

## 射影演算子法による乱流モデル構築に向けて

九大院総理工 佐藤 建司 (Kenji Sato)

*Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences,  
Kyushu Univ.*

九大応力研 岡村 誠 (Makoto Okamura)

*Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.*

非平衡統計物理の分野で発展した射影演算子法を乱流に応用し、平均量に対するモデル方程式を導出することにより非常に少ない時間的・容量的数値計算コストで平均量を求めることを目指す。その第一歩として本研究では周期的駆動力が働く振り子の運動方程式に対して射影演算子法を用い、物理的に正当な仮定のもとで振り子の平均角速度に対するモデル方程式を導出した。そして、モデル方程式から得られる平均角速度の精度評価とモデルの適用限界を把握する試みを行った結果、非常に広範なパラメータ領域でこのモデルが有効であることを確認することができた。

### 1 はじめに

流体運動の一例として間隔  $L$  の平板間流れを考える。流れが層流の場合、速度分布は放物線となる。そして断面平均流速を  $U_L$ 、動粘性係数を  $\nu$  として Reynolds 数  $R=LU_L/\nu$  を大きくしていくと、放物線の勾配は急になる。しかし、Reynolds 数が臨界値を超えると、流体粒子の運動がカオスになり、乱流状態 (Poiseuille 乱流) に遷移する。このとき隣り合う流体粒子間での運動量の授受により平均流速分布は平板間の中心で一様になり、統計的な秩序構造が生まれる。このように巨視的スケールで眺めて速度分布が放物線ではなく平らになるのは Reynolds 数が小さくなることを意味する。これは乱流に遷移することにより、分子粘性よりも桁違いに大きい渦粘性の効果が支配的になることによる。この渦粘性は Navier-Stokes 方程式の非線形項に起因するものである。したがってこの渦粘性を定量的に求めることが重要となる。Iwayama & Okamoto<sup>1,2</sup> は済州島風下に発生する Kármán 渦列の原因となる渦粘性を Mori<sup>3</sup> によって導入された射影演算子法を用いて定量的に求めている。

本研究では、射影演算子法により Poiseuille 乱流のような具体的な乱流場の平均流速分布を求めることを目標に掲げ、そのための情報を蓄積することを目的として、Mori & Fujisaka<sup>4</sup> による拡張された Langevin 方程式の導出スキームを参考に、周期的駆動力が働く振り子 (以下、強制振り子と呼ぶ) の平均角速度に対するモデル方程式を導出する。そしてモデルにより得られた平均角速度と数値シミュレーション結果との比較を行う。

### 2 周期的駆動力が働く振り子の挙動

強制振り子の支配方程式は振り子の角度  $q(t)$ 、振り子の角速度  $p(t)$ 、周期的駆動力の位相  $\phi(t)$  に対する運動方程式からなる。

$$\dot{q}(t) = p(t), \quad (1)$$

$$\dot{p}(t) = -\sin q(t) - \gamma p(t) + b \cos \phi(t), \quad (2)$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega. \quad (3)$$

ここで  $\gamma$  は摩擦係数 (減衰係数)、 $b$  は周期的駆動力の振幅、 $\omega$  は周期的駆動力の角振動数である。(2) の右辺第 1 項  $-\sin q(t)$  は非線形項であり、この項がカオスの発生に最も寄与する。第 2 項は振り子のエネルギーを散逸させる散逸項であり、第 3 項は外力項である。外力項も  $\phi(t)$  に関して非線形になっているが、(3) より  $\phi(t) = \omega t + \phi(0)$  であり、 $\phi(t)$  はカオス的な振る舞いをしないので、第 1 項と同じ働きをするものではない。振り子の運動がカオスとなるか、あるいは周期運動となるかは 3 つのパラメータ  $\gamma, b, \omega$  の値に依存する。

