

## 乱流中の浮遊曲線の統計

後藤晋 (Susumu GOTO)<sup>1</sup> 木田重雄 (Shigeo KIDA)  
核融合研 (NIFS)

乱流によって受動的に移流される曲線上の統計を考える。たとえ乱流が統計的に一様かつ定常であっても、この浮遊曲線の非一様な伸長の効果は時間的に減衰しない。言い換えれば、浮遊曲線を線素の集合と考えたとき、十分時間が経過したのちもこれらの線素は統計的に等価とはならない。したがって、従来よりしばしば用いられてきた統計的に等価な無限小浮遊線素の集合に対する統計は、浮遊曲線の統計を正しく表現しない。本稿では、浮遊曲線の特徴づけるもっとも基本的な統計量である伸長率を例題としてとりあげ、統計的に等価な浮遊線素の集合の統計と浮遊曲線の統計との相違点を理論的および数値的に明らかにする。

### 1 はじめに

乱流中に浮遊する物体の運動や統計は、流れ場自身の運動や統計を強く反映するので、乱流を理解する道具として重要である。例えば近年実験でよく利用される粒子追跡流速計 (PTV) などは流体中に浮遊する小粒子群の運動により流体の運動を理解する典型的な手段である。このような浮遊粒子群 (流体粒子とともに運動し、また流体の運動には影響を与えないものと仮定する) を用いて流れ場の統計を調べようことを想像する。まず、空間全体に一様に粒子を浮かべるとする。すると非圧縮流体中ではその粒子群はいつまでも一様に分布するので、これらの粒子に付随するある物理量の算術平均はその物理量の空間平均に等しい。つまり、これらの浮遊粒子は互いに統計的に等価である。ところが、同じように浮遊粒子群を用いて、流体中に浮遊する曲線 (曲面) の運動や統計を調べようとするすると事情は異なる。ある時刻にある曲線 (曲面) 上に一様間隔に小粒子群を並べたとする。非圧縮流体中であっても 1 次元 (2 次元) 方向には非一様な伸長があるので、時間が経つと粒子の間隔は非一様になる。したがって、これらの粒子に付随するある物理量の算術平均は、その物理量の曲線 (曲面) 上の平均値とは一般に異なる。つまり、浮遊曲線 (曲面) の統計を考える上ではこれらの浮遊粒子を統計的に等価には扱えない。以下で強調することは、この浮遊粒子の非等価性は、十分長い時間が経過したの

---

<sup>1</sup>goto@toki.theory.nifs.ac.jp

ちも残るといふ点である。このことは浮遊曲線や曲面を統計的に等価な無限小要素の集合とみなすことができないことを意味する。無限小要素の集合は有限長さの浮遊曲線や有限面積の曲面と比べて数値的に扱いやすいので、直接数値計算においてもこれまでしばしば用いられてきたが、残念ながら浮遊曲線や曲面の統計を考える上では適した手法とは言えない [1]。

以下ではとくに浮遊曲線を扱うが、浮遊曲面に対しても同様の議論が可能である。まず、次節において浮遊曲線の定義と性質とを簡単にまとめる。次に、§3で浮遊曲線の統計と浮遊線素の統計との相違点を理論的に整理し、その結果を §4において直接数値計算を用いて検証する。

## 2 浮遊曲線

### 2.1 定義と支配方程式

Navier-Stokes 方程式、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

と連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

とに支配される速度場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  によって移流され、かつ、流体の運動には影響を与えない点の集合からなる線を以下では単に浮遊曲線とよぶことにする。ここで、 $\rho$  は非圧縮流体の一様密度、 $\nu$  は動粘性係数、 $p(\mathbf{x}, t)$  は圧力、また、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  は乱流の統計的な定常性を維持するための外力である。したがって、浮遊曲線上の任意の点の位置  $\mathbf{x}_i(t)$  の時間発展は、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i(t), t) \quad (3)$$

と記述される。

### 2.2 数値計算法

浮遊曲線を数値的に追跡するためには、初期にある曲線上に並べられた点の集合の時間発展を移流方程式 (3) を時間積分することにより求めればよい。ただし、点の集合によって滑らかな曲線を表現するためには、隣り合う点の間隔を常に十分短く保つ必要がある。ところがあとでみるように (図2を参照)、浮遊曲線の全長は指数関数的に増大するので、隣り合う2点の間隔がある閾値を越えるたびに2点間に曲線に沿った適当な補間法により点を追加しなければ

