

ON THE ADDITIVITY OF THE THURSTON–BENNEQUIN INVARIANT OF LEGENDRIAN KNOTS

鳥巢 伊知郎 ICHIRO TORISU
(秋田大学工学資源学部 FACULTY OF ENGINEERING
AND RESOURCE SCIENCE, AKITA UNIVERSITY)

1. E. GIROUX による 3次元閉接触多様体の表示について

1.1. 導入. 3次元多様体 M 上の平面場 ξ が接触構造であるとは ξ を (少なくとも局所的に) 一次微分形式 α の核で表したときに到るところ $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ が成り立つことをいう。そのとき (M, ξ) を 3次元接触多様体という。70年代に Martinet [7] や Thurston–Winkelnkemper [13] は全ての向き付け可能な閉 3次元多様体に対する接触構造の構成を行った。Martinetの構成法は Dehn surgery を用いた方法で Thurston–Winkelnkemperの構成法は open book 分解(すなわちファイバー絡み目)を用いたものである。最近、Giroux がこのうち Thurston–Winkelnkemperの構成は general construction であること、すなわち全ての 3次元閉接触多様体は Thurston–Winkelnkemperの構成で得られることをアナウンスしている。Girouxの証明は自身による Morse理論を用いた接触構造の構成及びそこで開発された凸曲面の理論 [4] を基礎になされるが、講演者も [14] において同様に Girouxの理論と open book 分解の関係を調べていた。そこでこの章では後の章で述べられる講演者の主定理の証明方法にも慣れるという意味も含めて Girouxの結果を凸曲面の理論の言葉を用いて大まかに述べることにする。

3次元接触多様体論の基礎については [8] 等を参照のこと。また、接触形式の直接的な構成については [13] や [9] を参照のこと。

1.2. handlebody 上の「標準的な」接触構造. V をソリッドトーラスとする。具体的に V を $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_z^3 \mid x^2 + y^2 \leq \epsilon\}$, ここで \mathbb{R}_z^3 は \mathbb{R}^3 modulo $z \mapsto z+1$, と表しておく。そのとき $\xi_n = \ker(\sin(2\pi n z) dx + \cos(2\pi n z) dy)$

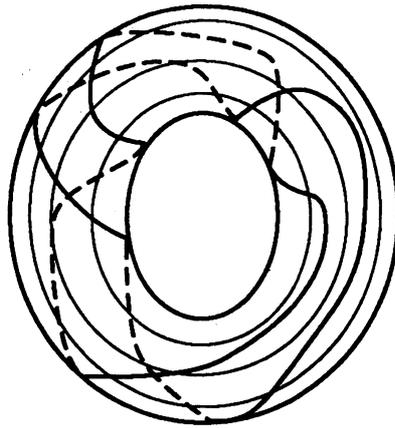


FIGURE 1

は V 上の正の接触構造を表す (但し $n \in \mathbb{N}$)。 (V, ξ_n) が我々の理論における標準的な接触ソリッドトーラスである。

Remark 1.1. (i) K を 3次元接触多様体内の結び目で接触平面場に到るところ接しているもの、すなわち Legendrian knot とすると K の近傍で (V, ξ_n) の埋め込みと等しいものが存在する。

(ii) (V, ξ_n) の境界は Giroux の意味で凸曲面になっている。すなわちそれと横断的に交わる接触ベクトル場が存在する。詳しくは [4] を参照のこと。

(iii) Figure 1 は (V, ξ_n) の境界のトーラスと ξ_n の交わりが定義する特異葉層の絵である。ここで接触平面がトーラスに接している集合はトーラス上の 2 本の平行な「(1, 1)-curve」になっている。

種数が 2 以上の handlebody 上の標準的接触構造のモデルを得るために (V, ξ_n) の境界を admissible isotopy で少し摂動して modify することを考える。実際に我々は Figure 1 における (1, 1)-curve に沿ってトーラスを波打たせることにより Figure 2 のようなメリディアンが軌道となっているような特異葉層を得ることができる。