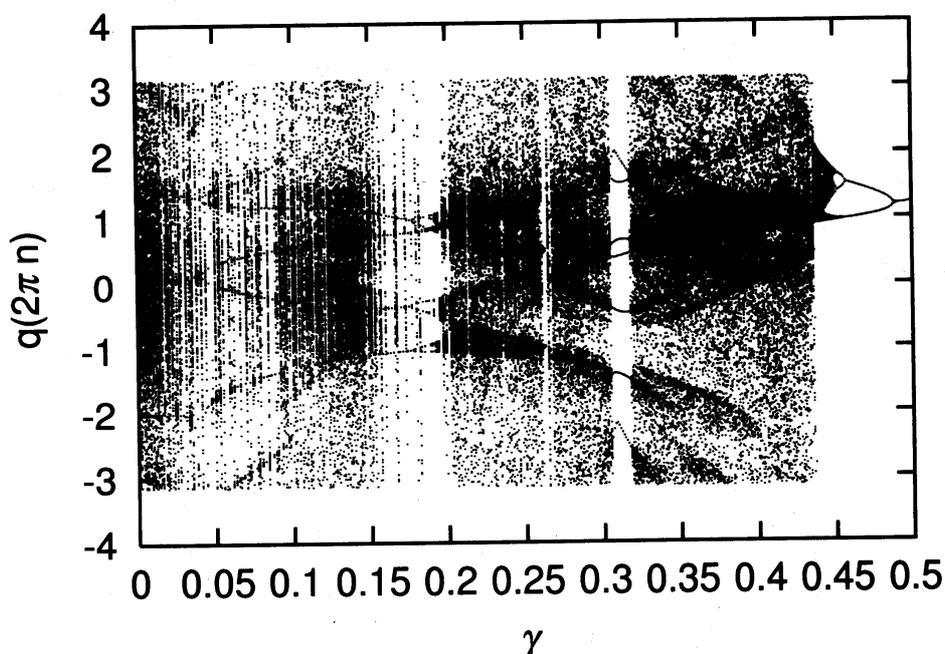


図 1: 減衰定数  $\gamma$  に対する  $q(t)$  の Poincaré マップ.  $b=2.7, \omega=1$ .

図 1 は横軸を  $\gamma$  として変化させたときの振り子の角度  $q(t)$  の Poincaré マップである。 $q(t)$  の範囲は  $-\pi \leq q(t) < \pi$  とし、 $p(t)$  の時系列で  $p(t)$  が極大となるときの  $q(t)$  をプロットした。なお、過渡状態は含まないよう時刻  $t=500$  からプロットを開始している。これらの図から明らかなように振り子がカオスとなるか周期運動となるかはパラメータ値に依存する。 $\gamma > 0.45$  で振り子は周期運動となるが、これはこの領域で摩擦の効果が (2) 式右辺第 1 項  $-\sin q(t)$  に起因する非線形効果を卓越することによると考える。

次に (1)–(3) に対する数値解の一例を示す。なお、(1)–(3) を解くにあたっては Runge-Kutta 法を用いた。

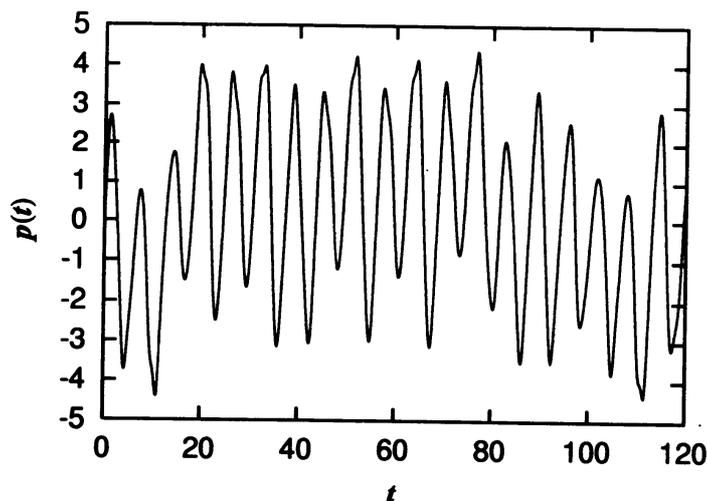


図 2: 角速度  $p(t)$  の時系列.

$$\gamma=0.22, b=2.7, \omega=1. \quad q(0)=-1.5, p(0)=\phi(0)=0.$$

図 2 は  $\gamma=0.22, b=2.7, \omega=1$  に対する  $p(t)$  の時系列である。この場合、 $p(t)$  はカオスとなり不規則な振動をする。また、 $p(t)$  は周期的駆動力の角振動数  $\omega=1$  の他に  $\omega=1$  近傍で時間的に揺らぐ角振動数成分を持つ。なお、初期値は  $q(0)=-1.5, p(0)=\phi(0)=0$  とした。