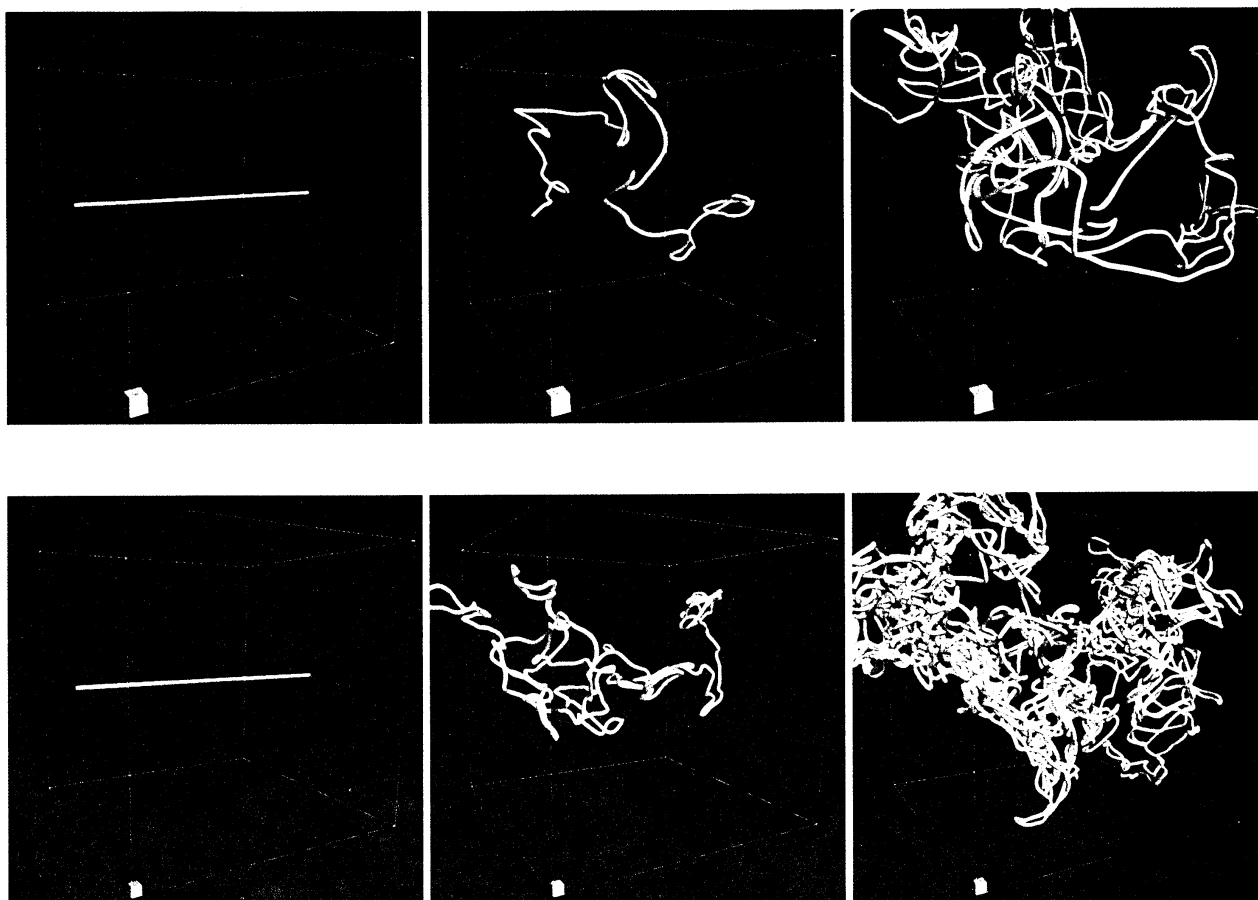


図 1: 浮遊曲線の時間発展。 $t = 0, 2, 4$ 。大きな箱は流れ場の周期境界を表し、手前下の小さな箱の大きさは Kolmogorov 長さの 10 倍を表す。上段:  $R_\lambda = 56$  ( $\tau_\eta = 0.20$ )、下段:  $83$  ( $0.14$ )。

