数理解析研究所講究録 1228 巻 2001 年 81-94



# W 代数とモンスター[†]

東京大学大学院数理科学研究科

松尾　厚[‡]

本稿では, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ に含まれる部分代数に関する Griess 代数の分解について考察する。

いうまでもなく, ムーンシャイン加群は頂点作用素代数の最も重要な例である。その Griess 代数を本稿では $B^\natural$ と書くことにするが, これは頂点作用素代数とは独立に有限群論において研究されて来た Griess-Conway 代数と同型である[註1]

ところで, モンスターと Griess-Conway 代数 $B^\natural$ の関係は, Mathieu 群 $M_{24}$ と Golay 符号の関係や Conway 群 $\cdot 1$ と Leech 格子の関係に類似している。Mathieu 群や Conway 群の場合には, Golay 符号や Leech 格子の性質から群の性質が芋蔓式に導かれるが, モンスターの場合にはなかなか芋蔓式とはいかないのが現状である。筆者の考えでは, Griess-Conway 代数 $B^\natural$ はムーンシャイン加群 $V^\natural$ の一部であるから, $V^\natural$ の持つ頂点作用素代数としての性質をもっと深く掘り下げないと Mathieu 群や Conway 群の場合のような理解の仕方には至らないのではないかと思われる。

そこで $V^\natural$ の頂点作用素代数の構造を積極的に使うことによって代数 $B^\natural$ の性質を考察してみようというのは自然な考えであろう。筆者はそのプログラムの第一歩として, Griess 代数のいくつかの元 $a_1, \ldots, a_m$ の随伴作用の合成 $R_{a_1} \cdots R_{a_m}$ の跡を $m \leq 5$ に対して Griess 代数の演算と不変内積 (および $m = 5$ の場合は完全反対称な 5 重線型形式) で表す公式を得た。この公式は Norton によって別の方法ですでに得られていたものであるが, 私の方法の意義は Norton の結果を再現するに留まるものではない。

Norton の方法は次のようなものである。$B^\natural$ の自己同型群がモンスターなのだから, 上の跡は $a_1, \ldots, a_m$ へのモンスターの作用で不変である。さらに, 跡の性質から, 添字の巡回置換で不変でもある。そのような多重線型形式は, $m \leq 5$ の場合, Griess 代数の乗法と不変内積を用いて書けるもののほかには, $m = 5$ の場合に完全反対称な 5 重線型形式があるのみであることがモンスターの表現の性質からわかる。そこで, 跡 $\mathrm{Tr}\, R_{a_1} \cdots R_{a_m}$ をそれら既知の多重線型形式の一次結合で表す係数を決定すれ

---

†. W algebras and the Monster

‡. Atsushi MATSUO
Graduate School of Mathematical Science, University of Tokyo, Japan

1. Griess は文献 [Gr] において, ある可換非結合的代数の自己同型群として実現することによりモンスターの存在を示した。その後 Conway が文献 [Co] においてこの代数を少し変更したものの比較的容易な構成法を与えた。これが上に言う Griess-Conway 代数である。

ば, 跡公式が得られるわけである。そのために, Norton は $B^\natural$ に含まれる冪等元に注目した。例えばモンスターの 2A 元 $g$ に対して, $g$ で固定される冪等元が複数あるが, そのうち長さの最も短いものについては, その $B^\natural$ への随伴作用のスペクトルが知られている。そこでこのデータを跡に代入してやれば, 跡公式の係数に関する関係式が出る。よって, 種々の冪等元の随伴作用のスペクトルのデータが十分に集まれば, 跡公式の係数が決定されてしまう。Norton はこのようにして跡公式を導出した。

こうしてみると, もし跡公式がまったく独立に導かれれば, 逆にそれを利用して冪等元のスペクトルを調べることができることがわかる。しかし, $B^\natural$ は $V^\natural$ の一部であり, 2A 元以外の場合にはおそらく $B^\natural$ に留まって考察するのは得策でない。我々は $B^\natural$ の種々の冪等元を含むような良い部分代数を $V^\natural$ の中に考え, それに関する $V^\natural$ の既約分解を考えたいのである。正確に言うと, ある種の VOA $\mathcal{W}$ から $V^\natural$ へのしかるべき条件を満たすような埋め込みを考え, その像に関する $V^\natural$ の既約分解を利用してモンスターの元を構成しその性質を導こうというのである。ここに現れる代数 $\mathcal{W}$ が表題に言う W 代数である。

本稿では, VOA $\mathcal{W}$ であって, $V^\natural$ への埋め込みからモンスターの 3A 元および 4A 元が構成されるようなものの例を与える。その例は新しいものではなく, 中心電荷 $c_N = 2(N-1)/(N+2)$ の $\mathcal{W}_N$ 代数と呼ばれるものであり, 物理学で $Z_N$ パラフェルミオン代数と呼ばれているものと関係している。特に $N = 3, 4$ の場合には, 対応する W 代数の具体的な構成法であって VOA としての性質が良く調べられているようなものがすでにあるので, それを利用して $V^\natural$ を調べることができる。特に跡公式を利用すると, 対応する Griess-Conway 代数 $B^\natural$ の冪等元に関して, その随伴作用のスペクトルを決定することができる。さらに, 対応する自己同型がそれぞれ 3A, 4A でなければならないこともいえる。一方 $N \geq 5$ の場合には, 対応する $\mathcal{W}_N$ 代数の構成はあるものの, 既約表現の分類およびフュージョン則の決定は VOA の立場では厳密にはなされていないようである。しかし, 少なくとも $N = 5$ の場合には, 予想される性質を形式的に当てはめて計算すると, 冪等元の随伴作用のスペクトルが決定し, 附随する自己同型は 5A 元でなければならないことが出てくる。