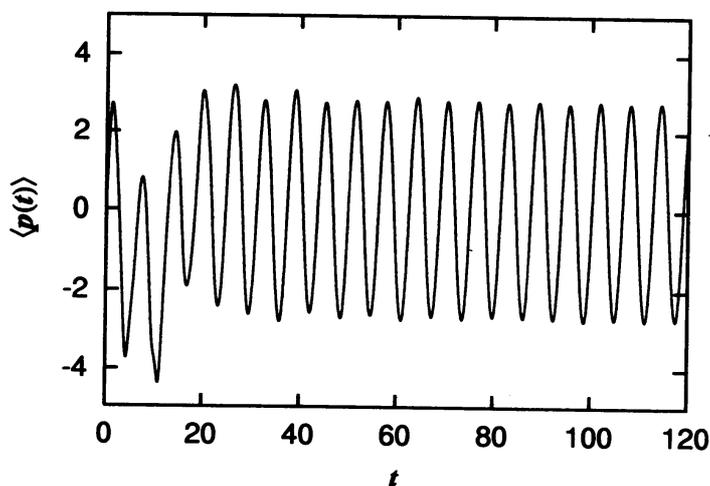


図 3: 角速度の集合平均  $\langle p(t) \rangle$  の時系列.

$$\gamma=0.22, b=2.7, \omega=1. \quad \langle q(0) \rangle = -1.5, \langle p(0) \rangle = 0, \phi(0) = 0.$$

図 3 は図 2 と同じパラメータ値を用いたときの  $p(t)$  の集合平均  $\langle p(t) \rangle$  に対する時系列である。集合平均を計算するにあたって  $q(t), p(t)$  のアンサンブル数はそれぞれ  $10^5$  とし、 $q(t), p(t)$  の初期分布に関しては平均がそれぞれ  $\langle q(0) \rangle = -1.5, \langle p(0) \rangle = 0$ , 分散がいずれも  $10^{-4}$  の Gauss 分布とし

た。一方、 $\phi(t)$  は  $\phi(0)=0$ 、すなわち  $\phi(t)=\omega t$  とした。 $\langle p(t) \rangle$  は初期 ( $t=0\sim 80$ ) の過渡状態を経て振幅が一定の規則的な振動に落ち着く。角振動数は周期的駆動力の角振動数  $\omega=1$  と一致する。初期値の分散が小さい限りにおいて、異なる初期値分布の場合でも過渡状態を経た後の規則的な振動は同じになる。今回の研究ではこの統計的に定常な振幅をモデル方程式より求め、数値シミュレーションによる振幅と比較する試みを行った。なお、 $p(t)$  がまだアトラクターの近傍にまで近づいていないと推測される時刻  $t=0\sim 20$  を除いた過渡状態 ( $t=20\sim 80$ ) における振幅は周期外力の変化する時間スケール  $\omega^{-1}$  と比較してゆっくりと変化していることに注意する。

### 3 射影演算子法によるモデル方程式の導出

はじめに振り子の角度  $q(t)$  ( $-\pi \leq q(t) < \pi$ )、角速度  $p(t)$ 、周期外力の位相  $\phi(t)$  に初期条件を与える。簡単の為、初期値を  $q \equiv q(0)$ ,  $p \equiv p(0)$ ,  $\phi \equiv \phi(0)$  と略記する。 $q(t), p(t)$  の初期分布は図 3 にならって平均がそれぞれ  $q_0 (\neq 0), 0$ 、分散がいずれも  $\sigma^2$  の Gauss 分布とする。外力項には揺らぎはないものとし、 $\phi=0$  に固定して (3) より  $\phi(t)=\omega t$  とする。これにより  $\phi$  は平均・分散共にゼロとなる。以上をまとめると  $q, p, \phi$  の平均・2乗平均は

$$\langle q \rangle = q_0, \langle p \rangle = 0, \langle \phi \rangle = \phi = 0, \quad (4)$$

$$\langle q^2 \rangle = q_0^2 + \sigma^2, \quad \langle p^2 \rangle = \sigma^2, \quad \langle \phi^2 \rangle = 0, \quad (5)$$

である。

射影演算子  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  を次のように定義する。

$$\mathcal{P}f(\mathbf{a}) \equiv \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \langle f(\mathbf{a}) \mathbf{a}_m^\dagger \rangle \left[ \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \rangle^{-1} \right]_{mn} \mathbf{a}_n, \quad (6)$$

$$\mathcal{Q}f(\mathbf{a}) \equiv f(\mathbf{a}) - \mathcal{P}f(\mathbf{a}). \quad (7)$$