ならない。以下で用いる直接数値計算においては、閾値は速度場を解く際の数値格子点間隔の 1.5 倍とし、補間は 4 点の Lagrange 法を採用した。

支配方程式系 (1)–(3) を連立させることにより、速度場の時間発展と浮遊曲線の時間発展とを同時に解く。速度場には 3 方向とも周期境界条件を課し、支配方程式に表れる空間微分は Fourier スペクトル法により評価し、一方、移流方程式 (3) の右辺、すなわち浮遊曲線上の速度は格子点上の値を 64 点の Lagrange 法により補間して求める。また、時間微分は 4 次精度の Runge-Kutta 法により積分する。ただし、移流方程式 (3) に対する Runge-Kutta 法では時間刻みの半分だけ進んだ時刻での速度場の値が必要となるため、その数値時間刻みは Navier-Stokes 方程式 (1) の時間刻みの 2 倍とする。

Navier-Stokes 方程式 (1) の右辺に表れる外力  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  について述べる。以下の直接数値計算においては外力を直接与えるのではなく、小さな波数帯 ( $k < \sqrt{8}$ ) における速度場の Fourier 成分の振幅を固定することにより大きな長さの流れのみに寄与する外力に対応させた。

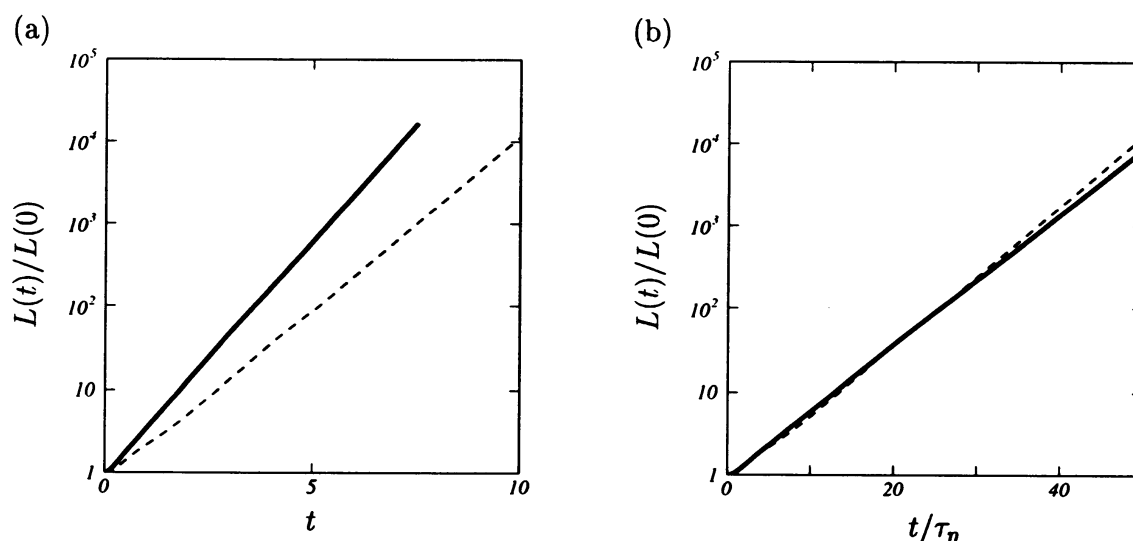


図 2: (a) 浮遊曲線の全長。破線 :  $R_\lambda = 56$  ( $\tau_\eta = 0.20$ )、実線 :  $83$  ( $0.14$ )。 (b) 時間を  $\tau_\eta$  で規格化した。

適当な速度場の初期条件を与え、上述の外力のもとで時間発展をさせると、ある適当な時間ののち統計的に定常な乱流が得られる。この統計的に定常な乱流中に流れ場の周期程度の長さをもつ曲線を浮かべる。以下では、浮遊曲線を置いた時刻を時刻の原点 ( $t = 0$ ) とする。