従って種々の W 代数の表現論とその $V^\natural$ への埋め込みを研究することによってモンスターの元の $V^\natural$ への作用を記述することができると強く期待されるわけである。この考えは, 2A の場合に宮本雅彦氏が行った構成法の一般化である。

本稿は論文 [Ma1] の一部とその背景の解説である。短期共同研究「頂点作用素代数の表現論とその周辺」講究録に載せる予定の「頂点作用素代数の Griess 代数に対する Norton の跡公式」もあわせて御覧いただきたい。

研究集会での講演を薦めてくださった北詰正顕氏に感謝する。

# 1　頂点作用素代数のGriess代数

複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された頂点作用素代数 (VOA) $V$ を考える。本稿ではその演算および共形ウェイトによる次数付けをそれぞれ

$$Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}z^{-n-1},\quad V=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^n$$

と表す。

頂点作用素代数の一般論については, 文献 [FLM] および [MaN] をご覧いただきたい。特に, 頂点作用素代数には共形ベクトルと呼ばれる次数 2 の元 $\omega\in V^2$ が与えられており, 附随する作用素 $L_n=\omega_{(n+1)}$ がVirasoro代数の表現をなしている:

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\,c$$

その中心電荷 $c$ を VOA の用語に従って $V$ の階数という。また $L_0$ の固有値は共形ウェイトと呼ばれ, 冒頭で述べた $V$ の次数付けは $L_0$ に関する固有空間分解に他ならない。$V$ の指標を

$$\operatorname{ch}V=\sum_{d=0}^{\infty}\dim V^d\,q^d \tag{1.1}$$

と定義する。

さて, ムーンシャイン加群 $V=V^\natural$ は $V^0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ かつ $V^1=0$ となっている。この場合には, 次数 2 の部分空間 $B=V^2$ を考えると, VOAの演算の一部である

$$ab=a_{(1)}b,\quad (a|b)\mathbf{1}=a_{(3)}b \tag{1.2}$$

によって, 可換非結合的代数の構造および不変な内積 (対称双線型形式) が入る。これを, 一般に VOA $V$ の Griess代数と呼ぶ。また, $V$ は定数倍を除き一意的な不変対称双線型形式 $(\,|\,)$ を持つ。[2] この形式を $(\mathbf{1}|\mathbf{1})=1$ と正規化すると, これは $B$ 上の内積 $(\,|\,)$ の $V$ 全体への拡張になっており, $i\neq j$ ならば $(V^i|V^j)=0$ であり, $L_1a=0$ なるベクトル $a\in V^m$ に対しては

$$(a_{(n)}u|v)=(-1)^m(u|a_{(2m-2-n)}v),\quad (u,v\in V) \tag{1.3}$$

が成立する。特に, 任意の $a\in B$ に対して $(a_{(n)}u|v)=(u|a_{(2-n)}v)$ が成立する。

ムーンシャイン加群の構成は複雑であり, 本稿で述べる余裕はないので, 詳しくは文献 [FLM] を参照していただきたいが, 本稿で必要なことはほとんど以下の性質でつきている。

(M1) ムーンシャイン加群 $V^\natural$ は階数 24 の VOA の構造を持つ。

(M2) $\operatorname{ch}V^\natural=q(J(q)-744)$ である。

(M3) 不変対称双線型形式が正定値であるような実形 $V^\natural_{\mathbb{R}}$ が存在する。

(M4) Griess代数 $B^\natural$ は Griess-Conway代数と同型であり, 自己同型群 $\operatorname{Aut}V^\natural$ はモンスター単純群と同型である。

2. 文献 [Li] を参照。

## 2 Nortonの跡公式

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の Griess 代数 $B^\natural$ を考え, その元 $a$ による随伴作用を

$$R_a : B^\natural \longrightarrow B^\natural,\ x \mapsto xa\ (= ax) \tag{2.1}$$

と表す。

**定理 1** Griess-Conway 代数 $B^\natural$ の随伴作用について, 以下の公式が成立する。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} R_{a_1} &= 32814(a_1|\omega), \\
\operatorname{Tr} R_{a_1}R_{a_2} &= 4620(a_1|a_2) + 5084(a_1|\omega)(a_2|\omega), \\
\operatorname{Tr} R_{a_1}R_{a_2}R_{a_3} &= 900(a_1|a_2|a_3) + 620\,\mathrm{Cyc}\,(a_1|a_2)(a_3|\omega) \\
&\quad +744(a_1|\omega)(a_2|\omega)(a_3|\omega), \\
\operatorname{Tr} R_{a_1}R_{a_2}R_{a_3}R_{a_4} &= 166(a_1a_2|a_3a_4) - 116(a_1a_3|a_2a_4) + 166(a_1a_4|a_2a_3) \\
&\quad +114\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2|a_3)(a_4|\omega) + 52\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|a_4) \\
&\quad +80\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|\omega)(a_4|\omega) + 104(a_1|\omega)(a_2|\omega)(a_3|\omega)(a_4|\omega), \\
\operatorname{Tr} R_{a_1}R_{a_2}R_{a_3}R_{a_4}R_{a_5} &= 30\mathrm{Cyc}\,(a_1a_2|a_3|a_4a_5) + 4\mathrm{Cyc}\,(a_1a_4|a_3|a_2a_5) \\
&\quad -22\mathrm{Cyc}\,(a_1a_5|a_3|a_2a_4) + 20\mathrm{Cyc}\,(a_1a_2|a_3a_4)(a_5|\omega) \\
&\quad -14\mathrm{Cyc}\,(a_1a_3|a_2a_4)(a_5|\omega) + 20\mathrm{Cyc}\,(a_1a_4|a_2a_3)(a_5|\omega) \\
&\quad +8\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2|a_3)(a_4|a_5) + 14\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2|a_3)(a_4|\omega)(a_5|\omega) \\
&\quad +6\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|a_4)(a_5|\omega) + 10\,\mathrm{Sym}\,(a_1|a_2)(a_3|\omega)(a_4|\omega)(a_5|\omega) \\
&\quad +14(a_1|\omega)(a_2|\omega)(a_3|\omega)(a_4|\omega)(a_5|\omega) + 52(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)
\end{aligned}$$