ここで  $\mathbf{a} \equiv (q, p)$  とし、 $\langle \cdot \rangle$  は集合平均、 $\dagger$  はエルミート共役を表す。(6) から分かるように射影演算子  $\mathcal{P}$  は任意の関数  $f(\mathbf{a})$  を初期値  $q, p$  を基底とする平面に射影する演算子である。この射影演算子を導入することによって力学情報が縮約されるのであり、このことが不可逆性の起源となる<sup>5</sup>。なお、射影演算子  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  は

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \quad (8)$$

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{P}(1 - \mathcal{P}) = 0, \quad (9)$$

を満たすものとして定義される。ところで、異なる変数の初期値は独立であることと (4), (5) より、 $2 \times 2$  行列  $\langle \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \rangle_{ln}$  の逆行列  $\left[ \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \rangle^{-1} \right]_{nl}$  は

$$\left[ \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \rangle^{-1} \right]_{nl} = \begin{pmatrix} (q_0^2 + \sigma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma^{-2} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

となる。したがって射影演算子 (6),(7) は

$$\mathcal{P}f(\mathbf{a}) = \frac{\langle f(\mathbf{a})q \rangle}{\langle q^2 \rangle} q + \frac{\langle f(\mathbf{a})p \rangle}{\langle p^2 \rangle} p, \quad (11)$$

$$\mathcal{Q}f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) - \frac{\langle f(\mathbf{a})q \rangle}{\langle q^2 \rangle} q - \frac{\langle f(\mathbf{a})p \rangle}{\langle p^2 \rangle} p, \quad (12)$$

となる。これらの射影演算子 (11),(12) を角速度  $p(t)$  の運動方程式 (2) が含む非線形項  $-\sin q(t)$  に対して用いる。つまり、 $\sin q(t) = \mathcal{P} \sin q(t) + \mathcal{Q} \sin q(t)$  として非線形項を関数空間上で直交する 2 つの成分に分離することにより、 $p(t)$  の運動方程式 (2) を次のように書き直す。

$$\dot{p}(t) = \Omega q(t) - \gamma p(t) - \int_0^t (\Gamma'_1(t-t')q(t') + \Gamma'_2(t-t')p(t')) dt' + r(\mathbf{a}; t) + b \cos \omega t. \quad (13)$$

(13) を拡張されたランジュバン方程式と呼ぶ。ここで、

$$\Omega = -\frac{\langle q \sin q \rangle}{\langle q^2 \rangle}, \quad (14)$$

$$\Gamma'_1(t) = -\frac{\langle (\Lambda r(\mathbf{a}; t))q \rangle}{\langle q^2 \rangle}, \quad (15)$$

$$\Gamma'_2(t) = -\frac{\langle (\Lambda r(\mathbf{a}; t))p \rangle}{\langle p^2 \rangle}, \quad (16)$$

$$r(\mathbf{a}; t) = -\exp[\mathcal{Q}\Lambda t] (\sin q + \Omega q), \quad (17)$$

$$\Lambda = p \frac{\partial}{\partial q} - (\sin q + \gamma p - b \cos \phi) \frac{\partial}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (18)$$

$r(\mathbf{a}; t)$  は揺動力と呼ばれ、初期値  $\mathbf{a}$  で張られた線形空間からプロジェクトアウトされた空間における非線形成分の時間発展を表現している。この揺動力は Brown 運動の場合とは異なり、ミクロな揺らぎを表すものではないことに注意しなければならない。また、(17) から明らかなように揺動力は指数演算子を含んでいるので、非常に複雑な形をすることが推測できる。なお、 $\Lambda$  は時間発展を表す Liouville 演算子である。 $\Gamma'_1(t), \Gamma'_2(t)$  は記憶関数と呼ばれ、(15),(16) から明らかなように揺動力  $r(\mathbf{a}; t)$  と関連している。したがって記憶関数も非常に複雑な関数形を成すと推測できる。乱流の場合、 $\Gamma'_2(t)$  は渦粘性係数と解釈できる<sup>1,2</sup>。拡張されたランジュバン方程式 (13) の右辺第 3 項にあるように、これらの記憶関数は時間積分され、過去の履歴に依存した粘性・摩擦抵抗になる。なお、ここまでの議論において拡張された Langevin 方程式 (13) の導出は厳密であり、したがって拡張された Langevin 方程式 (13) はもともとの運動方程式 (2) と等価である。