次に (tight) 3-ball のモデルで境界上の特異葉層が Figure 3 のようになっているものを考える。これは例えば \mathbb{R}^3 上の標準的な接触構造 $\xi_0 = \ker(dz - ydx)$ にジェネリックに埋め込まれた 3-ball をとればよい。Eliashberg の定理 [2] よりこれらはどこでもとって同じである。ここで表面の特異葉層を生成するベクトル場の発散がゼロの集合は赤道としておく。更に 3-ball の境界を小さく摂動して Figure 4 のような模様にしておく。重要な事は模様を生成するベクトル場は (1) 南半球では発散が正 (2) 北半球では発散が負 (3) 赤道のところ南

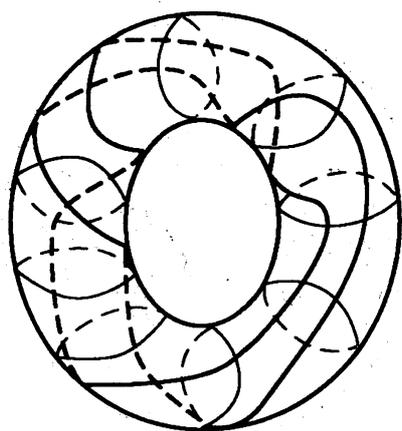


FIGURE 2

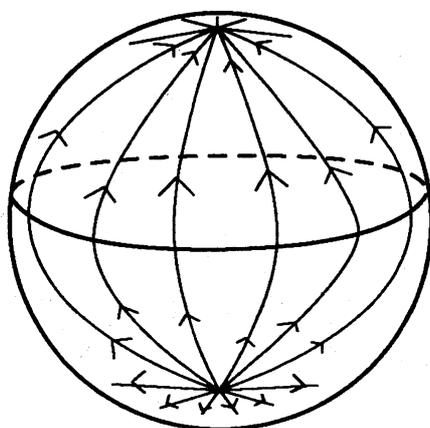


FIGURE 3

から北へと横断的に交わる、である。凸曲面の理論の一般論によりこのような模様は小さい摂動の後の特異葉層として実現可能である。

最後にFigure 5のようにソリッドトーラスと3-ballのモデルを同時に考える。ここでエンドは赤道と2点で横断的に交わる Legendrian circle達である。これは角のあるhandlebodyである。そして Honda の edge-rounding lemma [6] を使い角を解消すると (\mathbb{R}^3, ξ_0) に埋め込まれたhandlebodyで境界が凸であり、特異葉層を生成するベクトル場の発散がゼロの集合が表面上の単純閉曲線(分割集合という)の和集合となっているものが得られたことになる (Figure 6)。これがhandlebody上の「標準的な」接触構造のモデルである。但し境界において同じ分割集合を持つモデルは凸曲面の理論の意味で同一視する(詳しくは[4],[6]等を参照)。

