数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 93-94

An extension of completely positive maps compatible with the Jones basic construction

Keiko KAWAMURO

1 An induction of a bimodule

Type II_1 factor N, P の bimodule ${}_N X_P$ と N-P cyclic かつ right P-bounded な vector $\xi \in X$ のペア $({}_N X_P, \xi)$ と、CP-map $\phi : N \to P$ は、[1] に述べられているように、bimodule の conjugate や CP-map の adjoint operation と conpatible になるように一対一対応している。

Theorem 1.1 *$N \subset M, P \subset Q$ を type II_1 subfactor とし、${}_N X_P \subset {}_M Y_Q$ を左右の作用と compatible な bimodule の inclusion とする。以下の条件は同値である。*

1. *Subfactor の Jones index と bimodule の左次元が等しい。つまり、*

$$[M : N] = [Q : P] < \infty, \ \dim_N X = \dim_M Y < \infty.$$

(この二つの等式から右次元の一致 $\dim X_P = \dim Y_Q$ も導かれる。) さらに、bimodule ${}_N X_P$ に N-P cyclic で右 P-bounded な vector $\xi \in X$ が存在し、それを埋め込み写像 $X \subset Y$ によって Y 埋め込んだものを $\eta \in Y$ とおと、$\eta \in Y$ は M-Q cyclic かつ右 Q-bounded である。またペア $({}_N X_P, \xi)$, $({}_M Y_Q, \eta)$ に対応する CP-map をそれぞれ $\phi : N \to P, \psi : M \to Q$ とすると、

$$\psi|_N = \phi, \ \psi^*|_P = \phi^*$$

が成り立つ。

2. *Bimodule の同型*

$$\tau : {}_N X \otimes_P Q_Q \simeq {}_N M \otimes_M Y_Q,$$

$$\sigma : {}_M M \otimes_N X_P \simeq {}_M Y \otimes_Q Q_P$$

が成立つ。さらに vector $\xi \in X$ と $\eta \in Y$ が上の条件 1 と同じ性質をもつように存在し、

$$\tau(\xi \otimes_P 1) = 1 \otimes_M \eta,$$

$$\sigma(1 \otimes_N \xi) = \eta \otimes_Q 1$$

が成り立つ。

3. *Bimodule* の同型 $\varphi: {}_N M\otimes_N X_P \simeq {}_N X\otimes_P Q_P$ が成り立つ。*N-P cyclic* かつ右 *P-bounded* な *vector* $\xi\in X$ が存在し、$\varphi(1\otimes_N\xi)=\xi\otimes_P 1$ をみたす。*Bimodule hom* $s\in \mathrm{Hom}({}_M M\otimes_N M_M, {}_M M_M), t\in \mathrm{Hom}({}_Q Q\otimes_P Q_Q, {}_Q Q_Q)$ と φ に対して以下のようなペンタゴン条件が成り立つ。$\zeta\in {}_N M\otimes_N X_P$ のとき、

$$(1\otimes_N\varphi)(s^*\otimes_N 1_X)(\zeta)=(\varphi^{-1}\otimes_P 1)(1_X\otimes_P t^*)\varphi(\zeta).$$

これの意味するところは、(簡単のため、$P=N, Q=M$ のときを考えると) ペア $({}_N X_N,\xi)$ が三つ目の条件 (type III factor の sector の half braiding 条件を弱くしたようなものともいえる) をみたせば、ペアに対応する N の CP-map を大きい環 M の CP-map に延長することができる、ということである。

Definition 1.2 ペア $({}_N X_P,\xi)$, $({}_M Y_Q,\xi)$ が上の定理の条件を満足しているとき

$$({}_N X_P,\xi)\subset({}_M Y_Q,\xi)$$

とかく。

2 An extension of an inclusion of bimodules

次は $({}_N X_P,\xi)\subset({}_M Y_Q,\eta)$ から出発して Jones basic construction: $N\subset M\subset M_1, P\subset Q\subset Q_1$ と相性のよくなるように $({}_N X_P,\xi)\subset({}_M Y_Q,\eta)\subset({}_{M_1}Z_{Q_1},\nu)$ を構成したい。そのためには、

$${}_{M_1}Z_{Q_1} := {}_{M_1}M\otimes_N X\otimes_P Q_{Q_1},$$

$\Phi: Y\to X$ を左右の作用と compatible な直交射影、$\{m_j\},\{n_k\}$ をそれぞれ $N\subset M, P\subset Q$ の Pimsner-Popa basis として、

$$\nu := [Q:P]^{-1/2}\sum_{j,k} m_j\otimes_N\Phi(m_j^*\eta n_k)\otimes_P n_k$$

と定義すればよい。左右の M_1, Q_1 作用と内積は、e, f をそれぞれ $N\subset M, P\subset Q$ の Jones projection とし、$\mathcal{E}_N: M\to N, \mathcal{F}_P: Q\to P$ を trace を保つ conditional expectation とすると、

$$\begin{aligned}(aeb)\cdot x\otimes_N\lambda\otimes_P y\cdot(pfq) &:= a\mathcal{E}_N(bx)\otimes_N\lambda\otimes_P\mathcal{F}_P(yp)q,\\ \langle x\otimes_N\lambda_1\otimes_P y\mid z\otimes_N\lambda_2\otimes_P w\rangle_Z &:= \langle\mathcal{E}_N(z^*x)\lambda_1\mathcal{F}_P(yw^*)\mid\lambda_2\rangle_X.\end{aligned}$$

ヒルベルト空間 Y の元は

$${}_M Y_Q\ni\eta\mapsto[Q:P]^{-1/2}\sum_{j,k} m_j\otimes_N\Phi(m_j^*\eta n_k)\otimes_P n_k^*\in {}_{M_1}Z_{Q_1}$$

によって Z に norm を保つように埋め込まれている。

References

[1] S. Popa, Correspondences. preprint.