数理解析研究所講究録 1228 巻 2001 年 127-139

Some Results on the Multiplicity-Free Permutation Group $GL(4,q)$ Acting on $GL(4,q)/GL(2,q^2)$

Hajime Tanaka (田中　太初)†
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

有限体 $\mathbb{F}_{q^2}$ 上 n 次元のベクトル空間は $\mathbb{F}_q$ 上 $2n$ 次元であり、従って一般線形群 $GL(n,q^2)$ は自然に $GL(2n,q)$ の部分群とみなせる。このとき $GL(n,q^2)$ は、最小多項式が二次式でかつ既約な元の安定部分群として特徴付けられる。Inglis-Liebeck-Saxl [2] により置換指標 $1_{GL(n,q^2)}^{GL(2n,q)}$ が multiplicity-free であることが証明されているが、その既約指標への分解はまだ決定されていないように思われる。$n=1$ の場合は非常に易しく、例えば Terras [5] の中で具体的に計算されており、本稿ではその次の $n=2$ の場合について置換指標の分解を完全に決定し、その後九州大学の坂内英一教授による一般の場合についての予想を紹介する。また、最後に両側剰余類 $GL(2,q^2)\backslash GL(4,q)/GL(2,q^2)$ を具体的に記述する方法にも触れる。

1　一般線形群 $GL(n,q)$ の共役類

まず初めに、一般線形群 $GL(n,q)$ の共役類の分類について、Macdonald [3, Chapter IV.] に従い復習する。Φ を t と異なる $\mathbb{F}_q$ 上のモニックな既約多項式全体の集合とする。また、$\mathbb{V}=\mathbb{F}_q^n$ とおく。このとき $A\in GL(n,q)$ を任意に選び $tv:=Av$ $(v\in\mathbb{V})$ と定義すると、$\mathbb{V}$ は左 $\mathbb{F}_q[t]$-加群となる。多項式環 $\mathbb{F}_q[t]$ は単項イデアル整域なので、$\mathbb{V}$ は巡回加群の直和に分解される：

$$\mathbb{V}\cong\bigoplus_{f\in\Phi,i}\mathbb{F}_q[t]/(f)^{\mu_i(f)} \tag{1}$$

ここで、$f\in\Phi$ に対して $\boldsymbol{\mu}(f)=(\mu_1(f),\mu_2(f),\ldots)$ は分割であり、(f) は f により生成される $\mathbb{F}_q[t]$ のイデアルである。(なお、A は正則であることからこの分解の中に多項式 t は表れない。) 言いかえると、$GL(n,q)$ の各々の元は Φ から分割全体の集合 $\mathscr{P}$ への写像 $\boldsymbol{\mu}:\Phi\longrightarrow\mathscr{P}$ で次の条件を満たすものを定める：

$$\sum_{f\in\Phi}d(f)\,|\boldsymbol{\mu}(f)|=n \tag{2}$$

ここで $d(f)$ は多項式 f の次数を表す。明らかに、$GL(n,q)$ のある二つの元が共役であることと、それらの元より構成される $\mathbb{F}_q[t]$-加群たちが同形であることは同値

† 日本学術振興会特別研究員

である。従って、$GL(n,q)$ の各々の共役類に (2) を満たす写像 $\boldsymbol{\mu}:\Phi\longrightarrow\mathscr{P}$ がただ一つ対応する。$\boldsymbol{\mu}$ に対応する共役類を $C_{\boldsymbol{\mu}}$ で表すことにする。

$GL(n,q)$ の任意の元は (1) により、$\overline{g(t)}\longmapsto\overline{tg(t)}$ ($\overline{g(t)}:=g(t)+(f(t))^{\mu_i(f)}$) で定義されるそれぞれの巡回加群上の線形写像の行列たちを対角線上に並べてできる行列に共役である。$\boldsymbol{\mu}(f)\neq 0$ を満たす $f\in\Phi$ を $\mathbb{F}_q$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{F}}_q$ の中で $f(t)=(t-\alpha)(t-\alpha^q)\ldots(t-\alpha^{q^{m-1}})$ と一次式の積に分解すると $i\geq 1$ に対して

$$\overline{\mathbb{F}}_q[t]/(f)^{\mu_i(f)}\cong\overline{\mathbb{F}}_q[t]/(t-\alpha)^{\mu_i(f)}\oplus\overline{\mathbb{F}}_q[t]/(t-\alpha^q)^{\mu_i(f)}\oplus\cdots\oplus\overline{\mathbb{F}}_q[t]/(t-\alpha^{q^{m-1}})^{\mu_i(f)}$$

