

チャネル乱流バーストの渦ダイナミクス

京大院・理

藤 定義、板野 智昭

1 はじめに

壁のある流れでは、壁近傍で乱流生成が卓越する。一方、その領域では縦渦やヘアピン渦に代表される渦構造やストリークなどの秩序構造が観測されるので、発達した場であるにも関わらず統計的な取扱は難しい [1]。しかし、最近の研究から壁近傍での乱流生成は動力学的な過程として理解できることが示唆されている [2]。

我々は、秩序構造がナビエ・ストークス方程式の定常進行波解 (TWS) と関連しており、位相空間では乱流生成過程がこの定常進行波解の周りの低次元力学系として理解できると明らかにした。後で示すように我々の描像では、壁近傍での乱流生成機構を位相空間の固定点である定常進行波への安定多様体に沿っての漸近過程と不安定多様体に沿っての離脱過程の総体として定義する。以下、この不安定化過程をバーストと呼ぶ¹。従って乱流生成過程は単純な位相空間での運動として記述できるが、実空間では渦構造の複雑化過程として観測され、その過程を表現するのは非常に難しい。実際の流れでは、壁近傍のダイナミクスと外部層はカップルしており、また空間的広がりが大きいため複数の定常進行波が関与するであろうし、その空間変調なども考慮しなければならないであろう。この意味でも、実空間での流れ場の変化を記述する手法は重要な役割を果たすと思われる。

本報告では、渦構造複雑化過程を記述するのに適当な手法を提案し、乱流生成過程の記述を試みる。

2 これまでの研究

具体的な取り組みに進む前に、必要と思われるこれまでの研究成果を簡単にまとめる。本報告も含め、我々の結果はチャネル流の直接シミュレーション (DNS) に基づく。表 1 に用いた DNS の数値パラメータをまとめた。

Re	Re_τ	L_x	L_y	L_z	$N_x \times N_y \times N_z$
3000	130 ⁺	$\pi \sim 430^+$	2	$0.4\pi \sim 170^+$	$32 \times 65 \times 32$

表 1

¹定常進行波解は時間的な周期解であるが、位相空間をエネルギーを用いて定義すると解の位相変化は消えるので固定点となる。

座標は、チャンネルの流れ方向を x 軸、壁に垂直方向を y 軸、スパン方向を z 軸と置いた。スパン方向の長さは、壁単位で 170^+ であり、Jinénez 等のミニマルユニットに比べ若干大きい [3]。計算スキームは、空間方向に対し、壁に垂直な方向にチェビシェフ多項式展開、流れ方向とスパン方向にフーリエ級数展開をそれぞれ用いたスペクトル法を使った。エイリアジング誤差は、それぞれ $1/2$ 位相シフトを用い取り除いた。時間発展は、2 次精度のアダムシュ・バッシュホース法とクランク・ニコルソン法を組み合わせている。

図 1 に壁に垂直方向エネルギーの成分、 E_y^{Q2D} と E_y^{3D} で張られる 2 次元位相空間内での 3 本の軌道を描いた²。時刻 $t=0$ から出発した軌道は定常進行波に対応する固定点に漸近し、その後初期条件に応じて乱流状態か層流に漸近する。この意味で、定常進行波の安定多様体が乱流状態と層流を分けるセパトリックスになっている。

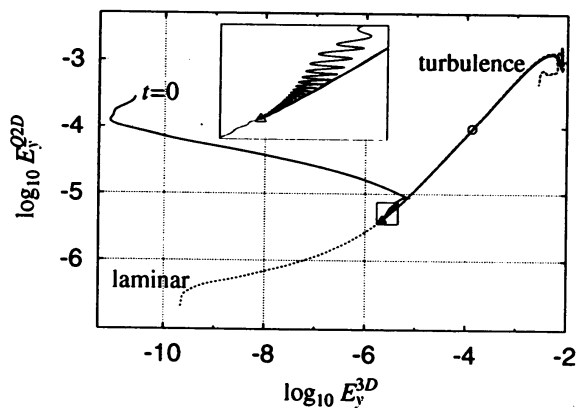


図 1: 壁に垂直方向のエネルギーの準 2 次元成分と 3 次元成分で張られた 2 次元空間への解軌道の射影。3 つの初期条件に対応する軌道を描いた。定常進行波に対応する固定点近傍を拡大した図を加えた。