### 2.3 時間発展と Kolmogorov の相似性

前節で述べた数値計算法により求められた浮遊曲線の時間発展を図 1 に示す。図の上段は、Taylor 小スケールによる Reynolds 数、

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3\nu\epsilon}} \epsilon \quad (4)$$

が 56 の乱流に対する結果、下段は 83 に対する結果である。浮遊曲線の初期条件は 2 つの場合ともに同じで、長さが流れ場の周期と同じ直線とした。式 (4) で  $\epsilon$  は速度場の単位質量あたりのエネルギー、 $\nu$  はその散逸率である。浮遊曲線の大きな尺度の運動の様子は Reynolds 数には依らず、たとえば、曲線の広がり (重心から各線素までの距離の標準偏差) は時間の平方根程度で大きくなる。一方で、浮遊曲線の小さな尺度における構造の複雑さは大きな Reynolds 数ほど急速に進行し、たとえば、浮遊曲線の全長  $L(t)$  は大きな Reynolds 数ほど速く長くなる (図 2(a) を参照)。このことは、浮遊曲線の伸長は主に最小長さ (すなわち Kolmogorov 長さ  $\eta = \nu^{3/4}\epsilon^{-1/4}$ ) の渦によって担われていることを示唆する。実際、図 2(b) には時間を Kolmogorov

長さの渦がもつ時間尺度、

$$\tau_\eta = \epsilon^{-\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

で規格化して浮遊曲線の全長の時間発展を示したが、2つの場合はよく重なる。このように浮遊曲線の統計が、Kolmogorov 長さの渦の統計に強く依存しているおり、その統計の時間尺度が  $\tau_\eta$  で規格化できるということは古くからしばしば指摘されてきた [2]。つまり、この系を特徴づけるもっとも基本的な統計量である浮遊曲線の伸長率、

$$\gamma = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} L(t) \quad (6)$$

に関しても  $\gamma\tau_\eta$  は Reynolds 数に依らない普遍定数であると期待される。そこで、これまでもこの普遍定数を理論的、数値的あるいは実験的に求めようという研究が数多く行われた。しかし、そこで伝統的にとられてきた手法——すなわち、浮遊曲線を統計的に等価な無限小長さの線素の集合とみなす手法——は、必ずしも適切とは言えず、しばしば間違った結果を導く。本稿の目的は、この手法の問題点を明らかにすることにある。

### 3 浮遊曲線の統計

Batchelor [2] によれば<sup>2</sup>、一様乱流中の浮遊曲線上の各線素は、初期条件を忘れるほどに十分に時間が経ったのちは統計的には等価であり、したがって、浮遊曲線の統計を考える際には無限小（物理的には Kolmogorov 長さ  $\eta$  よりも十分に短い——言い換えればその線素上でのストレイン場が一様であるほどに短い）長さの線素の集合を考えればよいとした。以来、浮遊曲線の統計を理論的あるいは数値的に考える際に、無限小長さの線素の集合を考えることが一般的となっている（たとえば文献 [3] の §1 を参照）。しかし、以下に示すように、実際には十分時間が経過したのちでも浮遊曲線上の各線素は統計的に等価にはならず、線素の集合に対する単純な統計と浮遊曲線の統計とは異なる。このことを示すために、浮遊曲線に沿った線平均と線素を統計的に等価に扱った平均（線素平均）とを導入し、2つの平均がいかなる場合に異なる結果を与えるかを明らかにする。

#### 3.1 線平均と線素平均

まず、浮遊曲線を Kolmogorov 長さ  $\eta$  よりも常に十分に短い長さ  $\Delta^{(i)}(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) の線素の集合に分割する。各線素の長さは時間とともに成長するので、任意の時刻で  $\Delta^{(i)}(t) \ll \eta$

<sup>2</sup>In view of the homogeneity of turbulence the statistical behaviour of all elements of the above line is the same, ... Consequently it will be sufficient to confine our discussion to the statistical behaviour of the material line element ...