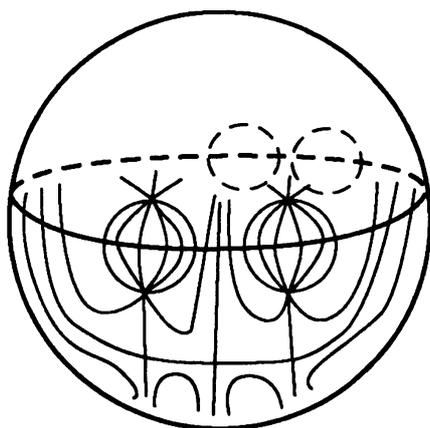


FIGURE 4

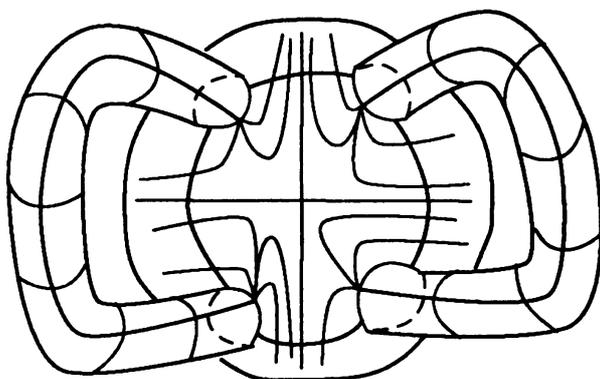


FIGURE 5

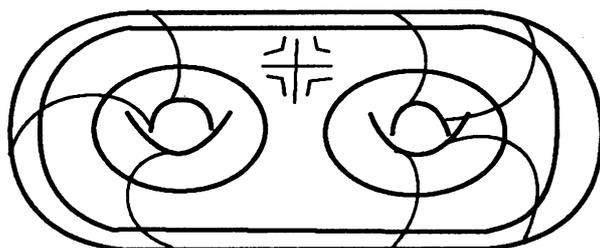


FIGURE 6

Theorem 1.2. (cf. [14]) 任意の向き付け可能な閉3次元多様体 M に対して接触構造 ξ とヘガード分解 $M = (V_1, V_2)$ が存在して ξ を V_1 と V_2 に制限したものは上のモデルになる。

上の定理を言い換えると任意の M に対し十分大きな種数のモデルを二つ用意すると admissible isotopy で片方の特異葉層を変形した後に微分同相写像でモデルの境界を張り合わせて M 上の接触構造が作れるということである。

Proof. この定理は以下の事実たちに依る。

- ・ M のそのようなモデルによる分解は位相的には分割集合をファイバー絡み目とする open book 分解に等しい(講演者自身は林忠一郎先生にご指摘を受けた。Giroux は Otal に指摘されたようである)
- ・ 全ての M には open book 分解が必ず存在する (Alexander の定理)
- ・ 閉曲面に沿った接触構造の芽はその特異葉層で一意に決まる (Giroux の定理) □

最近、Giroux により上の定理の逆を含む open book 分解と接触構造の関係に対する決定的な定理が得られている。

Theorem 1.3. ([5]) 全ての閉 3 次元多様体上の接触構造は上のようにして得られる。更に、接触構造のイソトピー類と open book 分解の安定イソトピー類は一対一に対応する。ここで「安定」とは正のホップリンクをブラミングすることを指す。

この文章を書いている時点では Giroux の論文はまだ書かれていないようである。正のホップリンクをブラミングして対応する接触構造が変わらない理由の説明は [14] にもある。

2. 結び目の連結和に対する MAXIMAL THURSTON-BENNEQUIN 不変量について

2.1. 主定理. \mathbb{R}^3 上の標準的接触構造 $\xi_0 = \ker(dz - ydx)$ に到るところ接する \mathbb{R}^3 内の結び目、所謂 Legendrian knot K については、その結び目の位相的なタイプ $[K]$ を固定した際の Legendrian isotopy による分類が問題になる。 K の Thurston-Bennequin invariant $tb(K)$ とは K 上の接触平面場が定める K の framing のことであった。すなわち $tb(K)$ は K と K を接触平面場に対する法ベクトル場に沿って少しずつらして得られる結び目との link number のことである。今、 k を \mathbb{R}^3 内の位相的な結び目型としたときに位相的には k に等しい Legendrian knot K を全て考え、その Thurston-Bennequin invariant の最大値を $mtb(k)$ とおく。 $mtb(k)$ は k の位相不変量であり、Bennequin の不等

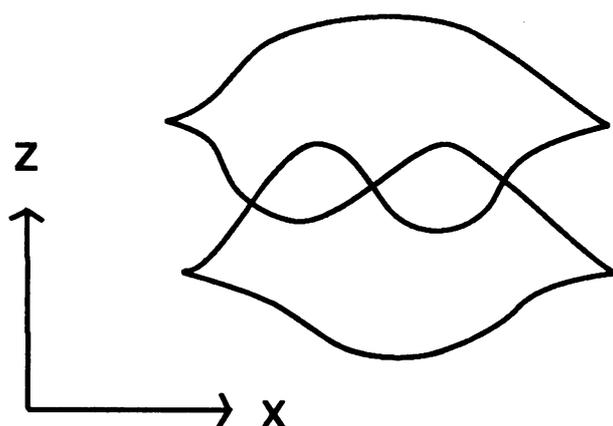


FIGURE 7

式 [1] よりその値は常に有限の数になる。例えば $mtb(\text{trivial knot}) = -1$ であり、これは ξ_0 のタイト性と同値である。(その他の例については [10], [11] 等を参照下さい)