ここで $(a_i|a_j|a_k)$ は $(a_ia_j|a_k) = (a_i|a_ja_k)$ を表し, Sym は添字の置換に関する和を, Cyc は添字の巡回置換に関する和を表す。また $m = 5$ の最後の項は完全反対称な 5 重線型形式

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\mathbf{1} = \frac{1}{5!}\sum_{\sigma\in S_5}(-1)^{\ell(\sigma)}\sigma(a_{1(3)}a_{2(2)}a_{3(1)}a_{4(0)}a_5) \tag{2.2}$$

である。

すでに触れたように, この公式は, Norton によって群論的方法で得られていた公式であるが, 彼は $m = 5$ の場合については $a_1, \ldots, a_5$ が単位元と直交する場合, すなわち $(a_1|\omega) = \cdots = (a_5|\omega) = 0$ の場合しか記していない。また, 完全反対称な 5 重線型形式については, 跡公式自体を定義と見なせるとしか書いていない。

筆者は, 論文 [Ma1] でこの公式の別証明を与えた[註3] それは, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ のモンスター $\mathbb{M}$ による固定部分空間と真空ベクトル $\mathbf{1}$ で生成された Virasoro 部分加群とが次数 10 まで一致するという性質[註4] に基づくものである。この方法は

3. 実際には筆者は Norton の結果を知らずに研究をしていたが, 結果を Ivanov に話したところ, Norton が関連する論文を書いていると教えてくれた。そこで論文 [No] を見てみると, 確かに全く同じ公式が書いてあって, ちょっとがっかりした次第である。
4. 文献 [HL] を参照。実際には次数 11 まで一致するが, 11 次の空間は跡公式の導出には必要ない。

自己同型群の性質を用いているので完全に群論抜きの証明とは言えないが[註5]同様の性質を持つ他の VOA にも一般化できるという点で優れている。その手法を少し変更すると, ムーンシャイン加群の一点函数のモジュラー不変性とウェイト 11 以下の尖点形式の非存在に基づいて, 全く群論を用いずに証明することもできる。これについては論文 [Ma1] では簡単に触れただけだが, 論説 [Ma2] ではもう少し詳しく述べたので, 興味のある方は参照していただきたい。

ところで, 仮に代数 $B^\natural$ が結合的であったとすれば, $a, a' \in B^\natural$ に対して $R_a R_{a'} = R_{aa'}$ であるから, 合成する随伴作用の個数を増やしても跡公式の担う情報量は本質的に変わらないはずである。しかし, 実際には Griess-Conway 代数 $B^\natural$ は非結合的であって, 跡公式の持つ情報は合成する随伴作用の個数を増やすにつれ増えていく。つまり Norton の跡公式は, 代数 $B^\natural$ の非結合性の度合い[註6]を反映した情報を抽出して我々に提供してくれる端末装置であると言えよう。

## 3　冪等元のスペクトル

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の Griess 代数 $B^\natural$ を考える。本稿では $B^\natural$ の元 $t$ であって $t^2 = 2t$ を満たすものを便宜的に冪等元と呼ぶことにする。前節の跡公式で特に $a_1 = \cdots = a_5 = t$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\ R_t &= 32814\,(t|t)\,,\\
\mathrm{Tr}\ R_t^2 &= 4620\,(t|t) + 5084\,(t|t)^2\,,\\
\mathrm{Tr}\ R_t^3 &= 1800\,(t|t) + 1860\,(t|t)^2 + 744\,(t|t)^3,\\
\mathrm{Tr}\ R_t^4 &= 864\,(t|t) + 1068\,(t|t)^2 + 480\,(t|t)^3 + 104\,(t|t)^4\,,\\
\mathrm{Tr}\ R_t^5 &= 480\,(t|t) + 680\,(t|t)^2 + 370\,(t|t)^3 + 100\,(t|t)^4 + 14\,(t|t)^5.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

となる。

冪等元の重要性は, $T_n = t_{(n+1)}$ とすると, これが $V^\natural$ 上に中心電荷 $b = 2(t|t)$ の Virasoro 代数の表現を与えることにある:

$$
[T_m, T_n] = (m-n)T_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}\, 2(t|t) \tag{3.2}
$$

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ は, 不変対称双線型形式が正定値となるような実形 $V^\natural_{\mathbb{R}}$ を持つので, $V^\natural_{\mathbb{R}}$ に属する冪等元を, 実冪等元と呼ぶことにする。実冪等元 $t$ の生成する部分 VOA は Virasoro 代数の最高ウェイト既約表現 $L(b, 0)$ に附随する VOA と同型である。また, この Virasoro 加群の構造に関して $V^\natural$ は完全可約となるから, $V^\natural$ は既約 $L(b, 0)$-加群の直和に分解する。

特に, $b$ が Virasoro 代数のユニタリ系列と呼ばれる系列に属する場合には, VOA $L(b, 0)$ は有理的であって, それに対する既約加群の分類は Virasoro 代数の表現論で

5. それどころか, ムーンシャイン加群 $V^\natural$ をモンスターの表現と見たときの自明表現の成分が小さいことから跡が決定してしまうのだから, Norton の方法と思想的には全く同じであるといえる。

6. 代数 $B^\natural$ において結合律に代わるべき関係式は $B^\natural$ の中では閉じておらず, VOA $V^\natural$ の構造の中に複雑に組み込まれている。筆者はそれを利用して跡公式を証明したのである。

よく知られているものと一致する。そのリストを $L(b,h_\lambda)$, $(\lambda\in\Lambda)$ とおくことにする。このとき, $L(b,0)$-加群として $V^\natural$ を既約分解することにより, $V^\natural$ は

$$V^\natural=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}V^\natural(h_\lambda) \tag{3.3}$$

