^{j-1}\kappa_{2,0}, \\
\kappa_{1,1}^{(j)} &= \kappa_{3,0}^{(j)} = \kappa_{2,1}^{(j)} = \kappa_{3,1}^{(j)} = 0, \\
\kappa_{4,0}^{(j)} &= 24V(\epsilon)^2\kappa_{2,0}^2\frac{(1/2+6V(\epsilon)+6V(\epsilon)^2)^{j-1}-(1+2V(\epsilon)^{2j-2}}{-1/2+2V(\epsilon)+2V(\epsilon)^2} \\
&\quad + (1/2+6V(\epsilon)+6V(\epsilon)^2)^{j-1}\kappa_{4,0}, \\
\kappa_{2,2}^{(j)} &= 8V(\epsilon)^2\kappa_{2,0}^2\frac{(1/2+6V(\epsilon)+6V(\epsilon)^2)^{j-1}-(1+2V(\epsilon)^{2j-2}}{-1/2+2V(\epsilon)+2V(\epsilon)^2} \\
&\quad + (1/2+6V(\epsilon)+6V(\epsilon)^2)^{j-1}\kappa_{2,2}
\end{aligned}$$

となる. 従って,

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\kappa}_{1,0}) &= \iint_{C} \mathrm{Re}(\eta) g_m(\eta)\, \mu(d^2\eta) \;=\; \kappa_{1,0},\\
E(\hat{\kappa}_{0,1}) &= \iint_{C} \mathrm{Im}(\eta) g_m(\eta)\, \mu(d^2\eta) \;=\; \kappa_{0,1},\\
V(\hat{\kappa}_{1,0}) &= V(\hat{\kappa}_{0,1}) \;=\; \iint_{C} \mathrm{Re}(\eta)^2 g_m(\eta)\, \mu(d^2\eta) - \kappa_{1,0}^2\\
&= \frac{(2V(\epsilon)+1)^m \kappa_{2,0} + 1/2}{2^m}
\end{aligned}
$$

を得る. また, (5.2) の 2^j 番目以外の系の P 関数は共通であるから, それを h_j とし, h_j の 2 変量 cumulant を $\lambda_{k,l}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,0} &= \lambda_{1,0} \;=\; \lambda_{3,0} \;=\; \lambda_{2,1} \;=\; 0,\\
\lambda_{2,0} &= (2V(\epsilon)+1)\kappa_{2,0}^{(j-1)} + 4V(\epsilon)(\kappa_{1,0}^{(j-1)})^2,\\
\lambda_{1,1} &= (2V(\epsilon)+1)\kappa_{1,1}^{(j-1)} + 4V(\epsilon)\kappa_{1,0}^{(j-1)}\kappa_{1,0}^{(j-1)},\\
\lambda_{4,0} &= 24V(\epsilon)^2(\kappa_{2,0}^{(j-1)})^2 + (1/2 + 6V(\epsilon) + 6V(\epsilon)^2)\kappa_{4,0}^{(j-1)}\\
&\quad +24V(\epsilon)(2V(\epsilon)+1)\kappa_{3,0}^{(j-1)}\kappa_{1,0}^{(j-1)} + 96V(\epsilon)\kappa_{2,0}^{(j-1)}(\kappa_{1,0}^{(j-1)})^2,\\
\lambda_{3,1} &= 48V(\epsilon)^2(\kappa_{1,0}^{(j-1)})^2\kappa_{1,1}^{(j-1)} + 24V(\epsilon)^2\kappa_{1,1}^{(j-1)}\kappa_{2,0}^{(j-1)}\\
&\quad +6V(\epsilon)\kappa_{1,0}^{(j-1)}(8V(\epsilon)\kappa_{0,1}^{(j-1)}\kappa_{2,0}^{(j-1)} + 3(2V(\epsilon)+1)\kappa_{2,1}^{(j-1)})\\
&\quad +6V(\epsilon)\kappa_{0,1}^{(j-1)}\kappa_{3,0}^{(j-1)} + 12V(\epsilon)^2\kappa_{0,1}^{(j-1)}\kappa_{3,0}^{(j-1)}\\
&\quad +(1/2 + 6V(\epsilon) + 6V(\epsilon)^2)\kappa_{3,1}^{(j-1)},\\
\lambda_{2,2} &= 16V(\epsilon)^2(\kappa_{1,1}^{(j-1)})^2 + 16V(\epsilon)^2(\kappa_{0,1}^{(j-1)})^2\kappa_{2,0}^{(j-1)}\\
&\quad +16V(\epsilon)^2(\kappa_{1,0}^{(j-1)})^2\kappa_{2,0}^{(j-1)} + 8V(\epsilon)^2(\kappa_{2,0}^{(j-1)})^2 + 12V(\epsilon)\kappa_{1,0}^{(j-1)}\kappa_{2,1}^{(j-1)}\\
&\quad +24V(\epsilon)^2\kappa_{1,0}^{(j-1)}\kappa_{2,1}^{(j-1)} + 4V(\epsilon)\kappa_{0,1}^{(j-1)}(16V(\epsilon)\kappa_{1,0}^{(j-1)}\kappa_{1,1}^{(j-1)}\\
&\quad +3(2V(\epsilon)+1)\kappa_{2,1}^{(j-1)}) + (1/2 + 6V(\epsilon) + 6V(\epsilon)^2)\kappa_{2,2}^{(j-1)}
\end{aligned}
$$

となる. 従って,

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\kappa}_2) &= 2\kappa_{2,0} + 2\frac{Mm(\kappa_{1,0}^2 + \kappa_{0,1}^2) + 2(2M_* - m)\kappa_{2,0}}{M_*}V(\epsilon) + O(V(\epsilon)^2),\\
V(\hat{\kappa}_2) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2^{m-j}} V(n_{2^m - 2^{m-j+1} + k}) + \sum_{j\neq k} Cov(n_j, n_k)\\
&= \sum_{j=1}^{m} 2^{m-j} \iint_{C} (|\eta|^4 + |\eta|^2) h_j(\eta)\, \mu(d^2\eta)\\
&\quad -\sum_{j=1}^{m} 2^{m-j} \left\{\iint_{C} |\eta|^2 h_j(\eta)\, \mu(d^2\eta)\right\}^2 + O(V(\epsilon))
\end{aligned}
$$

となり, $V(\epsilon) = 0$ ならば (3.1) を得, $V(\epsilon) \neq 0$ かつ $\kappa_{2,2} = 0$ ならば (4.1) を得る.

参考文献

[1] Hayashi, M. (2000). Asymptotic quantum theory for the thermal state family. *Quantum communication, computing and measurement 2* (edited by Kumar, P. D'ariano, G. M. and Hirota, O.), Plenum, New York, 99-104.

[2] Kim, J., Takeuchi, S. and Yamamoto, Y. (1999). Multiphoton detection using visible light photon counter. *Appl. Phys. Lett.*, **74**, 902-904.

[3] Walls, D. F. and Milburn, G. J. (1994). *Quantum optics*, Springer, Tokyo.