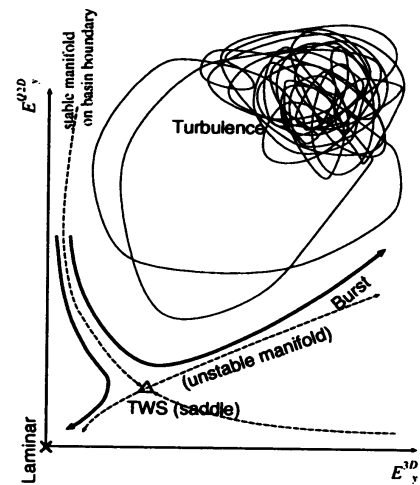


図 2: 位相空間の模式的な描像

図 2 に、位相空間の模式的な様子を描いた。ここで得た定常進行波解は、乱流と層流を分けるセパトリックス上のサドルであるが、実際の流れではサドルの近傍を通過すると考えられる。この時の接近の距離に応じて、出現する縦渦構造やバーストの大きさが変化する。従って、統計的な処理が必要となるが、我々の描像では定常進行波解、及びその近傍のダイナミクスで一意的に記述できる。ただし、軌道の再帰性はグローバルな振舞であり、サドル近傍のダイナミクスだけでは説明できない。しかし、図 4 に示すように、壁近傍での個々の乱れ生成は良く似ており素過程の存在を、また、その間隔が確率的であることから、サドルへの接近をそれぞれ示唆しており、我々の描像を支持している。定常進行波が一方の壁に局在していることから、この生成過程自身が壁近傍に局在したダイナミクスで記述でき、また外部層と比較的独立な、すなわち外部層からのフィードバックが小さいものであると期待できる。つまり、比較的低次元の力学系として記述できる壁近傍の乱

²速度場の準 2 次元成分 (Q2D) と 3 次元成分 (3D) を定義する。 $u^{Q2D}(y, z, t) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} u(x, t) dx$, $u^{3D}(x, t) = u(x, t) - u^{Q2D}(y, z, t)$.

流生成機構とそれにより励起される外部層により壁乱流が構成されていると想像される。

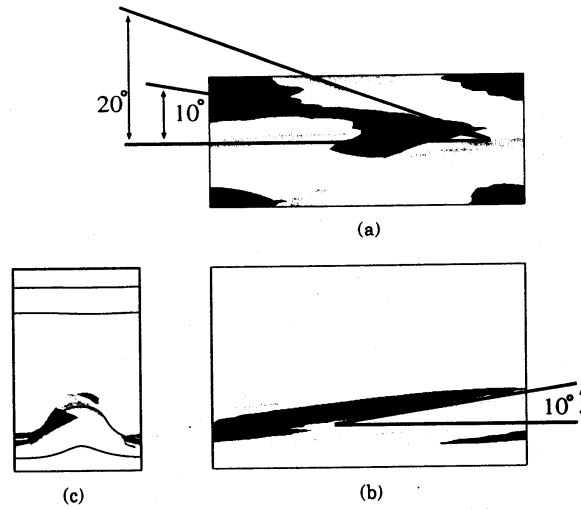


図 3: 定常進行波解の空間構造。黒い領域は負の縦渦成分、灰色の領域は正の縦渦成分を表す。(a) y 軸方向、(b) スパン方向、(c) 流れ方向への射影。定常進行波は、下の壁に局在している。

図 3 に DNS を用いたシューティング法により求めた定常進行波の渦構造を示した。詳細については、文献 [4] を参照されたい。Jeong 等が DNS データから統計的に得た縦渦構造と非常に良く似ている [5]。特に流れ方向に正弦波的に変動するストリーク挟むように正負の縦渦が交互に千鳥って配置している様子は完全に一致している。また、図 3(c) から分かるように、渦は流れ方向速度が位相速度にほぼ等しい一定の面に局在している。従って、その形成がストリークの不安定性および臨界層の存在と関連していることが示唆される。ただし、ストリークは非定常な解であることに注意して欲しい。

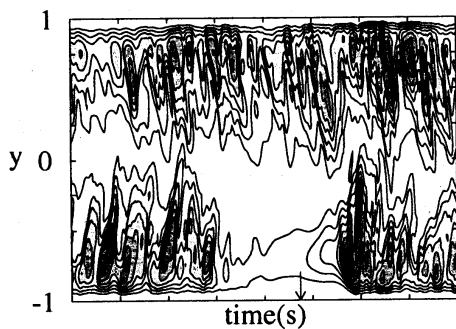


図 4: 乱流状態でのレイノルズ応力 $\langle u_x u_z \rangle (y, t) = \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} u_x u_z dx dz$ の時間発展。上下の壁での乱流生成が独立に起こっているように見える。個々のバーストは良く似ているが、それらの間隔は一定ではない。