と書かれる。ここに, $V^\natural(h_\lambda)$ は $L(b,h_\lambda)$ と同型なものの和を表す。

さて, Griess 代数 $B^\natural$ の冪等元 $t$ による随伴作用 $R_t=T_0$ について, $B^\natural$ が

$$B^\natural=\bigoplus_{\lambda}B^\natural(h_\lambda) \tag{3.4}$$

と分解したとしよう。ただし, $B^\natural(\lambda)$ は随伴作用 $R_t$ に関する固有値 $\lambda$ の固有空間であり, $B^\natural(2)$ は $t$ で張られる一次元空間である。各固有空間の次元を

$$d(h_\lambda)=\dim B^\natural(h_\lambda) \tag{3.5}$$

とおく。このとき,

$$\mathrm{Tr}\,R_t^n=\sum_{\lambda}\lambda^n d(h_\lambda) \tag{3.6}$$

であるから, 前節の跡公式とあわせれば, 固有値 $h_\lambda$ の種類が少ない場合には, これからスペクトル $d(\lambda)$ が決定してしまうことがある。

例えば冪等元 $t$ として, $2(t|t)=1/2$ なる実冪等元をとったとしよう。すると $t$ が生成する部分 VOA は Virasoro 代数の中心電荷 1/2 の最高ウェイト既約表現 $L(\frac{1}{2},0)$ に附随した VOA と同型である。ところが既約 $L(\frac{1}{2},0)$-加群は $L(\frac{1}{2},0)$,$L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$ のいずれかと同型であるから $h_\lambda=0,\ 1/2,\ 1/16$ であって,

$$B^\natural=B^\natural(0)\oplus B^\natural(\tfrac{1}{2})\oplus B^\natural(\tfrac{1}{16})\oplus B^\natural(2),\quad B^\natural(2)=\mathbb{C}t \tag{3.7}$$

と分解する。従って,

$$d(0)+d(\tfrac{1}{2})+d(\tfrac{1}{16})+1=196884 \tag{3.8}$$

および

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{16}d(\tfrac{1}{16})+2&=\mathrm{Tr}\,R_t=\frac{16407}{2}\\ \frac{1}{4}d(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{256}d(\tfrac{1}{16})+4&=\mathrm{Tr}\,R_t{}^2=\frac{5891}{4}\end{aligned} \tag{3.9}$$

が成立する。これを解いて,

$$d(0)=96256,\quad d(\tfrac{1}{2})=4371,\quad d(\tfrac{1}{16})=96256 \tag{3.10}$$

が得られる。

さて, 写像

$$g = \begin{cases} 1 & \text{on} \quad V^\natural(0) \oplus V^\natural(\frac{1}{2}) \\ -1 & \text{on} \quad V^\natural(\frac{1}{16}) \end{cases} \tag{3.11}$$

を考えると, これは $V^\natural$ の自己同型すなわちモンスターの元を定める。モンスターの位数 2 の元全体は, 2A および 2B と呼ばれる二つの共役類に分かれるが, その $B^\natural$ 上の跡は 2A の場合 4372 であり, 2B の場合 276 になることが知られている。[7] 上の自己同型の跡を計算してみると

$$\mathrm{Tr}|_{B^\natural}\, g \;= d(0) + d(\tfrac{1}{2}) - d(\tfrac{1}{16}) + 1 = 96256 + 4371 - 96256 + 1 = 4372 \tag{3.12}$$

であるから自己同型 $g$ は共役類 2A に属する。

モンスターの 2A 元と冪等元 $t$ の関係については, Conway が文献 [Co] に記している。上のようにして VOA の自己同型を構成することでモンスターの元をとらえようという発想は宮本雅彦氏による。宮本氏は論文 [Mi] で上記の写像 $g$ が共役類 2A に属することを述べるのに文献 [Co] を引用しているが, ここでは $g$ の $B^\natural$ 上の跡を計算して共役類を確認してみた。

# 4　W 代数とスペクトル

前節では, 中心電荷 $b$ の冪等元 $t$ から生成された部分代数[8] すなわち埋め込み

$$L(b,0) \hookrightarrow V^\natural \tag{4.1}$$

を考えた。しかし, 前節の方法でモンスターのもっと高い位数の元を構成するには Virasor VOA $L(b,0)$ を用いるのでは不十分で, VirasoroVOA を含むもっと大きな部分代数を考える必要がある。その第一の候補としてパラフェルミオン代数から作られる中心電荷 $c_N = 2(N-1)/(N+2)$ の $\mathcal{W}_N$ 代数が考えられるのだが, それについては後述する。

ここでは, 一般に中心電荷 $b$ の VOA $\mathcal{W} = \mathcal{W}^0 \oplus \mathcal{W}^1 \oplus \mathcal{W}^2 \oplus \mathcal{W}^3 \oplus \cdots$ であって

$$\mathcal{W}^0 = \mathbb{C}\mathbf{1}, \quad \mathcal{W}^1 = 0, \quad \mathcal{W}^2 = \mathbb{C}t, \quad \mathcal{W}^3 = \mathbb{C}\partial t \oplus \mathbb{C}w \tag{4.2}$$