$p(t)$  に対する拡張された Langevin 方程式 (13) と  $q(t)$  の運動方程式 (1) から  $p(t)$  を消去して得られた式の両辺に  $q \equiv q(0)$  を掛け、集合平均  $\langle \dots \rangle$  をすると  $q(t)$  の自己相関関数  $\langle q(t)q \rangle$  についての微分方程式が得られる。

$$\langle \dot{q}(t)q \rangle + \gamma \langle \dot{q}(t)q \rangle - \Omega \langle q(t)q \rangle + \int_0^t (\Gamma'_1(t-t') \langle q(t')q \rangle + \Gamma'_2(t-t') \langle \dot{q}(t')q \rangle) dt' = \Re [q_0 b e^{i\omega t}].$$

図3より平均量振幅は外力の時間スケール  $\omega^{-1}$  と比較してゆっくりと変化していることが分かるので(19)の解  $\langle q(t)q \rangle$  に対してつぎの時間スケール分離を仮定する。

$$\langle q(t)q \rangle = \Re [B(\tau)e^{i\omega t}], \quad \tau = \epsilon t \quad (\epsilon \ll 1). \quad (20)$$

ここで  $\tau$  は  $t$  よりもゆっくりと変化する時間スケールでの時間変数である。(20)を(19)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \left\{ \epsilon^2 \ddot{B}(\tau) + 2\epsilon i\omega \dot{B}(\tau) - \omega^2 B(\tau) + \gamma \left( i\omega B(\tau) + \epsilon \dot{B}(\tau) \right) - \Omega B(\tau) \right\} e^{i\omega t} \\ & + \int_0^{\epsilon t} \left\{ \Gamma'_1 \left( \frac{\tau - \tau'}{\epsilon} \right) B(\tau') + \Gamma'_2 \left( \frac{\tau - \tau'}{\epsilon} \right) \left( i\omega B(\tau') + \epsilon \dot{B}(\tau') \right) \right\} e^{i\omega \frac{\tau'}{\epsilon}} \epsilon^{-1} d\tau' = q_0 b e^{i\omega t}, \quad (21) \end{aligned}$$

となる。ここで、記憶関数の緩和時間が外力の変化する時間スケール  $\omega^{-1}$  よりも十分に小さいと仮定し、記憶関数をデルタ関数で近似する。

$$\Gamma'_1 \left( \frac{\tau - \tau'}{\epsilon} \right) \sim 2\Gamma_1 \delta \left( \frac{\tau - \tau'}{\epsilon} \right), \quad (22)$$

$$\Gamma'_2 \left( \frac{\tau - \tau'}{\epsilon} \right) \sim 2\Gamma_2 \delta \left( \frac{\tau - \tau'}{\epsilon} \right). \quad (23)$$

ここで  $\Gamma_1, \Gamma_2$  は定数である。

(22),(23)の両辺を  $s = \frac{\tau - \tau'}{\epsilon}$  で積分すると定数  $\Gamma_1, \Gamma_2$  は

$$\Gamma_1 = \int_0^\infty \Gamma'_1(s) ds, \quad (24)$$

$$\Gamma_2 = \int_0^\infty \Gamma'_2(s) ds, \quad (25)$$

となるので、右辺の積分を計算するために記憶関数  $\Gamma'_1(s), \Gamma'_2(s)$  の緩和時間よりも短い局所的な時間スケールを考え、記憶関数を  $s=0$  の近傍でテーラー展開し、2次の項までで打ち切る。

$$\Gamma'_1(s) = \Gamma'_1(0) + \dot{\Gamma}'_1(0)s + \frac{1}{2}\ddot{\Gamma}'_1(0)s^2, \quad (26)$$

$$\Gamma'_2(s) = \Gamma'_2(0) + \dot{\Gamma}'_2(0)s + \frac{1}{2}\ddot{\Gamma}'_2(0)s^2. \quad (27)$$

ここで(26),(27)の右辺各項を計算すると、

$$\Gamma'_1(0) = \dot{\Gamma}'_2(0) = 0, \quad (28)$$

となるので記憶関数(26),(27)をさらに、

$$\Gamma'_1(s) \sim 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Gamma'_2(s) &= \Gamma'_2(0) + \frac{1}{2}\ddot{\Gamma}'_2(0)s^2 \\ &\sim \Gamma'_2(0) \exp \left[ \frac{\ddot{\Gamma}'_2(0)}{2\Gamma'_2(0)} s^2 \right], \quad (30) \end{aligned}$$