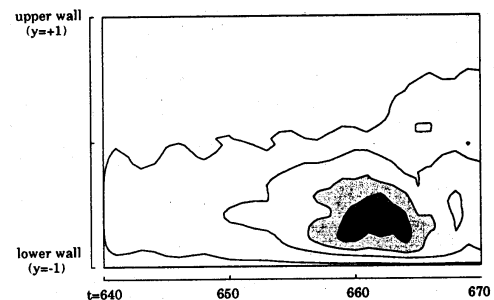


図 5: 本報告で扱った典型的なバースト過程でのレイノルズ応力の変化。 $t < 650$ を線形増幅期間、 $650 < t < 670$ 非線形発展期間、とそれぞれ呼ぶ。時刻 $t = 662$ でバーストのピークに達する。ピーク時刻以降をバースト後期と呼ぶ。

図 5 に、本研究で解析を行った DNS データのレイノルズ応力の時間変化を示す。これは、

定常進行波解の不安定多様体に沿っての時間発展に対応する。データは大まかに3つの期間に分けられる。最初が $t < 650$ の線形増幅期、続いて $650 < t < 670$ 非線形発展期であるが、この期間をバーストがピークに達する時刻 $t = 662$ の前後に分けて、それぞれバースト前期、バースト後期と呼ぶことにする。バーストの初期は線形不安定モードが増幅し非線形な発展が始まる期間であり場は全体として秩序を保っている。バースト前期で急速にレイノルズ応力が増大し、これに伴い壁近傍の渦が吹きあげられ渦構造はより複雑化する。以下、この場の複雑化過程を渦構造の発展として記述することを試みる。

3 渦構造の記述手法

3.1 スカラー閾値法を用いた渦構造の同定

渦構造を定義するのは、容易なようで実は難しい。これまで、渦度等スカラーの等値面を用いる手法が手軽でよく用いられてきた。しかし、用いる閾値により構造が変化する。このような恣意性を排除するため、木田達は、渦構造を局所的な回転場すなわち、旋回性に基づく、旋回中心を結んだ連続線を渦のスケルトンとして定義する方法を導入した [6]。この方法は明確であるが、容易でないこと、物理的な役割や直観的に理解しにくいという欠点もある。本報告では、等値面を用いるが閾値を選ぶ恣意性を排除した手法を提案する。

ここでは、Hussain により提案された λ_2 法を基本に用いる。この手法では、次の速度勾配に関するテンソルの固有値を構造判定のスカラーとする。

$$\Lambda_{ij} = (\Omega^2 + S^2)_{ij} \quad (1)$$

$$= -\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} - \left(\left[\frac{D}{Dt} - \nu \Delta \right] S_{ij} \right) \quad (2)$$

ここで、 S と Ω は、速度勾配テンソルの対称、反対称成分でそれぞれ変形速度テンソル及び渦度テンソルである。式 (2) から分かるように、粘性や移流微分項が無視できる場合は、圧力ヘッシアンと同じであり、圧力の分布と関連している。このことから、 Λ の固有値のうち二つが負である領域は、ある面内で圧力が極小値を持つことに対応し局所的に旋回していることを表す。この意味で、Hussain 等は第2固有値が0である面を渦構造領域の境界とし構造の一意的な定義とした。この定義は場合によっては確かに有効であるが、一般には、状況に応じて第2固有値の値を選ばなければならない、この意味で一意的ではない。この他、広く用いられる方法に速度勾配テンソルの第2不変遍量 Q を用いる Q 法がある。この場合、 Q は $\nabla^2 p / 2$ に等しく圧力の極小と関連し、やはり旋回領域を渦構造と定義するものである。どちらを用いても適当な閾値を使う限り同じような構造が等値面を用いて表現できるが、適当な閾値に任意性があり一意的ではない。以下、適当なスカラー場の等値面を用いて可視化あるいは構造の定義を行う手法をまとめて「スカラー閾値法」と呼ぶ。