なるものが与えられたとする。ここで $w$ は最高ウェイトベクトルであり, $\partial t = t_{(-2)}\mathbf{1}$ である。[9] このような VOA $\mathcal{W}$ を便宜的に W 代数と呼ぶことにする。[10] そこで単射線型写像

$$\iota : \mathcal{W} \hookrightarrow V^\natural \tag{4.3}$$

7. 文献 [CN] を参照。
8. VOA の部分代数の共形ベクトルは全体の共形ベクトルと一致しなくてもよいものとする。
9. ここで $\partial t$ は $Y(\partial t, z) = dY(t,z)/dz$ となるような元である。文献 [MaN] では $\partial$ を $T$ と書いている。
10. W 代数という言葉の意味するところは実は流儀によってまちまちである。最も一般的に言えば W 代数とは VOA(あるいはその元のモード全体のなす Lie 代数) とその上の加群のことであるが, 通常は共形ベクトルと共形ウェイト 3 以上のプライマリーベクトルたちから生成されている場合を指す。実際には後述する $\mathcal{W}_N$ 代数を含むある種の具体的に構成された VOA のクラスを称して W 代数と呼ぶことが多いように思われる。

であって以下の条件を満たすものを考える。ただし $\mathcal{W}$ と写像 $\iota$ による像を同一視し

$$T_n = t_{(n+1)}, \quad W_n = w_{(n+2)} \tag{4.4}$$

とおく。

(W1) 写像 $\iota$ は VOA の演算を保つ。

(W2) $\mathcal{W}$ 上で $T_n = L_n$ が成立する。

(W3) VOA $\mathcal{W}$ は $V^\natural$ の実形 $V^\natural_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役で閉じている。

(W4) 元 $t$ および $w$ は $V^\natural$ の実形 $V^\natural_{\mathbb{R}}$ に含まれる。

すると仮定 (W2) により $T_0$ の固有値と $L_0$ の固有値は $\mathcal{W}$ 上で一致するから, 特に $t$ と $w$ はそれぞれ $V^\natural$ の次数 2, と 3 の元である。そこで次数 2 の元 $t$ を考えると, 仮定 (W1) によりこれは $V^\natural$ の冪等元であって, 任意の $u, v \in V^\natural$ について

$$(T_0u|v) = (t_{(1)}u|v) = (u|t_{(1)}v) = (u|T_0v) \tag{4.5}$$

である。実形 $V^\natural_{\mathbb{R}}$ 上の不変対称双線型形式は正定値であって $T_0$ は $V^\natural_{\mathbb{R}}$ について対称行列で表されるから, これは $V^\natural$ 上で半単純であり, その固有値は実数である。さらに $[L_0, T_0] = 0$ であって $V^\natural$ の各次数の部分空間はさらに $T_0$ に関する固有空間に分解する。特に Griess 代数 $B^\natural$ は $T_0$ に関する固有空間に分解する。

次に次数 3 の元 $w$ について考察しよう。仮定 (W2) から $L_1w = T_1w = 0$ であるから, (1.3) により, 任意の $u, v \in V^\natural$ について

$$(W_0u|v) = (w_{(2)}u|v) = -(u|w_{(2)}v) = -(u|W_0v) \tag{4.6}$$

である。実形 $V^\natural_{\mathbb{R}}$ 上の不変対称双線型形式は正定値であって $W_0$ は $V^\natural_{\mathbb{R}}$ について反対称行列で表されるから, これは $V^\natural$ 上で半単純であり, その固有値は絶対値の等しい純虚数のペアまたは 0 である。

以下では, 既約 $\mathcal{W}$-加群は最高ウェイトベクトルから生成され, 既約 $\mathcal{W}$-加群の同型類の集合は最高ウェイトベクトルの $T_0$, $W_0$ に関する固有値で分類されるものと仮定する。そこで既約 $\mathcal{W}$-加群の同型類全体をパラメトライズする集合を $\Lambda$ とし, 元 $\lambda \in \Lambda$ に対応する既約 $\mathcal{W}$-加群の最高ウェイトベクトルの $T_0$, $W_0$ に関する固有値を $h_\lambda$, $\sigma_\lambda$ と表すことにする。すると仮定 (W4) から $V^\natural$ は既約 $\mathcal{W}$-加群の (一般には無限個の) 直和に分解する。添字 $\lambda$ の表す既約 $\mathcal{W}$-加群と同型な成分全体の和を $V^\natural(\lambda)$ と表すことにすると

$$V^\natural = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V^\natural(\lambda) \tag{4.7}$$

となる。

さて, 作用素 $T_0$ に関する $B^\natural$ の固有空間分解

$$B^\natural = \bigoplus B^\natural(h) \tag{4.8}$$

を考える。すると $[T_0, W_0]=0$ であるから, 各 $B^\natural(h_\lambda)$ はさらに $W_0$ に関する固有空間に分解する。以下で述べる実例では, 既約 $\mathcal{W}$-加群の最高ウェイトベクトルの $W_0$ に関する固有値は, $T_0$ に関する各固有値 $h_\lambda$ に対して 0 であるか一組の純虚数のペアであるかのいずれかであって, 代数 $B^\natural$ は

$$B^\natural = B^\natural(2) \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B^\natural(h_\lambda, \sigma_\lambda) \tag{4.9}$$

と分解することになる。固有空間の次元を

$$d(h_\lambda, \sigma_\lambda) = \dim B^\natural(h_\lambda, \sigma_\lambda) \tag{4.10}$$

と表すことにしよう。

# 5 4A 元と VOA $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$

前節の条件を満たすようなムーンシャイン加群の部分代数の例を考えよう。

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ は文献 [FLM] によるその構成からして, Leech 格子に附随した VOA の対合による固定部分空間 $V_{\mathrm{Leech}}^+$ を含んでいる。そこで Leech 格子の元 $\alpha\neq 0$ を一つ選んで固定し, 一次元格子 $\mathbb{Z}\alpha$ を考えると,

$$V_{\mathbb{Z}\alpha}^+ \hookrightarrow V_{\mathrm{Leech}}^+ \subset V^\natural \tag{5.1}$$