と近似する。記憶関数  $\Gamma'_{21}(s), \Gamma'_{22}(s)$  に対して  $s=0$  の近傍でしか (24), (25) の無限積分に寄与しないような減衰を仮定する。これにより  $s=0$  近傍において成り立つ近似 (29), (30) を無限積分しても積分値そのものにほとんど影響はない。よって

$$\Gamma_1 = 0, \quad (31)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma'_2(0) \sqrt{-\frac{\pi \Gamma'_2(0)}{2 \ddot{\Gamma}'_2(0)}}, \quad (32)$$

となる。ただし、無限積分が発散しない条件は

$$\Gamma'_{22}(0) \ddot{\Gamma}'_{22}(0) < 0, \quad (33)$$

である。

(22), (23), (31), (32) を (21) に代入すると、

$$\epsilon^2 \ddot{B}(\tau) + \epsilon (2i\omega + \gamma + \Gamma_2) \dot{B}(\tau) + \{i\omega(\gamma + \Gamma_2) - \omega^2 - \Omega\} B(\tau) = q_0 b. \quad (34)$$

(34) を振り子のモデル方程式とする。

$q(t)$  に  $q(0)$  との相関がなくなる時刻では  $q(t)$  はすでに過渡状態を過ぎ、アトラクター上にある。したがってこのとき  $\langle q(t) \rangle$  は定常振幅  $C$  となる。

$$\langle q(t)q \rangle \rightarrow \langle q(t) \rangle \langle q \rangle = \Re [C e^{i\omega t} q_0]. \quad (35)$$

このように  $\langle q(t) \rangle$  の振幅が一定となる時、 $\dot{B}(\tau) = \ddot{B}(\tau) = 0$  より (34) は

$$\{i\omega(\gamma + \Gamma_2) - \omega^2 - \Omega\} C = b, \quad (36)$$

となる。したがって定常振幅  $|C|$  は

$$|C| = \frac{b}{\sqrt{\omega^2(\gamma + \Gamma_2)^2 + (\omega^2 + \Omega)^2}}, \quad (37)$$

である。(37) から定常振幅を求めるにあたって初期値  $q_0$  は過渡状態を経て一定振幅の振動に落ち着いた状態での  $\langle q(t) \rangle$  の軌道上にとらねばならない。 $\omega=1$  とした場合、定常振幅  $|C|$  となる時刻での振り子の角度  $\langle q(t) \rangle$  は

$$\langle q(t) \rangle = \Re[C] \cos t - \Im[C] \sin t, \quad (38)$$

であり、振り子の角速度  $\langle p(t) \rangle$  は  $\langle \dot{q}(t) \rangle = \langle p(t) \rangle$  より

$$\langle p(t) \rangle = \left\langle q \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle, \quad (39)$$

という関係が成り立つ。つまり、 $\langle p(t) \rangle = 0$  のとき  $\langle q(t) \rangle$  は振動の山、または谷となる。いま、 $\langle p(0) \rangle = 0$  としているのでしたがって  $\langle q(0) \rangle \equiv q_0$  は

$$q_0 = \text{sgn}(q_0) |C(q_0)|, \quad (40)$$

となる。そこで

$$f(q_0) \equiv q_0 - \text{sgn}(q_0)|C(q_0)| = 0, \quad (41)$$

として  $f(q_0)=0$  の根  $q_0$  を求めれば、それが  $q(t)$  あるいは  $p(t)$  の定常振幅ということになる。このことは  $q(t), p(t)$  が初期状態から過渡状態を経ずに瞬時にアトラクターへ乗ることを意味している。

(41) から振幅を求めるにあたって注意すべきことを最後に述べる。モデル方程式 (34) を導出する過程で記憶関数の緩和時間あるいは相関時間が外力の変化する時間スケールと比較して十分に小さいと仮定し、記憶関数に対してデルタ関数への近似 (22),(23) を行ったが、このことによりこのモデルは振り子がカオスとなる場合のみを想定していることに注意する。振り子が周期運動をする場合、記憶関数も当然周期的になり、したがって記憶関数に対する時間相関は永遠になくならず、(22),(23) も成り立たなくなってしまうからである。

## 4 比較結果

振り子の平均量に対するモデル方程式 (34) から得られた角速度の定常振幅 (37) (以下モデル振幅と呼ぶ) と数値シミュレーションの結果 (以下数値振幅と呼ぶ) とをパラメータ値を変えて比較する。比較結果の一例を図 4、図 5 に示す。なお、数値振幅は図 3 と同じ初期状態のもとで、Runge-Kutta 法を用いて計算された  $\langle p(t) \rangle$  の、過渡状態を経て十分に時間経過した時系列上から求める。