3.2 スカラー閾値法の拡張

この節では、スカラー閾値法を閾値に依存しないものに拡張することを試みる。便宜上、スカラーとして λ_2 を用いたが、一般のスカラーに適用できる手法である。図6に示した模式的な空間一次元の λ_2 の分布を用いて説明しよう。閾値として λ_2^a より大きな値を用いると、構造は1つであるが、極大値 λ_2^a より小さいと二つに分裂する。また、更に閾値を極小値 λ_2^d より小さくすると構造は消滅する。一般に、極大値を過るとき構造は分裂し、極小値以下で消滅する。

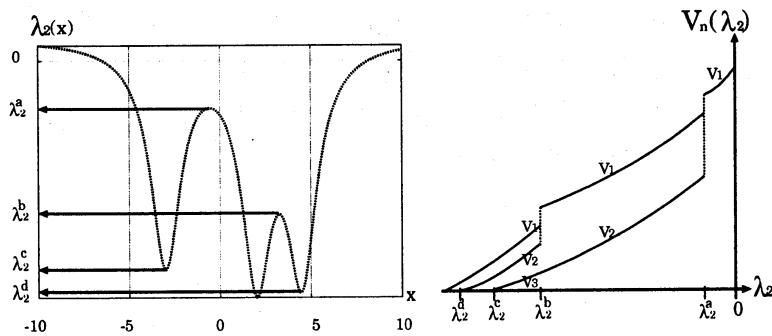


図 6: モデル 1 次元スカラー (λ_2) 場の構造。右図は、閾値と構造の長さのグラフ。極大値を過る毎に構造が分裂し、極小値以下では構造が消滅する。

図6の右図に構造の大きさ(長さ)を閾値の関数として描いた。閾値が下がるに従って構造は小さくなるが、極大値を過るに従い分裂する様子が理解できる。閾値に依存して構造の定性的な様子が変わるのは、 λ_2 の分布に極値が存在することに起因する。ここでは、極大値を空間分布を特徴付けるものとし、それぞれの極大値で定義される複数の構造を改めて渦構造と呼ぶ。明らかに、構造が複雑なもの程内部構造の入れ子が深い。瞬間の場合でも、あたかも渦がカスケード的な入れ子構造をしている、つまり親の世代から分裂しながら新しい世代に交代しているように見做せる。そこで、入れ子の系列の各世代を内部構造、また尤も若い(小さい)世代を極小渦と呼ぶことにする。図7で模式的に示したように、渦構造の複雑化過程を定量的に記述できると期待する。

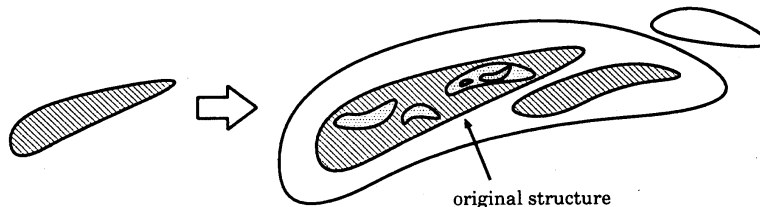


図 7: 構造の複雑化過程の模式図。全体が複雑化すると共に、内部構造が形成され入れ子構造を成す。

4 データの解析

この章では拡張した λ_2 法を用いてバースト過程の解析を行う。

4.1 渦の複雑化：内部構造の入れ子構造

図6では、構造の大きさを占める領域の長さで表した。以下、3次元空間の解析では、等値面が覆う領域の体積で定義する。実空間の様子は、非線形発展段階において急速に渦構造が複雑化する。実際、図8に、時刻 $t = 650$ と $t = 654$ の二つの場合の分岐図を示す。これらの時刻は非線形発展の初期であり、比較的大きなスケールの構造が残っている状態である。それでも内部構造が分岐し入れ子構造が急速に複雑化する様子が読み取れる。個々の内部渦構造の時間発展もある程度は追跡できるが、更に複雑化したバースト状態ではかなり難しい作業であり現在解析中である。

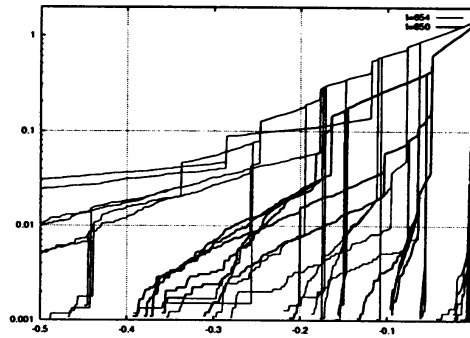


図8: 内部構造の入れ子構造。非線形発展後期の $t = 650$ と 654 の二時刻を比較した。時刻が経つにつれ、同じ閾値に対する体積は増え、枝分かれの数も増える。