となる。さらに、例えば上で定義された $\overline{\mathbb{F}}_q[t]/(t-\alpha)^{\mu_i(f)}$ 上の線形写像を基底

$$\{\overline{(t-\alpha)^{\mu_i(f)-1}},\ldots,\overline{(t-\alpha)^2},\overline{t-\alpha},\overline{1}\}$$

に関して行列表示すると

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha\end{pmatrix}$$

となることから、(1) の分解は Jordan 標準形を与えることと同値であることが分かる。

2 $GL(n,q^2)$ の $GL(2n,q)$ への埋め込み

$\{\omega,\omega^q\}\subset\mathbb{F}_{q^2}$ を $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ の正規基、すなわち

$$\begin{vmatrix}\omega & \omega^q \\ \omega^q & \omega\end{vmatrix}\neq 0$$

を満たすものとし、$2n\times 2n$ 行列 W を

$$W:=\begin{pmatrix}\omega & & & \omega^q & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \omega & & & \omega^q \\ \omega^q & & & \omega & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \omega^q & & & \omega\end{pmatrix}\tag{3}$$

で定義すると明らかに W は $GL(2n,q^2)$ の元である。また、$\mathbb{F}_{q^2}$ 上の行列 $A=(\alpha_{ij})$ に対し

$$\overline{A}:=(\alpha_{ij}^q)$$

とおく。このとき

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} W \tag{4}$$

が成立する。ただし I_n は n 次の単位行列である。従って、$X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ を $GL(2n, q^2)$ の元とすると、(4) より

$$\begin{aligned} W^{-1}XW \in GL(2n,q) &\Longleftrightarrow \overline{W^{-1}XW} = W^{-1}XW \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \overline{X} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = X \\ &\Longleftrightarrow C = \overline{B},\ D = \overline{A} \end{aligned}$$

となる。つまり $GL(2n, q)$ は $GL(2n, q^2)$ の中で $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{smallmatrix}\right)$ という形をした元全体の成す部分群に共役である：

$$GL(2n,q) = W^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \in GL(2n, q^2) \right\} W \tag{5}$$

このとき

$$K_{2n} := W^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} \in GL(2n, q^2) \right\} W \tag{6}$$

は $GL(2n, q)$ の部分群で明らかに $GL(n, q^2)$ と同型である。特に α, α^q を $\mathbb{F}_q$ 上の二次の既約多項式 $f(t) = t^2 + at + b \in \mathbb{F}_q[t]$ の根とすると、K_{2n} は $f(t)$ を最小多項式とする元 $W^{-1} \left(\begin{smallmatrix} \alpha I_n & 0 \\ 0 & \alpha^q I_n \end{smallmatrix}\right) W$ $(\in GL(2n, q))$ の安定部分群である。

3　置換指標 $1_{GL(n,q^2)}^{GL(2n,q)}$ の分解

Frobenius 相互律により、$GL(2n, q)$ の既約指標 χ の $1_{K_{2n}}^{GL(2n,q)}$ に於ける重複度は

$$\begin{aligned} \langle \chi, 1_{K_{2n}}^{GL(2n,q)} \rangle_{GL(2n,q)} &= \langle \chi\downarrow_{K_{2n}}^{GL(2n,q)}, 1_{K_{2n}} \rangle_{K_{2n}} \\ &= \frac{1}{|K_{2n}|} \sum_{\mu} |C_\mu \cap K_{2n}|\, \chi(c_\mu) \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる。ここで、和は $GL(2n, q)$ の全ての共役類をわたる。また、$\chi\downarrow_{K_{2n}}^{GL(2n,q)}$ は χ の K_{2n} への制限であり、c_μ は共役類 C_μ の代表元である。よって、置換指標 $1_{K_{2n}}^{GL(2n,q)}$ を決定するためにはまず $GL(2n, q)$ の全ての共役類に対して K_{2n} との交わりの位数 $|C_\mu \cap K_{2n}|$ を計算しなければならない。