を満たすためには初期の長さを十分に短くしておく必要がある。この線素の集合を用いて、浮遊曲線に付随するある物理量  $g^{(i)}(t)$  の線平均および線素平均をそれぞれ、

$$\langle g \rangle_{\text{線}} = \frac{\sum_{i=1}^N g^{(i)}(t) \Delta^{(i)}(t)}{\sum_{i=1}^N \Delta^{(i)}(t)} \quad \langle g \rangle_{\text{線素}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^{(i)}(t) \quad (7)$$

と定義する。線平均が浮遊曲線に沿って一様な（すなわち、各線素の長さに比例した重みづけをした）平均であるのに対して、線素平均は、各線素を等しい重みで扱った平均である。全ての線素の長さが等しい場合（ $\Delta^{(i)} = \Delta$ ）を除き、一般にこれら2つの平均は一致しない。より正確には (7) より  $g^{(i)}(t)$  の線平均は線素平均を用いて、

$$\langle g \rangle_{\text{線}} = \frac{\langle g \Delta \rangle_{\text{線素}}}{\langle \Delta \rangle_{\text{線素}}} \quad (8)$$

と表されるので、浮遊曲線上の線素に付随する物理量  $g^{(i)}(t)$  がその線素の長さ  $\Delta^{(i)}(t)$  と統計的に独立であるならば  $g^{(i)}(t)$  の線平均と線素平均とは一致する。上述の Batchelor [2] の議論は、一様乱流中では十分長い時間が経てば各線素は統計的に等価な履歴をもち、したがって、 $g^{(i)}(t)$  と  $\Delta^{(i)}(t)$  とは統計的に独立になるはずであるという予想に基づく。一見もっともらしいこの議論は実は正確ではなく、物理量  $g^{(i)}(t)$  によっては  $\Delta^{(i)}(t)$  との相関はいつまでも残ることが示される。

たとえば、 $g^{(i)}(t)$  の例として、線素の伸長率、

$$\gamma_e^{(i)} = \frac{1}{\Delta^{(i)}} \frac{d\Delta^{(i)}}{dt} = \frac{d}{dt} \log \Delta^{(i)} \quad (9)$$

を考えてみよう。上式を積分すれば、

$$\Delta^{(i)}(t) = \Delta^{(i)}(0) \exp \left[ \int_0^t \gamma_e^{(i)}(t') dt' \right] \quad (10)$$

と書ける。この表式から  $\Delta^{(i)}(t)$  と  $\gamma_e^{(i)}(t)$  とは正の相関をもつことが期待され (§3.2を参照)、実際、直接数値計算によってもその相関が確かめられる (図4を参照)。したがって (8) より、伸長率の線平均は、線素平均よりも大きな値をとることになる。浮遊曲線の全長の表式、

$$L(t) = \sum_{i=1}^N \Delta^{(i)}(t) \quad (11)$$

を時間微分すれば分かる通り、浮遊曲線の伸長率  $\gamma$  は  $\langle \gamma_e \rangle_{\text{線}}$  にほかならない。以上より、

$$\gamma = \langle \gamma_e \rangle_{\text{線}} \geq \langle \gamma_e \rangle_{\text{線素}} \quad (12)$$

となり、線素の伸長率の単純な算術平均は浮遊曲線の真の伸長率を過小評価してしまうはずである。したがって、従来の研究において統計的に等価な線素の集合に対する統計により評価された伸長率の平均値には注意が必要である。

### 3.2 積過程と減衰しない相関

上でみたように、伸長率の線平均と線素平均との差は、線素の長さ  $\Delta^{(i)}(t)$  と線素の伸長率  $\gamma_e^{(i)}$  との間の相関が十分時間が経過したのちも有限に残ることに起因する。この有限の相関の原因を、浮遊曲線の伸長過程を独立な変数の積過程とみなすことにより明らかにする。まず、 $\gamma_e^{(i)}(t)$  の自己相関時間を  $\tau_c$  と書き、(10) の時間積分を  $\tau_c$  毎に分割することによって、

$$\begin{aligned}\Delta^{(i)}(t) &= \Delta^{(i)}(0) \exp \left[ \int_0^{\tau_c} \gamma_e^{(i)}(t') dt' \right] \exp \left[ \int_{\tau_c}^{2\tau_c} \gamma_e^{(i)}(t') dt' \right] \cdots \exp \left[ \int_{t-\tau_c}^t \gamma_e^{(i)}(t') dt' \right] \\ &= \Delta^{(i)}(0) \sigma^{(i)}(0, \tau_c) \sigma^{(i)}(\tau_c, 2\tau_c) \cdots \sigma^{(i)}(t - \tau_c, t)\end{aligned}\quad (13)$$