4.2 渦内部構造の時間発展：高さと大きさの分布

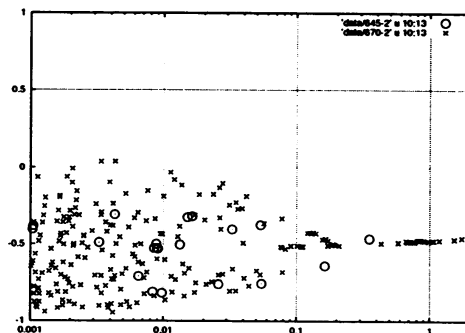


図9: 各内部構造の平均的高さの分布。縦軸に y 座標、横軸に内部構造の体積をそれぞれ取った。非線形発展領域の時刻 $t = 645$ (○) とバースト後の飽和した時刻 $t = 670$ (×) を比較した。

入れ子構造の時間発展を追跡することは、容易ではないし今のところ現実的ではない。そこで、次に内部構造の統計を考察する。図 9 に個々の内部構造の平均的な高さ と 体積の分布を異なる時刻 $t = 645$ と $t = 670$ で比較した。

結果は、バーストを経て微細な内部構造が形成されること、また下半分の領域全体に分布が広がることを示している。当り前の結果であるが、内部構造を使うことで直観的な結果を定量的に記述できることがわかる。

5 渦の発展：束縛渦から自由渦へ

乱流統計を渦構造の集団統計として表そうとする取り組みがある [7]。そこでは、渦構造はヘアピン渦と総称され、縦渦構造から外部層の発達した渦まで同列で扱う。しかし、果して全ての渦が同じものとして扱えるのか疑問を感じる。

我々の結果では、秩序的な渦構造は入れ子構造を繰り返す、より複雑な内部構造を形成することで乱流生成を担っていることが示された。特に、渦の入れ子構造は、見掛け上カスケードに良く似ているので、渦構造カスケードと呼ぶことにする。ところで、初期の秩序渦と後期の乱流状態の渦構造に質的な違いがあるであろうか。もし、違いが無いのであれば、壁近傍の秩序縦渦構造と発達した乱流中に観測される微細秩序渦構造は同じ扱いが可能であろうが、それは我々の直観に反する。ここでは、渦構造の向きと渦度の向きに着目し両者の違いを議論する。

5.1 渦構造の向き

渦構造の向きを λ_2 法で定義するのは難しい。ここでは、渦構造は局所的な旋回領域とする定義に立ち帰り、旋回方向を渦構造の向きと定義する。そこで、圧力ヘッシアン $p_{ij} := \partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$ の旋回軸方向（以下この方向の単位ベクトルを e_3 と置く）を局所的な渦構造の向きとする。構造の向きの渦度方向の方向余弦 $\cos \vartheta_\omega := e_3 \cdot \omega / \omega$ を導入する。図 10 に、極小渦構造に含まれる点のヒストグラムを方向余弦 $\cos \vartheta_\omega$ の関数としてプロットした。

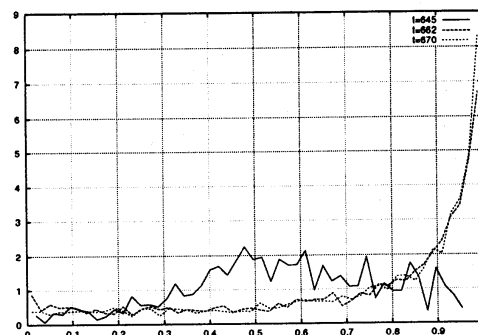


図 10: 内部構造の渦度に対する方向余弦。時刻は、 $t = 645, 662, 670$ の 3 つ。

もし、完全に構造の方向と渦度の向きがランダムなら一様な分布になるが、線形増幅期である時刻 $t = 645$ では、一見ほぼランダムであるように振舞う。すなわち、秩序縦渦構造は一見構造の向きが渦度と相関が無いように見える。しかし、図 11(a) に示すように、壁付近では平均速度勾配によるスパン方向の渦度が主要であり渦線は縦渦に巻き付くような形状をしているのに対し、構造を形作る旋回方向は全体として流れ方向に向いているので定常に近いにも関わらず、分布がフラットに近くなると考えるのが妥当であろう。定常進行波に付随する渦構造は自由に動き回れず全体として秩序を保っている。この意味で、束縛された渦、束縛渦と呼ぼう。