今回、次の結果を得た。

Theorem 2.1. $k_1 \# k_2$ を \mathbb{R}^3 内の位相的結び目 k_1 と k_2 の連結和とする。そのとき $mtb(k_1 \# k_2) = mtb(k_1) + mtb(k_2) + 1$ が成り立つ。

Remark 2.2. 1. Etnyre–Honda [3] は上の定理を大幅に含む二つの Legendrian knot の連結和の Legendrian isotopy に関する結果をアナウンスしている。

2. Tanaka [12] は上の定理を alternating knot と positive knot の場合に代数的結び目理論の手法で証明している。

3. 私の証明は Giroux [4] により創始された凸曲面論を用いるものであり、おそらく 1 の Etnyre–Honda の証明方法も同様であると思われる。

2.2. 主定理の証明について. K を (\mathbb{R}^3, ξ_0) 内の Legendrian knot としたときに K の xz -projection の像のことを K の front と呼ぶ (Figure 7)。ジェネリックな front は Figure 6 のように特異点が横断的 2 重点とカスパだけである。front の接線は K の y 座標を表すので通常結び目理論におけるダイアグラムのように K とその front を同一視して考える。また定義より front には垂直に接線は引けないことも注意しておく。

そのとき K の front を用いた Thurston–Bennequin 不変量は Figure 8 の公式で与えられる。例えば Figure 7 の Legendrian knot の Thurston–Bennequin 不変量は 1 である。

$$tb = \# \begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} + \# \begin{array}{c} \nwarrow \\ \times \\ \swarrow \end{array} - \# \begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \nearrow \end{array} - \# \begin{array}{c} \nwarrow \\ \times \\ \nwarrow \end{array} \\ -1/2 \# \text{ of cusps}$$

FIGURE 8

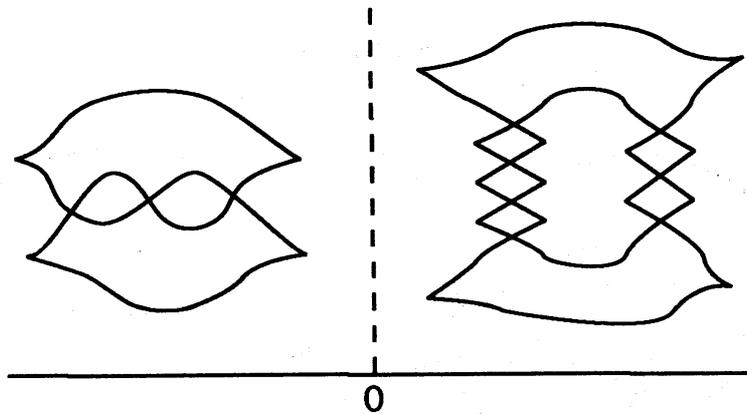


FIGURE 9

Proposition 2.3. k_1 と k_2 を \mathbb{R}^3 内の位相的結び目とするととき $mtb(k_1 \# k_2) \geq mtb(k_1) + mtb(k_2) + 1$ が成り立つ。

これは Figure 9、Figure 10 にあるように二つの front からそれぞれのカuspをつなげて得られる front を考察すれば容易に示される。

よって主定理の証明で大事なものは逆向きの不等式を示すことである。証明のアイデアは Figure 11 にあるような連結和を定義する 3-ball 二つと結び目の正則近傍を凸曲面としてそれぞれ扱い、それらと和集合が定めるソリッドトーラスの中身と外側を独立に考察することである。詳しくは [15] を参照されたい。([15] は <http://member.nifty.ne.jp/TORISU/additivity.pdf> からダウンロードできる)