分割 λ に対してその Young 図形を主対角線に関する鏡映で写した図形を Young 図形とする分割を λ の共役分割といい、 λ' で表す。このとき、$GL(2n,q)$ の共役類 $C_{\boldsymbol{\mu}}$ が部分群 K_{2n} と交わるための必要十分条件は、Φ の全ての奇数次の元 f に対して $\boldsymbol{\mu}(f)'$ が even であること、すなわち全ての成分が偶数であることである。これを見るために、f を $\boldsymbol{\mu}(f) \neq 0$ であるような Φ の元とし、$\overline{\mathbb{F}}_q[t]$ の中で $f(t) = (t-\alpha)(t-\alpha^q)(t-\alpha^{q^{m-1}})$ と 1 次式の積に分解する。また、$F:\gamma \longrightarrow \gamma^q$ を Frobenius 写像とする。もちろん $\{\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \ldots, \alpha^{q^{m-1}}\}$ は $\overline{\mathbb{F}}_q$ の F-軌道を成す。$m = d(f)$ が偶数の場合には、この F-軌道は 2 つの F^2-軌道

$$\{\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \ldots, \alpha^{q^{m-1}}\} = \{\alpha, \alpha^{q^2}, \alpha^{q^4}, \ldots, \alpha^{q^{2k-2}}\} \cup \{\alpha^q, \alpha^{q^3}, \alpha^{q^5}, \ldots, \alpha^{q^{2k-1}}\}$$

に分かれる $(m=2k)$。よって $\mathbb{F}_q[t]/(f)^{\mu_i(f)}$ に対応する対角ブロックの Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} C & \\ & \overline{C} \end{pmatrix}$ の形に書けることが分かる。一方 $m = d(f)$ が奇数の場合 f の根たちはそれ自身で 1 つの F^2-軌道を成すことから、もし $C_{\boldsymbol{\mu}}$ が K_{2n} と交わるならば、全ての $i \geq 1$ に対して $\boldsymbol{\mu}(f)$ の中の i の重複度 $|\{j\,;\,\mu_j(f) = i\}|$ は偶数でなければならない。以上より上の条件が得られる。

$GL(4,q)$ の共役類で $K_4 \cong GL(2,q^2)$ と交わるものは次の表で与えられる。なお、表の中のローマ数字は Φ の元の次数を表す。例えば $\mathrm{I}^{(21)}\mathrm{I}^{(1)}$、$\mathrm{II}^{(1^2)}$ はそれぞれ次の 2 つの $\mathbb{F}_q[t]$-加群

$$\mathbb{F}_q[t]/(f)^2 \oplus \mathbb{F}_q[t]/(f) \oplus \mathbb{F}_q[t]/(f')$$

と

$$\mathbb{F}_q[t]/(g) \oplus \mathbb{F}_q[t]/(g)$$

$(f, f', g$ は Φ の異なる元で $d(f) = d(f') = 1,\ d(g) = 2$ となるものとする。) に対応する $GL(2n,q)$ の共役類を意味する。