と書き直す。ただしここで、

$$\sigma^{(i)}(t_1, t_2) = \exp \left[ \int_{t_1}^{t_2} \gamma_e^{(i)}(t') dt' \right] \quad (14)$$

であり、これを積算伸長因子とよぶ。相関時間  $\tau_c$  以上離れた2つの  $\gamma_e^{(i)}(t), \gamma_e^{(i)}(t')$  ( $|t-t'| > \tau_c$ ) は互いに無相関なので、(13) に表れる  $\sigma^{(i)}$  は互いに独立な確率変数とみなせる。つまり、(13) の右辺は独立な確率変数の積である。積過程の興味深い性質は、積をとる変数の数を十分に大きくしても、そのうちの1つの変数の果たす役割が減衰しない点にある。このことは、独立な確率変数の和とは大きく異なる。この積過程の性質により  $\Delta^{(i)}(t)$  と  $\gamma_e^{(i)}(t)$  との間の相関はいつまでも残ることになる。つまり、確かに  $\gamma_e^{(i)}(t)$  と  $\sigma^{(i)}(t', t)$  ( $t' < t - \tau_c$ ) とは相関がない（もちろん初期の長さ  $\Delta^{(i)}(0)$  とも相関はない）が、明らかに  $\sigma^{(i)}(t - \tau_c, t)$  とは相関をもつ。そして、この相関のために  $\gamma_e^{(i)}(t)$  と  $\Delta^{(i)}(t)$  との相関は  $t \gg \tau_c$  としても消えないのである。実際、(8) で  $g(t)$  を  $\gamma_e(t)$  とした式は、

$$\langle \gamma_e \rangle_{\text{線}} = \frac{\langle \gamma_e(t) \sigma(t - \tau_c, t) \rangle_{\text{線素}}}{\langle \sigma(t - \tau_c, t) \rangle_{\text{線素}}} \quad (15)$$

と書き直せる。つまり、 $\gamma_e^{(i)}(t)$  との相関をもつ最後の一項の積算伸長因子に応じた重みづけをした線素平均こそが線平均に等しい。

ちなみに、相関時間  $\tau_c$  が無限小であれば、 $\sigma^{(i)}(t - \tau_c, t) = 1$  であり、伸長率の線平均と線素平均とは同じ結果を与える。しかし、実際には有限の相関時間が存在する。図3に直接数値計算により評価した  $\gamma_e^{(i)}(t)$  の自己相関係数、

$$c(\tau) = \frac{\left\langle (\gamma_e^{(i)}(t + \tau) - \langle \gamma_e \rangle_{\text{線素}}) (\gamma_e^{(i)}(t) - \langle \gamma_e \rangle_{\text{線素}}) \right\rangle_{\text{線素}}}{\left\langle (\gamma_e - \langle \gamma_e \rangle_{\text{線素}})^2 \right\rangle_{\text{線素}}} \quad (16)$$

を示したが、この図より  $\tau_c$  は Kolmogorov 時間の5倍程度と見積もることができる。したがって、伸長率の線素平均と線平均とは有意な差が表れるはずである。