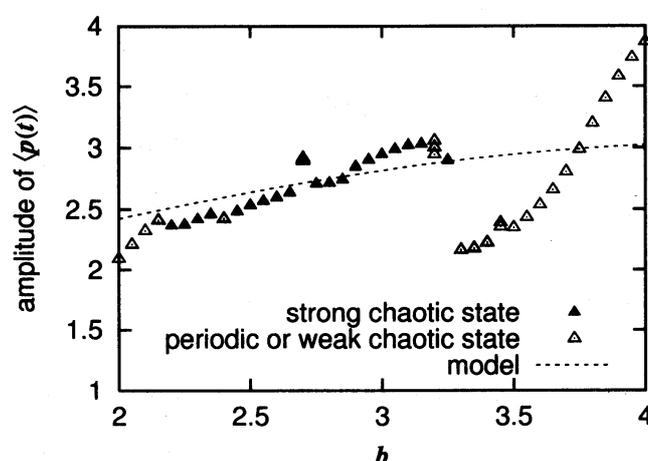


図 4: モデル振幅と数値振幅との比較.  $\gamma=0.18$ ,  $\omega = 1$ .

図 4 は  $\gamma=0.18$ ,  $\omega=1$  と固定し、横軸  $b$  を 2.0 から 4.0 まで刻み幅 0.05 で変化させて  $\langle p(t) \rangle$  の数値振幅とモデル振幅とをプロットした図である。縦軸は振幅の大きさである。破線がモデル振幅、三角点が数値振幅を表す。数値振幅に関しては Liapunov 数が高い場合、すなわち強いカオスとなる場合を黒で、Liapunov 数が低い、すなわち周期運動あるいは弱いカオスとなる場合を白として区別してある。区別の基準として、Liapunov 数が 0.1 を超える場合を強いカオス、0.1 に満たない

場合を周期運動あるいは弱いカオスとした。Liapunov 数が低いパラメータ値において振幅値が複数個プロットされているのは外力周期  $2\pi$  よりも長い周期運動であることを示している。強いカオスとなる  $b$  の値に対してモデル振幅と数値振幅を比較した結果、モデル振幅が数値振幅からかけ離れた値になることはなく、予想以上にモデル振幅は数値振幅に近い値になった。また、 $b$  が増加するにつれて数値振幅も増加する傾向を、モデル振幅では勾配こそ数値振幅より緩やかだが再現できている。なお、モデル振幅の  $b$  に対する勾配はわずかだが減少する。

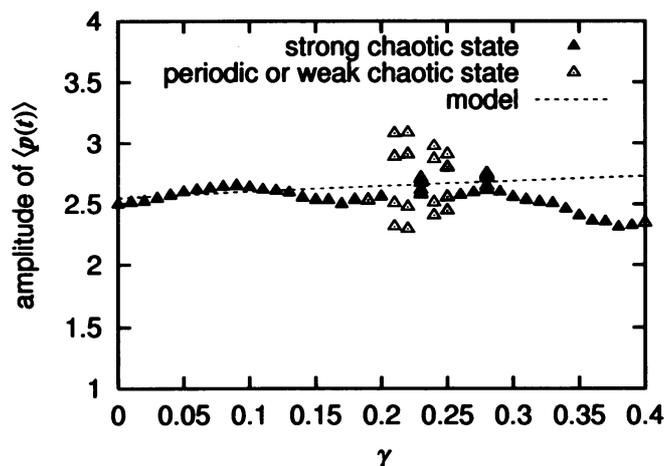


図 5: モデル振幅と数値振幅との比較.  $b=2.5, \omega=1$ .

図 5 は  $b=2.5, \omega=1$  と固定し、横軸  $\gamma$  を 0.0 から 0.4 まで刻み幅 0.01 で変化させて図 4 同様、 $\langle p(t) \rangle$  の数値振幅とモデル振幅とをプロットした図である。この図によると、モデル振幅は  $\gamma \leq 0.3$  の範囲内で数値振幅に近くなる。ただし、数値振幅は  $\gamma$  が 0.3 を超えると減少するのに対してモデル振幅はそのまま増加し、このパラメータ領域で数値振幅と同じ傾向を再現することはできなかった。