Conjugacy Classes of $GL(4,q)$ Which Intersect K_4

Type	$\sharp$ Classes	Matrix Rep.	$\lvert C_\mu \cap K_4\rvert$
$\mathrm{I}^{(1^4)}$	$q-1$	$\begin{pmatrix} \rho^a & & & \\ & \rho^a & & \\ & & \rho^a & \\ & & & \rho^a \end{pmatrix}$	1
$\mathrm{I}^{(2^2)}$	$q-1$	$\begin{pmatrix} \rho^a & 1 & & \\ & \rho^a & & \\ & & \rho^a & 1 \\ & & & \rho^a \end{pmatrix}$	$(q^2-1)(q^2+1)$
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{I}^{(1^2)}$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$	$\begin{pmatrix} \rho^a & & & \\ & \rho^a & & \\ & & \rho^{a'} & \\ & & & \rho^{a'} \end{pmatrix}$	$q^2(q^2+1)$
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{II}^{(1)}$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$\begin{pmatrix} \rho^a & & & \\ & \rho^a & & \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$2q^2(q^2+1)$
$\mathrm{II}^{(1^2)}$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	$\begin{pmatrix} \sigma^b & & & \\ & \sigma^{bq} & & \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$q^2(q^2+1)+2$
$\mathrm{II}^{(2)}$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	$\begin{pmatrix} \sigma^b & & 1 & \\ & \sigma^{bq} & & 1 \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$2(q^2-1)(q^2+1)$
$\mathrm{II}^{(1)}\mathrm{II}^{(1)}$	$\frac{1}{8}q(q-1)(q+1)(q-2)$	$\begin{pmatrix} \sigma^b & & & \\ & \sigma^{bq} & & \\ & & \sigma^{b'} & \\ & & & \sigma^{b'q} \end{pmatrix}$	$4q^2(q^2+1)$
$\mathrm{IV}^{(1)}$	$\frac{1}{4}q^2(q-1)(q+1)$	$\begin{pmatrix} \omega^d & & & \\ & \omega^{dq} & & \\ & & \omega^{dq^2} & \\ & & & \omega^{dq^3} \end{pmatrix}$	$2q^2(q^2-1)$

where ρ, σ, ω are primitive elements of $\mathbb{F}_q, \mathbb{F}_{q^2}, \mathbb{F}_{q^4}$ respectively.

次に置換指標 $1_{K_4}^{GL(4,q)}$ に現われる既約指標を示す。

The Decomposition of $1_{K_4}^{GL(4,q)}$, *with* q : *odd.*

Type	Degree	$\sharp$ Classes
$\mathrm{I}^{(1^4)}$	1	1
$\mathrm{I}^{(2^2)}$	$q^2(q^2+1)$	2
$\mathrm{I}^{(4)}$	q^6	1
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{I}^{(1^2)}$	$(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-3}{2}$
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{I}^{(1^2)}$	$q(q^2+1)(q^2+q+1)$	1
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{I}^{(2)}$	$q^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-3}{2}$
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$(q+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-3}{2}$
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$q(q+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-3}{2}$
$\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{(q-3)(q-5)}{8}$
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{II}^{(1)}$	$(q-1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-1}{2}$
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{II}^{(1)}$	$q(q-1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-1}{2}$
$\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{II}^{(1)}$	$(q-1)(q+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{(q-1)(q-3)}{4}$
$\mathrm{II}^{(1^2)}$	$(q-1)^2(q^2+q+1)$	$\frac{q-1}{2}$
$\mathrm{II}^{(2)}$	$q^2(q-1)^2(q^2+q+1)$	$\frac{q-1}{2}$
$\mathrm{II}^{(1)}\mathrm{II}^{(1)}$	$(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{(q-1)(q-3)}{8}+\frac{(q-1)^2}{4}$
$\mathrm{IV}^{(1)}$	$(q-1)^3(q+1)(q^2+q+1)$	$\frac{(q-1)(q+1)}{4}$

irreducible characters $= q(q+1)$

The Decomposition of $1_{K_4}^{GL(4,q)}$, *with* q : *even.*

Type	Degree	$\sharp$ Classes
$\mathrm{I}^{(1^4)}$	1	1
$\mathrm{I}^{(2^2)}$	$q^2(q^2+1)$	1
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{I}^{(1^2)}$	$(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-2}{2}$
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{I}^{(2)}$	$q^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-2}{2}$
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$(q+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q-2}{2}$
$\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{(q-2)(q-4)}{8}$
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{II}^{(1)}$	$(q-1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q}{2}$
$\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{II}^{(1)}$	$(q-1)(q+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q(q-2)}{4}$
$\mathrm{II}^{(1^2)}$	$(q-1)^2(q^2+q+1)$	$\frac{q}{2}$
$\mathrm{II}^{(2)}$	$q^2(q-1)^2(q^2+q+1)$	$\frac{q}{2}$
$\mathrm{II}^{(1)}\mathrm{II}^{(1)}$	$(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q(q-2)}{8}+\frac{q(q-2)}{4}$
$\mathrm{IV}^{(1)}$	$(q-1)^3(q+1)(q^2+q+1)$	$\frac{q^2}{4}$