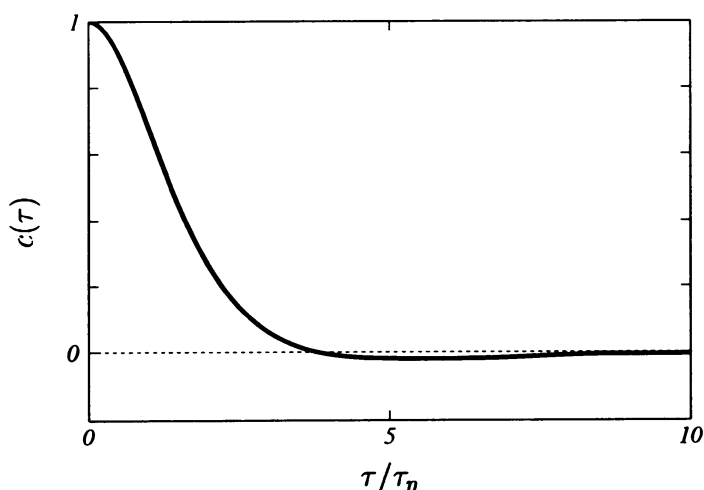


図 3: 線素の伸長率  $\gamma_e^{(i)}(t)$  の自己相関係数。  $R_\lambda = 56$ 。

## 4 直接数値計算による検証

以上の議論を直接数値計算を用いて確かめる。とくに、線平均と線素平均の違いを明確にするために、§2.2で記述した浮遊曲線の直接数値計算に加えて、Kolmogorov 長さよりも常に短い線素の集合を乱流中に浮遊させた直接数値計算（以下ではこれを線素シミュレーションとよぶ）を実行した。線素シミュレーションは、従来からしばしば採用されてきた無限小線素の集合の直接数値計算 [3, 4] と物理的に等価である。

### 4.1 積算伸長因子と伸長率との相関

伸長率の線平均（これが浮遊曲線の真の伸長率を与える）と線素平均との違いは、積算伸長因子  $\sigma^{(i)}(0, t)$  と、伸長率  $\gamma_e^{(i)}(t)$  との相関が十分大きな  $t$  に対しても有意に残ることに起因する。実際にこの相関関係を確かめるために、線素シミュレーションを用いて、条件つき平均、

$$\left\langle \gamma_e(t) \mid \sigma(0, t) \right\rangle_{\text{線素}} \quad (17)$$

を  $t = 20\tau_\eta$  において評価して図 4 に示した。予想通り、 $\gamma_e^{(i)}(t)$  の条件つき平均は、大きな積算伸長因子ほど大きな値をとることが分かる。すなわち、積算伸長率と伸長率とは正の相関をもち、この相関は伸長率の自己相関時間  $\tau_c (\approx 5\tau_\eta)$  よりも十分大きな  $t$  に対しても残る。