なる VOA の埋め込みがある。

そこで VOA $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ について考えてみよう。このタイプの VOA は物理でも数学でも比較的よく考察されて来たものであるが, VOA としての細かい性質まで丁寧に調べられたのは比較的最近のことで, 文献 [DN], [Ab] による。それによれば VOA $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ は三つの元

$$t=\frac{1}{2}(h_{(-1)})^2\mathbf{1},\ E=e_\alpha+e_{-\alpha},\ J=h_{(-1)}^4\mathbf{1}-2h_{(-3)}h_{(-1)}\mathbf{1}+\frac{3}{2}(h_{(-2)})^2\mathbf{1} \tag{5.2}$$

で生成されており, 共形ベクトル $t$ について $E, J$ はそれぞれ共形ウェイト $3, 4$ のプライマリーベクトルである。ただし, $h$ は $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\alpha$ の長さ 1 の元である。ここで, $w=\sqrt{-1}E$ とおくと, VOA $\mathcal{W}=V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ およびその元 $t, w$ は埋め込み (5.1) に関して前節で述べた条件 (W1)–(W4) を満たす。[註11]

特に $\langle\alpha,\alpha\rangle=6$ の場合には, 既約 $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$-加群は 10 種類あり, それらは最高ウェイトベクトルの $T_0$, $W_0$ に関する固有値で次のように分類される。

$$(h,\sigma)=(0,0),\ (1,0),\ (1/12,0),\ (1/3,0),\ (3/4,\pm),\ (1/16,\pm),\ (9/16,\pm) \tag{5.3}$$

そこで, 第 3 節同様に埋め込み (5.1) に関する代数 $B^\natural$ の分解

$$B^\natural = B^\natural(0)\oplus B^\natural(\tfrac{1}{16})\oplus B^\natural(\tfrac{1}{12})\oplus B^\natural(\tfrac{1}{3})\oplus B^\natural(\tfrac{9}{16})\oplus B^\natural(\tfrac{3}{4})\oplus B^\natural(1)\oplus B^\natural(2) \tag{5.4}$$

11. 一次元格子については格子 VOA を構成する際にコサイクル因子をつける必要がないので, 文献 [DN], [Ab] でもコサイクル因子をつけずに定式化しているが, 実形を考察する場合にはコサイクル因子をつける方が自然であって, 元 $w$ に因子 $\sqrt{-1}$ をつける必要があるのはそのせいである。

について $T_0$ の作用の冪乗に跡公式を適用して, 次元 $d(h_\lambda)$ についての連立方程式をたてる。この場合, 未知数の個数が方程式の個数を上回ってしまうが, 幸いにして非負の整数解はただ一通りに定まり, 結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} &d(0) = 38226,\ d(\tfrac{1}{16}) = 94208,\ d(\tfrac{1}{12}) = 48600,\ d(\tfrac{1}{3}) = 11178, \\ &d(\tfrac{9}{16}) = 4096,\ d(\tfrac{3}{4}) = 552,\ d(1) = 23,\ d(2) = 1. \end{aligned} \tag{5.5}$$

前節の考察により $B^\natural(h_\lambda)$ はさらに $W_0$ に関する固有空間に分解される。その固有値が絶対値の等しい純虚数のペアの場合, それぞれの固有空間の次元は等しいので

$$\begin{aligned} d(\tfrac{1}{16},+) &= d(\tfrac{1}{16},-) = 47140 \\ d(\tfrac{9}{16},+) &= d(\tfrac{9}{16},-) = \ \ 2048 \\ d(\tfrac{3}{4},+) &= d(\tfrac{3}{4},-) = \ \ \ 276 \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる。

さて, $V^\natural$ の既約 $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$-加群への分解を用いて

$$g = \begin{cases} 1 & \text{on} \quad V^\natural(0) \oplus V^\natural(\tfrac{1}{3}) \oplus V^\natural(1) \\ -1 & \text{on} \quad V^\natural(\tfrac{1}{12}) \oplus V^\natural(\tfrac{3}{4}) \\ \pm\sqrt{-1} & \text{on} \quad V^\natural(\tfrac{1}{16},\pm) \oplus V^\natural(\tfrac{9}{16},\pm) \end{cases} \tag{5.7}$$

なる線型写像を考える。すると文献 [Ab] で示された $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ のフュージョン則により, この写像は $V^\natural$ の自己同型を与えていることがわかる。従って写像 $g$ はモンスターの位数 4 の元を与える。ここで代数 $B^\natural$ の分解を用いて写像 $g$ の跡を計算してみると,

$$\mathrm{Tr}\,|_{B^\natural}\, g = 38226 - 48600 + 11178 - 552 + 23 + 1 = 276 \tag{5.8}$$

となり, 写像 $g$ は共役類 4A に属することがわかる。なお, 作り方から写像 $g$ は実形 $V_{\mathbb{R}}^\natural$ をそれ自身に写している。

# 6 $\mathcal{W}_N$ 代数

前節で利用した VOA $\mathcal{W} = V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ は, 実は物理の用語で中心電荷 1 の $\mathcal{W}_4$ 代数と呼ばれるものに同型である。[註12] 代数 $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ の既約加群であって, ウェイト $(0,0)$, $(3/4,+)$, $(1,0)$, $(3/4,-)$ でラベルされたものをそれぞれ $U_{\bar{0}}$, $U_{\bar{1}}$, $U_{\bar{2}}$ および $U_{\bar{3}}$ としよう。ここで, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ であり, もちろん $U_{\bar{0}} = V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ である。これらを直和した空間を

$$U = U_{\bar{0}} \oplus U_{\bar{1}} \oplus U_{\bar{2}} \oplus U_{\bar{3}} \tag{6.1}$$

12. この種の代数には種々の構成法があり, 適当に表現空間をとれば同じ VOA が得られることは疑う余地はないが, その厳密な証明を実行した文献は見あたらない。

とすると, 空間 $U$ には一般化された VOA の構造が入り, $\mathbb{Z}_4$-パラフェルミオン代数と呼ばれるものになる。[註13]