irreducible characters $= q(q+1)$

The Decomposition of $1_{K_4}^{GL(4,q)}$, with q : odd (in detail), Part I

Type	Character	Conditon
$\mathrm{I}^{(1^4)}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	
$\mathrm{I}^{(2^2)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$	
$\mathrm{I}^{(4)}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$	
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{I}^{(1^2)}$	$\begin{pmatrix} \rho^a & & & \\ & \rho^a & & \\ & & \rho^{-a} & \\ & & & \rho^{-a} \end{pmatrix}$	$a \not\equiv 0, \frac{q-1}{2} \pmod{q-1}$
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{I}^{(1^2)}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{I}^{(2)}$	$\begin{pmatrix} \rho^a & 1 & & \\ & \rho^a & & \\ & & \rho^{-a} & 1 \\ & & & \rho^{-a} \end{pmatrix}$	$a \not\equiv 0, \frac{q-1}{2} \pmod{q-1}$
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \rho^a & \\ & & & \rho^{-a} \end{pmatrix}$	$a \not\equiv 0, \frac{q-1}{2} \pmod{q-1}$
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & \rho^a & \\ & & & \rho^{-a} \end{pmatrix}$	$a \not\equiv 0, \frac{q-1}{2} \pmod{q-1}$
$\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} \rho^a & & & \\ & \rho^{-a} & & \\ & & \rho^{a'} & \\ & & & \rho^{-a'} \end{pmatrix}$	$a, a' \not\equiv 0, \frac{q-1}{2} \pmod{q-1}$, $a \not\equiv a', -a' \pmod{q-1}$

here ρ is a primitive element of $\mathbb{F}_q$.

The Decomposition of $1_{K_4}^{GL(4,q)}$, with q : odd (in detail), Part II

Type	Character	Conditon
$\mathrm{I}^{(1^2)}\mathrm{II}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$q-1 \mid b$, $b \not\equiv 0, \frac{q^2-1}{2} \pmod{q^2-1}$
$\mathrm{I}^{(2)}\mathrm{II}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$q-1 \mid b$, $b \not\equiv 0, \frac{q^2-1}{2} \pmod{q^2-1}$
$\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{I}^{(1)}\mathrm{II}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} \rho^a & & & \\ & \rho^{-a} & & \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$a \not\equiv 0, \frac{q-1}{2} \pmod{q-1}$, $q-1 \mid b$ and $b \not\equiv 0, \frac{q^2-1}{2} \pmod{q^2-1}$
$\mathrm{II}^{(1^2)}$	$\begin{pmatrix} \sigma^b & & & \\ & \sigma^{bq} & & \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$q-1 \mid b$, $b \not\equiv 0, \frac{q^2-1}{2} \pmod{q^2-1}$
$\mathrm{II}^{(2)}$	$\begin{pmatrix} \sigma^b & & 1 & \\ & \sigma^{bq} & & 1 \\ & & \sigma^b & \\ & & & \sigma^{bq} \end{pmatrix}$	$q-1 \mid b$, $b \not\equiv 0, \frac{q^2-1}{2} \pmod{q^2-1}$
$\mathrm{II}^{(1)}\mathrm{II}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} \sigma^b & & & \\ & \sigma^{bq} & & \\ & & \sigma^{b'} & \\ & & & \sigma^{b'q} \end{pmatrix}$	$q-1 \mid b, b'$, and $b \not\equiv b', b'q \pmod{q^2-1}$, $b, b' \not\equiv 0, \frac{q^2-1}{2} \pmod{q^2-1}$
	$\begin{pmatrix} \sigma^b & & & \\ & \sigma^{bq} & & \\ & & \sigma^{-b} & \\ & & & \sigma^{-bq} \end{pmatrix}$	$q \pm 1 \nmid b$
$\mathrm{IV}^{(1)}$	$\begin{pmatrix} \omega^d & & & \\ & \omega^{dq} & & \\ & & \omega^{dq^2} & \\ & & & \omega^{dq^3} \end{pmatrix}$	$q^2-1 \mid d$, $d \not\equiv 0, \frac{q^4-1}{2} \pmod{q^4-1}$

where σ and ω are primitive elements of $\mathbb{F}_{q^2}, \mathbb{F}_{q^4}$ respectively.