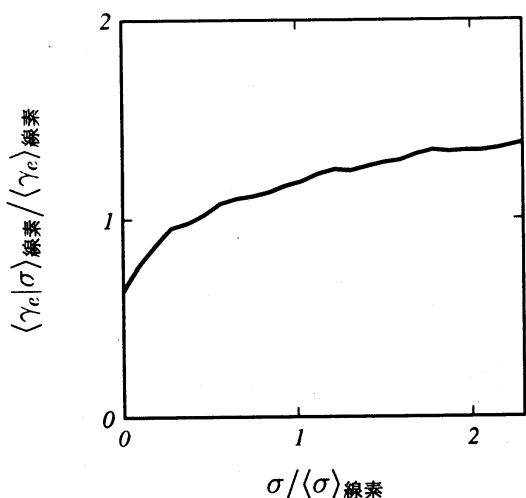


図 4: 線素の伸長率の積算伸長因子による条件つき平均。  $R_\lambda = 56$ 、  $t = 20\tau_\eta$ 。

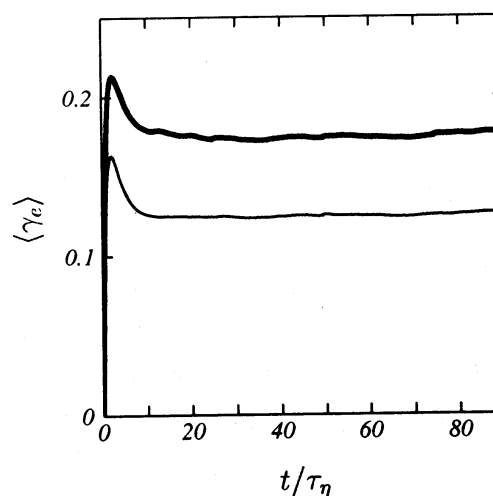


図 5: 太い実線: 伸長率の線平均。細い実線: 線素平均。灰色の帯は 10 通りの乱流に対する標準偏差を表す。

## 4.2 伸長率の線平均と線素平均

浮遊曲線のシミュレーション、および、線素シミュレーションのそれぞれの結果を用いて、伸長率の線平均および線素平均を求める。それぞれのシミュレーションにおいては、浮遊させる線素の数を格子点数と同数とした。つまり、浮遊曲線のシミュレーションでは、浮遊曲線に沿った補間によって曲線上に点を追加する度に曲線の端点の追跡をやめる。こうして、計算負荷を時間的に一定にするとともに、統計の母数を一定にする。さらに、そのような計算を異なる乱流の初期条件に対して 10 回ずつ繰り返し、それらの平均をとる。これは、統計的に定常な乱流でもストレイン場の強度（あるいは Kolmogorov の時間尺度）には時間変動があり、その変動に応じた伸長率の平均値の揺らぎを平滑化するためである。結果を図 5 に示す。太い実線が伸長率の線平均、細い実線が線素平均を表す。また、灰色の帯は 10 通りの異なる流れ場に対する標準偏差を表す。伸長率の平均値は、初期には統計的等方性と流体の非圧縮性から値を持たないが、ある適当な時間尺度の後ある一定値をとる。そのような統計的に定常な状態 ( $20\tau_\eta \leq t$ ) において伸長率の時間平均を求めた。その結果、伸長率の線平均は、

$$\langle \gamma_e \rangle_{\text{線}} = (0.17 \pm 0.01) \tau_\eta^{-1} \quad (18)$$

また、線素平均は、

$$\langle \gamma_e \rangle_{\text{線素}} = (0.13 \pm 0.01) \tau_\eta^{-1} \quad (19)$$

と評価された。ここで  $\pm$  は、10 通りの乱流に対する標準偏差の時間平均を表す。予想通り、線素平均は浮遊曲線の真の伸長率（線平均）を過小評価している。なお、線平均 (18) は、図 2 の傾きより求められた値  $0.17\tau_\eta^{-1}$  に一致し、一方、線素平均 (19) は、以前、無限小線素の集

合の直接数値計算によって評価された値  $0.13 \sim 0.14 \tau_\eta^{-1}$  [3,4] に一致する。線平均と線素平均との関係についてのより詳しい議論は文献 [1] に述べた。

## 5 おわりに

浮遊曲線の伸長率の線平均が線素平均よりも大きな値をとるのは、より強い伸長を受ける領域により多くの浮遊曲線の部分が存在するためである。このことは、乱流中に存在する Kolmogorov 長さで特徴づけられる微細構造によって浮遊曲線が伸長されていると考え、直観的に理解できる。乱流中の微細構造は、強い旋回運動をもつ中心部の周囲に強い歪み運動をもつ部分が付随するものであると考えられている。したがって、浮遊曲線は微細構造の旋回運動に捕獲されつつ、そのまわりの強い歪み場によって伸長されているという描像が描けるかも知れない。この旋回運動による捕獲の効果により、各線素のもつ伸長率に有限の自己相関時間  $\tau_c$  —— したがって有限の積算伸長因子  $\sigma$  —— が生じ、このために線平均と線素平均とに差異が生まれるのである。

このように、乱流中の微細構造の動力学や統計と、浮遊曲線（曲面）のそれとは密接に結びついていると期待される。とくに、本稿で扱った乱流よりもより大きな Reynolds 数の流れで微細構造の役割がどのようになるかは未解決の重要な問題として現在も盛んに研究されており、ここ数年で大きな進展が見られるはずである。それに伴って、そのような十分発達した乱流中での浮遊曲線や曲面の統計がいかに記述されるか（たとえば、§2.3 で述べた Kolmogorov の相似性が成り立つかどうかなど）を明らかにすることは、近い将来の重要な課題のひとつである。

本研究は文部科学省科学研究費特定領域研究（B）の部分的支援を受けた。

## 参考文献

- [1] S. Kida and S. Goto, "Line statistics: Stretching rate of passive lines in turbulence," (submitted; preprint, NIFS report 684).
- [2] G. K. Batchelor, "The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces," Proc. Roy. Soc. London A, **213** (1952) pp.349–366.
- [3] S. S. Girimaji and S. B. Pope, "Material-element deformation in isotropic turbulence," J. Fluid Mech., **220** (1990) pp.427–458.
- [4] M.-J., Huang, "Correlations of vorticity and material line elements with strain in decaying turbulence," Phys. Fluids, **8** (1996) pp.2203–2214.