一般に $\mathbb{Z}_N$ パラフェルミオン代数と呼ばれるものが知られていて

$$U = \bigoplus_{0 \le k \le N-1} U_{\bar{k}} \tag{6.2}$$

と分解している。ただし, $\bar{k}$ は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の元を表す。特に $\mathcal{W} = U_{\bar{0}}$ は VOA の構造を持ち, 中心電荷

$$c_N = \frac{2(N-1)}{N+2} \tag{6.3}$$

の $\mathcal{W}_N$ 代数と呼ばれるものとなる。また, 残りの $U_{\bar{k}}$, $(1 \le k \le N-1)$ は $\mathcal{W}$-加群となり, 共形ウェイト

$$\Delta_k = \frac{k(N-k)}{N} \tag{6.4}$$

の最高ウェイトベクトルで生成される。パラフェルミオン代数は Zamolodchikov-Fateev によって考案され, その後も物理学ではよく研究されているものである。パラフェルミオン代数の具体的な構成法としては, 二種類のコセット構成法がよく知られている。その一つである $\mathrm{SU}(2)_N/\mathrm{U}(1)$ コセット構成法については, VOA の立場での厳密な構成が Dong-Lepowsky によって文献 [DL] において実行されている。もう一つの構成法は $\mathrm{SU}(N)_1 \times \mathrm{SU}(N)_1/\mathrm{SU}(N)_2$ コセット構成法というもので, こちらは指標のモジュラー不変性の観点からの研究はあるものの, VOA の立場での研究はあまりなされていないようである。

現在知られている最も一般的で強力な W 代数の構成法は, 量子化された Drinfeld-Sokolov 還元法[註14] と呼ばれるもので, 物理学者によって創始され, Feigin-Frenkel によって数学的な定式化が与えられた方法である。[註15] その方法によれば, 各単純 Lie 代数に附随するアフィン Lie 代数の可容表現[註16] から出発して W 代数を構成することができる。特に $\widehat{s\ell}_N(\mathbb{C})$ から出発すると $\mathcal{W}_N$ 代数が得られるわけである。$\mathcal{W}_N$ 代数については, その既約加群の分類およびフュージョン則は結果はわかっている。[註17] 中心電荷 $c_N$ の場合には, $\mathcal{W}_N$ 代数の既約加群はアフィン Lie 代数 $\widehat{s\ell}_N(\mathbb{C})$ のレベル 2 のウェイトでパラメトライズされ, フュージョン則は $\widehat{s\ell}_N(\mathbb{C})$ のフュージョン則と同型である。

さて, $N=2$ の場合には, 中心電荷 $c_2 = 1/2$ の $\mathcal{W}_2$ 代数は Virasoro 加群 $L(\frac{1}{2}, 0)$ に他ならず, そのムーンシャイン加群への埋め込みに関する $B^\natural$ のスペクトル分解は第 3 節の計算に帰着する。また, $N=4$ の場合は第 5 節の計算に帰着する。

---

13. この場合, 二つの場 $Y(u,y)$ と $Y(v,z)$ の作用素積展開が $y-z$ の分数冪で展開されるので, 通常の VOA にはならず, 一般化された VOA と呼ばれるものになる。文献 [DL] を参照。
14. quantized Drifeld-Sokolov reduction
15. 文献 [FKW] およびその文献表を参照。筆者の知る限り Feigin-Frenkel の理論は肝心なところが予想にとどまっており, 完成した理論ではないと思われる。
16. admissible representation
17. 例えば文献 [FKW] を参照。ただし, 上に述べたように, 厳密な証明は完成していないと思われる。

一方 $N=3$ の場合については, 中心電荷 $c_3=4/5$ の $\mathcal{W}_3$ 代数のいま一つの構成法が北詰氏らによって文献 [KMY] で実行されており, 既約加群の分類およびフュージョン則の決定が VOA の枠組みで厳密に行われている。従ってこの場合には既約加群の分類とフュージョン則を安心して使うことができ, もし $\mathcal{W}$ がムーンシャイン加群に条件 (W1)–(W4) を満たすように埋め込まれれば, 対応する $T_0$ に関する $B^\natural$ のスペクトル分解を跡公式で計算することができる。その結果, 対応する自己同型は共役類 3A に属するモンスターの元を与えることがわかる。スペクトル分解は文献 [No] にある Norton の計算結果と当然ながら一致する。

次に $N=5$ の場合すなわち中心電荷 $c_5=8/7$ の $\mathcal{W}_5$ 代数を考える。この場合には, 既約加群の分類とフュージョン則の決定は VOA の立場で数学的に厳密には実行されていないようである。しかし, 上で述べたように, その結果がレベル 2 のアフィン Lie 代数のウェイトとフュージョン則で与えられることは確実なので, それを跡公式にあてはめてみよう。すると, 仮に $\mathcal{W}$ が条件 (W1)–(W4) を満たすようにムーンシャイン加群に埋め込まれれば, 対応する冪等元 $t$ のスペクトルは

$$\begin{aligned}&d(0)=27228,\ d(\tfrac{2}{35})=72010,\ d(\tfrac{3}{35})=76912,\ d(\tfrac{17}{35})=6688,\ d(\tfrac{23}{35})=1520,\\&d(\tfrac{2}{7})=12122,\ d(\tfrac{6}{7})=133,\ d(\tfrac{4}{5})=268,\ d(\tfrac{6}{5})=2,\ d(2)=1.\end{aligned}\tag{6.5}$$

とならなければならないことがわかる。また, 自己同型

$$g=\begin{cases}1 & \text{on}\quad V^\natural(0)\oplus V^\natural(\frac{2}{7})\oplus V^\natural(\frac{6}{7})\oplus V^\natural(1)\\ \zeta^{\pm1} & \text{on}\quad V^\natural(\frac{2}{35},\pm)\oplus V^\natural(\frac{17}{35},\pm)\oplus V^\natural(\frac{6}{5},\pm)\\ \zeta^{\pm2} & \text{on}\quad V^\natural(\frac{3}{35},\pm)\oplus V^\natural(\frac{23}{35},\pm)\oplus V^\natural(\frac{4}{5},\pm)\end{cases}\tag{6.6}$$