なお、既約指標のパラメータ付けについては Macdonald [3, Chapter IV.] に従っている。正確には、$GL(n,q)$ の既約指標は、$\mathbb{F}_{q^r}$ $(r \geq 1)$ の乗法群 M_r の指標群 $\widehat{M_r}$

たちの、ノルム写像の双対写像に関する帰納的極限 $L = \varinjlim \widehat{M_r}$ の F-軌道の全体 Θ を用いて記述されるが、ここでは、分かり易くするため共役類と同様に、つまり Φ ($= \overline{\mathbb{F}}_q$ の乗法群 M の F-軌道全体) によって表している。単位指標 $1_{GL(n,q)}$ の型は $\mathrm{I}^{(1^n)}$ である。詳細については奇標数の場合のみ載せているが、標数２の場合の置換指標の分解は、表の中から -1 が含まれている既約指標を省くことにより得られる。

4 予想

昨年の１２月下旬に前掲の計算結果を坂内英一教授（九大・数理）にご報告申し上げたところ、坂内教授より一般の n に対する置換指標 $1_{GL(n,q^2)}^{GL(2n,q)}$ の分解の予想を頂いた。以下その予想を紹介するが、その前にいくつか記号を導入する。

$f(t) = a_0t^k + a_1t^{k-1} + \cdots + a_k$ を $\mathbb{F}_q$ 上の多項式で $a_k \neq 0$ なるものとする。このとき f の *reciprocal polynomial* $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(t) := t^k f(t^{-1}) = a_kt^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_0$$

で定義する。$f(t) = \tilde{f}(t)$ が成り立つとき f は *self-reciprocal* であるという。

ここで

$$\begin{aligned}
&\Psi := \Phi \cup \{t\} : \text{the set of all monic irreducible polynomials in } \mathbb{F}_q[t],\\
&S := \{f \in \Psi \backslash \{t \pm 1\} \mid f : \text{self-reciprocal}\},\\
&N := \{f \in \Psi \backslash \{t \pm 1\} \mid f : \text{non-self-reciprocal}\},
\end{aligned}$$

とおき、さらにそれぞれ添え字 k をつけた記号で次数 k の元の全体を表すものとする：

$$\begin{aligned}
\Psi_k &:= \{f \in \Psi \mid \deg f = k\},\\
S_k &:= \{f \in S \mid \deg f = k\},\\
N_k &:= \{f \in N \mid \deg f = k\}
\end{aligned}$$

予想（坂内）$\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ を $GL(2n,q)$ の既約指標とする。このとき

(i) q が偶数ならば、$\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ が $1_{GL(n,q^2)}^{GL(2n,q)}$ の分解に現われるのは、

$$\boldsymbol{\mu}(t-1)' : \text{even}, \quad \boldsymbol{\mu}(\tilde{g}) = \boldsymbol{\mu}(g) \text{ for all } g \in N$$

を満たすとき、かつそのときに限る[1]。

[1] Inglis-Liebeck-Saxl [2] に於いて、$K_{2n}g^{-1}K_{2n} = K_{2n}gK_{2n}$ が任意の $g \in GL(2n,q)$ に対して成立することが示されている。従って $\langle \chi_{\boldsymbol{\mu}}, 1_{K_{2n}}^{GL(2n,q)} \rangle_{GL(2n,q)} = 1$ ならば $\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ は実数値をとる。

(ii) q が奇数ならば、$\chi_{\boldsymbol{\mu}}$ が $1_{GL(n,q^2)}^{GL(2n,q)}$ の分解に現われるのは、

$$\boldsymbol{\mu}(t-1)' : \text{even}, \quad \boldsymbol{\mu}(t+1) : \text{even}, \quad \boldsymbol{\mu}(\tilde{g}) = \boldsymbol{\mu}(g) \text{ for all } g \in N$$

を満たすとき、かつそのときに限る。

（もちろん、$\boldsymbol{\mu}$ は条件 (2) を満たさなければならない。） □

上の予想のまだ証明はまだ完成していないが[2]、ここで仮にこの予想が正しいと仮定して、$GL(2n,q)/GL(n,q^2)$ のランクの母函数を求めてみることにする。 そのためにまず 2 つの 1 対 1 対応

$$\Psi_k \overset{1:1}{\longleftrightarrow} S_{2k} \cup \{g\tilde{g} \mid g \in N_k\} \quad (k \geq 2) \tag{8}$$