一方バーストによる乱れ生成が行われると、方向余弦は 1 付近に集中するようになり、渦構造と渦度の向きがほぼ一致している事が分かる。このことから、バーストを起こすことで、渦構造が渦度と向きがほぼ一致する微細秩序渦に移行することが示唆される。すなわち、バースト後期の渦構造は渦線とほぼ平行になっており、正に渦と呼べる自由度を獲得する。構造の細分化は必ずしも渦管としての長さ方向の秩序を失うことを意味しない。実際、図 11(b) に示すように渦線に沿って内部渦構造が並んでいることが分かる。個々の極小渦構造のサイズは微細秩序渦構造の直径程度になることから、渦の微細化あるいは入れ子構造の複雑化過程は、束縛渦が微細秩序構造として自由に動き出す過程であり、この意味で形成される渦構造を自由渦と呼べるであろう。乱流生成過程は、定常進行波に束縛された渦構造が複雑化しながら自由渦として独立して行く過程と見做すことができよう。



図 11: 渦線と内部構造の関係。y 軸方向への射影で、流れは左から右。(a) : 時刻 $t = 645$ 渦線は全体としてスパン方向に向いているが、縦渦構造付近では流れ方向に少し傾いており全体として縦渦を形成している。個々の渦線は、縦渦とは平行ではない。また、低速ストリークの回りで上昇するため、ヘアピンの形状を取る。内部構造は 3 つだけ描いた。(b) 時刻 $t = 662$ での渦構造と渦線。ここでは、簡単のため内部構造ではなく λ_2 法による可視化を行った。

6 まとめ

本報告では、チャンネル乱流における壁近傍での乱流生成過程を渦構造の発達過程として記述することを試みた。渦構造の定義として、旋回に関するスカラー場の極値を用いた閾値に依存しない方法を提案し、 λ_2 法に適用した。この定義に基づくと、渦構造は入れ子構

造を成す内部構造により構成される。渦構造の複雑さは入れ子構造の多重性として表現できた。さらに、内部構造の方向を圧力ヘッシアンの固有ベクトルを用い旋回軸方向と定義し、渦度と成す角の方向余弦の分布を調べ、バーストピークの前後で違いがあることを示した。バースト初期では比較的一様分布に近いが、バースト後期では渦度と渦構造の向きが揃うようになる。このことから、バーストによって縦渦構造に束縛されていた渦は、自由渦として乱流乱れを形成するようになると解釈できる。本報告では、予備的な結果しか報告できなかったが、現在詳細な解析を行っている。

最後に、木田等や宮内等 [8] の用いている渦構造の定義である「スケルトン法」と我々の手法との関連について述べる。一見すると我々の極小渦の集合がスケルトン (を囲む旋回領域) と対応しているように思える。しかしながら、極小渦は互いに接しておらず、その集合も連続ではない。正確ではないが、極小渦の集合はスケルトンによる渦構造領域の部分集合であろう。我々の手法では内部構造の入れ子構造あるいは、渦構造カスケードを扱うが、渦構造の複雑さを評価したり統計的に粗視化するのには、比較的直観的でありまた解析も用意である。スケルトン法が渦の動力学を扱うのに便利であるのと対照的である。

参考文献

- [1] S.K. Robinson, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23** (1991) 601.
- [2] J.M. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe, *J. Fluid Mech.*, **287** (1995) 317.
- [3] J. Jiménez and P. Moin, *J. Fluid Mech.*, **225** (1991) 213.
- [4] T. Itano and S. Toh, *J. Phys. Soc. Japan*, **70** (2001) 703.
- [5] J. Jeong, F. Hussain, W. Schoppa, and J. Kim, *J. Fluid Mech.*, **332** (1997) 185.
- [6] S. Kida, H. Miura and T. Adachi: *IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence* ed. T. Kambe, T. Nakano and T. Miyauchi (Kluwer Academic Publishers, 2000), p.199 ; 木田重雄、柳瀬眞一郎：「乱流力学」朝倉書店 (1999)
- [7] R.J. Adrian, C.D. Meinhart, and C.D. Tomkins: *J. Fluid Mech.* **422** (2000) 1.
- [8] T. Miyauchi and M. Tanahashi: *IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence* ed. T. Kambe, T. Nakano and T. Miyauchi (Kluwer Academic Publishers, 2000), p.67