の $B^\natural$ 上の跡を計算すると

$$\begin{aligned}&27228+(\zeta+\zeta^{-1})(72010+6688+2)/2\\&\quad+(\zeta^2+\zeta^{-2})(76912+1520+268)/2+12122+133+1=134\end{aligned}\tag{6.7}$$

となり, 写像 $g$ は共役類 5A に属するモンスターの元を与えることがわかる。[註18] ただし, $\zeta$ は 1 の原始 5 乗根である。

一般に, 中心電荷 $c_N$ の $\mathcal{W}_N$ 代数 $\mathcal{W}$ の条件 (W1)–(W4) を満たすようなムーンシャイン加群 $V^\natural$ への埋め込みが存在したとする。すると $\widehat{s\ell}_N(\mathbb{C})$ のレベル 2 ウェイト $\lambda$ に対して, 対応する既約 $\mathcal{W}$-加群と同型な $V^\natural$ の成分の和を $V^\natural(\lambda)$ とするとき, 写像

$$g=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n-1}im_i/N\right)\quad\text{on}\quad V^\natural(\lambda)\quad\text{for}\quad\lambda=\sum_{i=1}^{N-1}m_i\Lambda_i\tag{6.8}$$

はモンスターの位数 $N$ の元を与えると期待される。ただし $\Lambda_1,\dots,\Lambda_{N-1}$ は $s\ell_N(\mathbb{C})$ の基本ウェイトである。

18. この結果 (モンスターの 5A 元に附随する冪等元のスペクトル分解) を知っているかと Norton に訊ねたところ, 試みたけれど複雑すぎて計算できていないとのことであった。

# 参考文献


[Ab] Abe, T.: Fusion rules for the charge conjugation orbifold. Preprint (math/0006101).

[BPZ] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov: Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. Nuclear Phys. B 241 (1984) 333–380.

[Bo1] Borcherds, R.E.: Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the monster, Proc. Nat'l. Acad. Sci. USA. **83**, 3068–3071 (1986).

[Bo2] Borcherds, R.E.: Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, Invent. Math. **109**, 405–444 (1992).

[Co] Conway, J.H.: A simple construction for the Fischer-Griess monster group, Invent. Math. **79**, 513–540 (1985).

[CN] Conway, J.H. and Norton, S.P.: Monstrous moonshine, Bull. London Math. Soc. **11**, 308–339 (1979)

[DL] Dong, C.-Y. and Lepowsky, J.: *Generalized vertex algebras and relative vertex operators*, Progress in Math. **112**, Birkhäuser, Boston, 1993.

[DM] Dong, C.-Y. and Mason, G.: Monstrous moonshine of higher weight. Acta Math. **185,** 101–121 (2000).

[DMZ] Dong, C.-Y., Mason, G. and Zhu, Y.-C.: 'Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module', in: Haboush, W.J. and Parshall, B.J. (eds.): *Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods* (University Park, PA, 1991), pp. 295–316, Proc. Sympos. Pure Math., **56**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[DN] Dong, C.-Y. and Nagatomo, K.: Representations of vertex operator algebra $V_L^+$ for rank one lattice $L$. Comm. Math. Phys. **202**, 384–404 (1999).

[FKW] Frenkel, E., Kac, V. and Wakimoto, M: Characters and fusion rules for $W$-algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reduction. Comm. Math. Phys. **147**, 295–328 (1992).

[FLM] Frenkel, I.B., Lepowsky, J. and Meurman, A.: *Vertex operator algebras and the Monster*. Pure and Appl. Math. 134, Academic Press, Boston, 1989.

[Gr] Griess, R.L.: The friendly giant. Invent. Math. **69**, 1–102 (1982)

[HL] Harada, K. and Lang, M.-L.: 'Modular forms associated with the Monster module', in: *The Monster and Lie algebras (Columbus, Ohio, 1996)*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. 7, pp. 59–83, de Gruyter, Berlin, 1998.

[Hö] Höhn, G.: Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster. Dissertation, Bonn, 1995.

[KMY] Kitazume, M., Miyamoto, M. and Yamada, H.: Ternary codes and vertex operator algebra. J. Algebra 223 (2000) 379–395.

[Li] Li, H.-S.: Symmetric invariant bilinear forms on vertex operator algebras, J. Pure Appl. Algebra **96**, 279–297 (1994).

[Ma1] Matsuo, A.: Norton's Trace Formulae for the Griess Algebra of a Vertex Operator Algebra with Lager symmetry. Preprint math.QA/0007169.

[Ma2] 松尾　厚:「頂点作用素代数の Griess 代数に対する Norton の跡公式」数理解析研究所短期共同研究「頂点作用素代数の表現論とその周辺」講究録

[MaN] Matsuo, A. and Nagatomo, K.: *Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields.* MSJ-Memoirs 4, Mathematical Society of Japan, 1999.

[Mi] Miyamoto, M.: Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, J. Algebra **179**, 528–548 (1996).

[No] Norton, S.P.: 'The Monster algebra: some new formulae', in *Moonshine, the Monster, and related topics (South Hadley, MA, 1994)*, Contemp. Math. 193 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.297–306.

[ZaF] Zamolodchikov, A.B. and Fateev, V.A.: Nonlocal (parafermion) currents in two-dimensional conformal quantum field theory and self-dual critical points in $Z_N$-symmetric statistical systems, Sov. Phys. JETP **62**, 215–225 (1985).

[Zh] Zhu, Y.-C.: Modular invariance of characters of vertex operator algebras. J. Amer. Math. Soc. **9**, 237–302 (1996).