と

$$\Psi_1 \backslash \{t \pm 2\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} S_2 \cup \{g\tilde{g} \mid g \in N_1\} \tag{9}$$

を示す。なお、これらの対応は Carlitz [1] による。$h(t)$ を $t \pm 2$ と異なる Ψ_k の元とし、 $\mathbb{F}_{q^k}[t]$ の中で $h(t) = (t-\beta)(t-\beta^q)\ldots(t-\beta^{q^{k-1}})$ と一次式の積に分解する。$\alpha \in \mathbb{F}_{q^{2k}}$ を $t^2 - \beta t + 1$ の根、すなわち $\alpha + \alpha^{-1} = \beta$ を満たすものとすると、β は ± 2 と異なるので、α と α^{-1} も異なる。従って

$$\alpha, \alpha^q, \ldots, \alpha^{q^{k-1}}, \alpha^{-1}, \alpha^{-q}, \ldots, \alpha^{-q^{k-1}}$$

は全て異なる。ここで

$$\begin{aligned} f(t) :=& t^k\, h(t+t^{-1}) \\ =& (t-\alpha)(t-\alpha^q)\ldots(t-\alpha^{q^{k-1}})(t-\alpha^{-1})(t-\alpha^{-q})\ldots(t-\alpha^{-q^{k-1}}), \end{aligned}$$

と定義すると、明らかに $f(t)$ はモニックな $2k$ 次の多項式である。もし $\alpha \in \mathbb{F}_{q^{2k}} \backslash \mathbb{F}_{q^k}$ ならば $\alpha^{-1} = \alpha^{q^k}$ となり、$f(t)$ は S_{2k} に含まれる。また、もし $\alpha \in \mathbb{F}_{q^k}$ ならば

$$g(t) := (t-\alpha)(t-\alpha^q)\ldots(t-\alpha^{q^{k-1}}) \in N_k$$

とおくと $f(t) = g(t)\tilde{g}(t)$ となる。逆の対応も同様に示せる。

命題 前述の予想を認めると、ランクの母函数は次式で与えられる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{rank}\,\big(GL(2n,q)/GL(n,q^2)\big)\, t^{2n} = \prod_{r=1}^{\infty}(1-qt^{2r})^{-1} \tag{10}$$

[2] 坂内教授の予想に現われる $GL(2n,q)$ の既約表現たちの次数の総和が $|GL(2n,q):GL(n,q^2)|$ にちょうど一致することがその後判明した。

ただし rank $(GL(0,q)/GL(0,q^2)) := 1$ と定義する。特に

$$\operatorname{rank}\big(GL(2n,q)/GL(n,q^2)\big) = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}_n} q^{l(\lambda)} \tag{11}$$

が成立する。ここで $\mathscr{P}_n$ は n の分割全体、また $l(\lambda)$ は分割 λ の長さ、すなわち λ の 0 でない成分の個数を意味する。

例 $n = 1, 2$ の場合、それぞれ

$$\operatorname{rank}\big(GL(2,q)/GL(1,q^2)\big) = q,$$
$$\operatorname{rank}\big(GL(4,q)/GL(2,q^2)\big) = q^2 + q$$

となる。従って予想は $n = 1, 2$ については正しい。($1_{GL(1,q^2)}^{GL(2,q^2)}$ の既約指標への分解についてはTerras [5, Chapter 21.] を参照されたい。)

命題の証明 q が偶数の場合 (10) の左辺は

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^{2r})^{-1}\cdot\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^{2r})^{-(|\Psi_1|-1)}\cdot\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^{2kr})^{-|\Psi_k|}$$
$$=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^{2kr})^{-|\Psi_k|}=\prod_{r=1}^{\infty}(1-qt^{2r})^{-1}$$

で与えられる。同様に q が奇数の場合は左辺は

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^{2r})^{-2}\cdot\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^{2r})^{-(|\Psi_1|-2)}\cdot\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^{2kr})^{-|\Psi_k|}$$
$$=\prod_{r=1}^{\infty}(1-qt^{2r})^{-1}$$