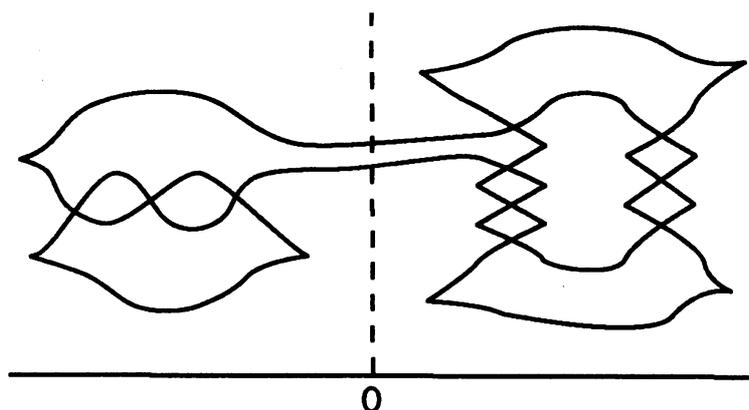


FIGURE 10

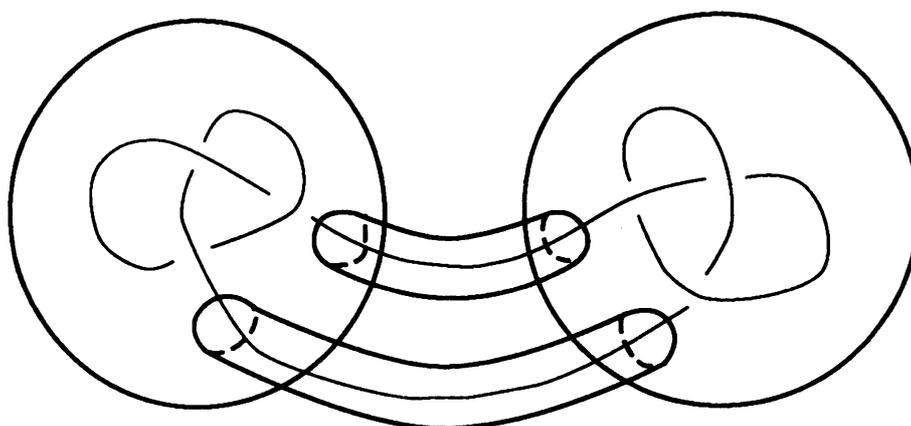


FIGURE 11

3. 後書き

2001年5月から6月にかけてGeorgiaで Georgia International Topology Conference が開かれてそこで3次元コンタクトトポロジーに関する、前半で紹介したGirouxの定理を含む、大きな進展の報告もいろいろとあったようである (<http://www.math.uga.edu/topology/>)。また、第1章 (3次元接触多様体) に関する問題集と第2章 (Legendrian knot in \mathbb{R}^3) に関する興味深い問題集が作成されていて、それぞれ

<http://www.math.uga.edu/topology/contact-prob-session.pdf>

<http://www.math.uga.edu/topology/legendrian-prob-session.pdf>

からダウンロードできる。

REFERENCES

1. D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque 107-108 (1983), 87–161.
2. Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier 42 (1992), 165–192.
3. J. Etnyre and K. Honda, in preparation.
4. E. Giroux, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helvetici 66 (1991), 637–677.
5. E. Giroux, in preparation.
6. K. Honda, *On the classification of tight contact structures I*, Geom. Topol. 4 (2000), 309–368.
7. J. Martinet, *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Lecture Notes in Math. 209 (1971), 142–163.
8. Y. Mitsumatsu, *3次元接触トポロジー*, 数学メモワール (2000).
9. A. Mori, *A note on Thurston–Winkelnkemper's construction of contact forms on 3-manifolds*, preprint.
10. S. Tabachnikov, *Estimates for the Bennequin number of Legendrian links from state models for knot polynomials*, Math. Research Letters, 4 (1997), 143–156.
11. T. Tanaka, *Maximal Bennequin numbers and Kauffman polynomials of positive links*, Proc. Amer. Math. Soc., 127 (1999), 3427–3432.
12. T. Tanaka, *On invariants of Legendrian links*, preprint.
13. W. P. Thurston and H. E. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc., 52 (1975), 345–347.
14. I. Torisu, *Convex contact structures and fibered links in 3-manifolds*, IMRN, 2000 (2000), 441–454.
15. I. Torisu, *On the additivity of the Thurston–Bennequin invariant of Legendrian knots*, preprint.

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING, FACULTY OF ENGINEERING AND RESOURCE SCIENCE, AKITA UNIVERSITY, TEGATA, AKITA 010-8502, JAPAN

E-mail address: torisu@math.akita-u.ac.jp