ここで図 4、図 5 共に Liapunov 数の高低がモデルの精度に影響するわけではないことに注意しなければならない。

図 6 は各パラメータ値でのモデル振幅の精度を示す。横軸を  $\gamma$ 、縦軸を  $b$  とし、数値振幅からのずれの大きさを 6 段階に分けてプロットしてある。なお、Liapunov 数が低いために比較の対象とならなかった部分は空欄としてある。ずれの大きさが 0.2 未満、すなわち、だいたい 10% 未満のずれをモデルの有効範囲と見なせば、このモデルはカオスの場合、広範囲において有効であることがわかる。モデルの有効範囲は  $b$  に関しておよそ  $2.15 \leq b \leq 3.3$  のバンド間に制限される。この範囲の外では振り子は周期運動になる。このことは次のように解釈される。周期的駆動力が微小振幅だと角度  $q(t)$  も微小になり、 $p(t)$  の運動方程式 (2) は  $\sin q(t) \sim q(t)$  の近似が成り立つような線形常微分方程式に帰着する。一方、周期的駆動力が大振幅だとそれとの比較で非線形効果は無視できるくらい微小になるので振り子は外力に完全に駆動され周期運動となる。

なお、 $\gamma$  が小さく  $b$  が大きい範囲、逆に  $b$  が小さく  $\gamma$  が大きい範囲でモデルの精度は劣っている。

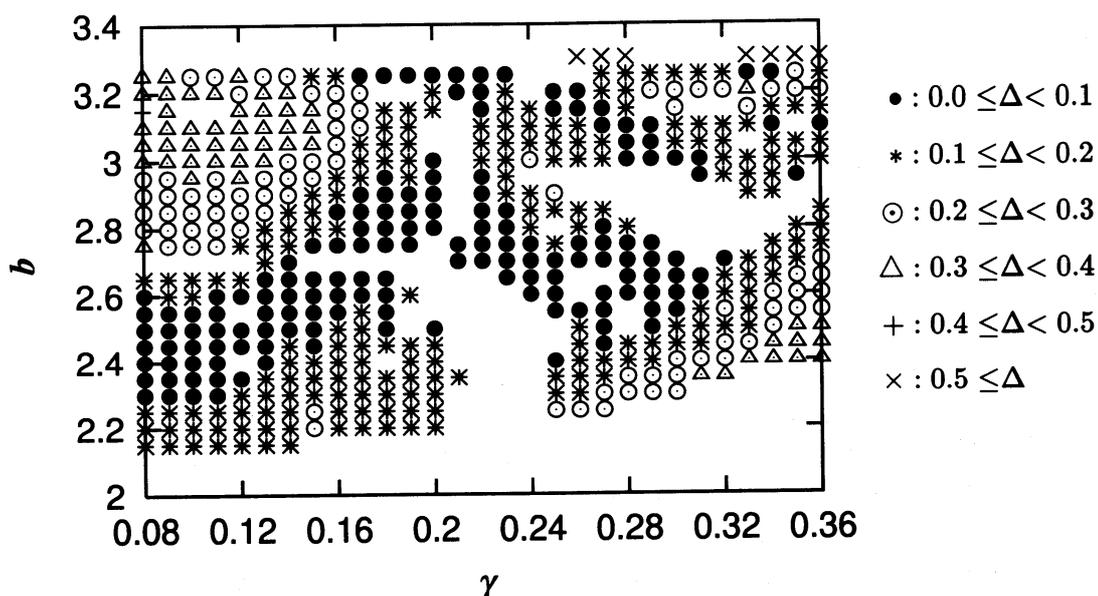


図 6: モデル振幅と数値振幅の差  $\Delta$

## 5 結論・考察・今後の課題

振り子のモデル方程式から求めた角速度の振幅は、Liapunov 数が高いカオスの場合、数値シミュレーションの結果に対して広範なパラメータ領域でずれが 10%未満となることがわかった。同時に記憶関数に対して与えた仮定の正当性を確認することもできた。一方で、仮定が成り立つ高 Liapunov 数の範囲において Liapunov 数の大きさとモデルの精度との間に相関はなく、モデルの精度を左右する要因を特定することはできなかった。しかし要因として、(i) 各々のパラメータ値での記憶関数に固有な緩和時間の長短、(ii) 射影演算子によって縮約される情報量のパラメータ依存度、等が考えられる。

## 参考文献

- [1] T. Iwayama and H. Okamoto, Prog. Theor. Phys. **90** (1993) 343.
- [2] T. Iwayama and H. Okamoto, Prog. Theor. Phys. **90** (1993) 1229.
- [3] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423.
- [4] H. Mori and H. Fujisaka, Phys. Rev. E **63** (2001) 026302.
- [5] 一柳正和, 不可逆過程の物理 日本統計物理学史から (数理物理シリーズ) (日本評論社, 1999)