となる。 □

5 両側剰余類の記述

$f(t) = t^2 + at + b$ を $\mathbb{F}_q$ 上の既約多項式、$\gamma, \gamma^q \in \mathbb{F}_{q^2}$ をその根とする。C_μ を 左 $\mathbb{F}_q[t]$-加群

$$\mathbb{F}_q[t]/(f) \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_q[t]/(f) \quad (n \text{ times})$$

に対応する $GL(2n,q)$ の共役類とする。すなわち C_μ の元 X は

$$X^2 + aX + bI_{2n} = 0$$

を満たす。このとき $GL(2n,q)$ の元 $X = W^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} W \in GL(2n,q)$ が C_μ に属する必要十分条件は

$$\begin{cases} A^2 + B\overline{B} + aA + bI_n = 0, \\ AB + B\overline{A} + aB = 0 \end{cases} \tag{12}$$

で与えられる。$GL(2n,q)$ は C_μ に共役により可移に作用し、C_μ の元

$$W^{-1}\begin{pmatrix} \gamma I_n & 0 \\ 0 & \gamma^q I_n \end{pmatrix} W$$

の固定群は $GL(n,q^2)$ と同型である。両側剰余類 $GL(n,q^2)\backslash GL(2n,q)/GL(n,q^2)$ は固定群 $GL(n,q^2)$ の C_μ への作用の軌道分解と 1 対 1 に対応する。

$GL(n,q)$ の元 $X = W^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} W$ と $GL(n,q^2)$ の元 $Y = W^{-1}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} W$ に対して

$$\begin{aligned} YXY^{-1} &= W^{-1}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{C}^{-1} \end{pmatrix} W \\ &= W^{-1}\begin{pmatrix} CAC^{-1} & CB\overline{C}^{-1} \\ \overline{C}\overline{B}C^{-1} & \overline{CAC}^{-1} \end{pmatrix} W \end{aligned}$$

となり、$GL(n,q^2)$ は A の Jordan 標準形を変えない。そこで、まず A を固定して (12) を満たす B がいつ存在するかを調べることで C_μ の軌道分解を記述しようと試み[3]、$n=2$ の場合は完全に分類することができたが、この方法が一般の場合でも有効かどうかはまだ分からない。

$n=2$ の場合の結果は次のようなものである。

(i) $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{pmatrix}$: there are $(q+2)$-orbits

- $\alpha + \alpha^q = -a,\ \alpha \neq \gamma, \gamma^q$ .... $(q-2)$-orbits
- $\alpha = \gamma, \gamma^q,\ B = 0$ 2-orbits
- $\alpha = \gamma, \gamma^q,\ \mathrm{rank}\, B = 1$ 2-orbits

(ii) $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{pmatrix}$: there are $(q-2)$-orbits

- $\alpha + \alpha^q = -a,\ \alpha \neq \gamma, \gamma^q$ .... $(q-2)$-orbits

[3] (12) を満たす行列 $X = W^{-1}\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{smallmatrix}\right) W$ は自動的に正則になる。

(iii) $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq \beta)$: there are $(q^2 - q)$-orbits

- $\alpha + \alpha^q = \beta + \beta^q = -a$ .... $\frac{q(q-1)}{2}$-orbits
- $\alpha + \beta^q = \alpha^q + \beta = -a$ .... $\frac{q^2-q}{2}$-orbits

参考文献

[1] L. Carlitz, Some theorems on irreducible reciprocal polynomials over a finite field, *J. Reine Angew. Math.* **227** (1967), 212-220.

[2] N.F.J. Inglis, M.W. Liebeck and J. Saxl, Multiplicity-free permutation representations of finite linear groups, *Math. Z.* **192** (1986), 329-337.

[3] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* 2nd ed., Oxford mathematical monographs, Oxford Univ. Press, 1995.

[4] R. Steinberg, The representation of $GL(3,q)$, $GL(4,q)$, $PGL(3,q)$, and $PGL(4,q)$, *Can. J. Math.* **3** (1951), 225-235.

[5] A. Terras, *Fourier Analysis on Finite Groups and Applications*, London Math. Soc. Student Texts **43**, Cambridge Univ. Press, 1999.