数理解析研究所講究録 1230巻 2001年 95-107

有限生成の bimodule から構成される von Neumann 環 について.

九州大・数理
米谷 和巳

(0)

Katayama と Pimsner は、単位元を持つ C^*-環 A と、その上の A-値右内積を持つ Hilbert A-A bimodule X から生成される C^*-環 $\mathcal{O}_X$ を定義し、それは以下を満たす universal な C^*-環として特徴付けられる。(簡単のため、bimodule X は有限生成であるとしておく) ((Ka), (Pi))

$\mathcal{O}_X$ は A と $\{S_\xi \mid \xi \in X\}$ で生成される universal な C^*-環で、その生成元は以下の条件をみたす:

- $S_{\xi+\eta} = S_\xi + S_\eta$, $S_{\lambda\xi} = \lambda S_\xi$ $(\lambda \in \mathbb{C})$
- $S_{a\xi} = a S_\xi$, $S_{\xi a} = S_\xi \cdot a$ $(a \in A)$
- $S_\xi^* S_\eta = \langle \xi, \eta \rangle_A$
- $S_{\varepsilon_1} S_{\varepsilon_1}^* + \cdots + S_{\varepsilon_n} S_{\varepsilon_n}^* = 1$ ($\{\varepsilon_i\}$ は X の右 A-基底).

ここでは、A を von Neumann 環としたときの、A と A-値左内積も持つ有限生成 Hilbert A-A bimodule から生成される von Neumann 環 (それを $\mathcal{M}_X$ と書くことにする) を構成する試みについて説明する.

faithful normal trace を持つ von Neumann 環 N に対して、その上の有限生成 bimodule X から生成される von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ の存在については、bimodule に「右内積と左内積の、trace による値が同じ」という仮定を加えることによって、$\mathcal{M}_X$ の存在が証明できることを説明した. ((Yo1))

今回は、σ-有限な von Neumann 環 N に対して、bimodule algebra $\mathcal{M}_X$ の存在について、説明する。その鍵となるのは、与えられた state による、右内積と左内積との値のずれを記述する、bimodule に対する KMS 条件を考えることによって、存在が言える。

(1)

ここでは、von Neumann 環 N とその上の有限生成 bimodule X について説明する。

定義:（(参) (K-W2)）

N を von Neumann 環とする。X が有限生成の Hilbert N-N bimodule であるとは、次を満たすことと定義する。

(1) X は N-値右内積 ($\langle \cdot, \cdot \rangle_N$) を持ち、有限個の右 N-基底を持つ、($C^*$-の意味での) Hilbert right N-module.

(2) X は N値左内積 (${}_N\langle \cdot, \cdot \rangle$) を持ち、有限個の左 N-基底を持つ、($C^*$-の意味での) Hilbert left N-module.

(3) $(a \cdot \xi) \cdot b = a \cdot (\xi \cdot b) \qquad (a, b \in N)$

(4) 2つの norm ${}_N\|\xi\| := \| {}_N\langle \xi, \xi \rangle \|^{1/2}$ と $\|\xi\|_N := \| \langle \xi, \xi \rangle_N \|^{1/2}$ は同値。

(5) π, ρ を次の様に定義する:

$$\pi(a)\xi := a\xi, \quad \rho(a)\xi := \xi a \qquad (a \in N, \xi \in X)$$

このとき、π は N から $L(X_N)$ (right N-module X_N 上の bounded adjointable operator 全体) への、単射で単位的な $*$-hom.、ρ は N から $L({}_NX)$ (left N-module ${}_NX$ 上の bounded adjointable operator 全体) への、単射で単位的な anti-$*$-hom. になる。さらに、π, ρ は σ-weak 連続な写像である。(※)

(6) 有界な net $(\xi_\lambda) \subset X$ に対し，次は同値：

・ ${}_N\langle \xi_\lambda - \xi, \xi_\lambda - \xi \rangle \to 0$ (s-weak)

・ $\langle \xi_\lambda - \xi, \xi_\lambda - \xi \rangle_N \to 0$ (s-weak).

▨

(注)

上記定義の (5) における "s-連続" については，right N-module X_N が有限生成より，Paschke により，$L(X_N)$ は W^*-環であることが知られている．このことにより，写像 π, ρ の連続性について，定義ができる．((Pa))

▨

次に，bimodule に対する "右次元" について説明する．

<u>定義</u> ((K-W2))

N を von Neumann 環，X を有限生成 Hilbert N-N bimodule とし，有限個の右 N-基底 $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \subset X$ を固定する．bimodule X に対する right index $d_r(X)$ を，次で定義する．

$$d_r(X) := \sum_{i=1}^{n} {}_N\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle .$$

▨

注意として，この right index $d_r(X)$ は，右 N-基底 $\{\varepsilon_i\}$ のとり方によらないことが知られている．また一般に，$d_r(X)$ は N の中心の元である．

最後に，bimodule に対する full 条件について説明する．

定義:

N を von Neumann 環, X を有限生成 Hilbert N-N bimodule とする. このとき, X が full 条件をみたすとは, 次が成立することである.

- $\left(\mathrm{span}\{{}_N\langle\xi,\eta\rangle \mid \xi,\eta\in X\}\right)^{-(\sigma\text{-weak})} = N$
- $\left(\mathrm{span}\{\langle\xi,\eta\rangle_N \mid \xi,\eta\in X\}\right)^{-(\sigma\text{-weak})} = N$

終

例(1)

N を von Neumann 環, α を N 上の $*$-自己同型写像とする. これに対し, bimodule を $X := N$ とし, 作用・N-値内積を次で定義する:

- $a\cdot x\cdot b := \alpha^{-1}(a)xb \qquad (x\in X=N,\ a,b\in N)$
- ${}_N\langle x,y\rangle := \alpha(xy^*)$
- $\langle x,y\rangle_N := x^*y$

このとき, X は有限生成 N-N bimodule であり, $1\in X$ が基底で, $d_l(x)=1$ となる.

例(2)

N を von Neumann 環, α,β を N 上の $*$-自己同型写像とする. これに対し, bimodule を $X := N\oplus N$ とし, 作用・N-値内積を次で定義する:

- $a\cdot(x\oplus y)\cdot b := (\alpha^{-1}(a)xb)\oplus(\beta^{-1}(a)yb)$
- ${}_N\langle x_1\oplus y_1,\ x_2\oplus y_2\rangle := \alpha(x_1x_2^*) + \beta(y_1y_2^*)$
- $\langle x_1\oplus y_1,\ x_2\oplus y_2\rangle_N := x_1^*x_2 + y_1^*y_2$

このとき，X は有限生成 N-N bimodule で，$\{1\oplus 0,\ 0\oplus 1\}$ が X の基底で，$d_r(X) = 2$ となる．

例(3) ($(P_1$-$P_0)$)

$N \subset M$ を II_1-因子環・部分因子環とし，Jones index $[M:N]$ は有限であるとする．E_N を，M から N への標準的条件付期待値とする．これに対し，bimodule を $X := M$ とし，作用・N-値内積を次で定義する：

- $a \cdot x \cdot b := axb \qquad (x \in X = M,\ a, b \in N)$
- ${}_N\langle x, y \rangle := E_N(xy^*)$
- $\langle x, y \rangle_N := E_N(x^* y)$

このとき，X は有限生成 Hilbert N-N bimodule で，Pimsner-Popa basis が，X の右基底になる．またこのとき，X の right index $d_r(X)$ は，Pimsner-Popa basis の性質から，Jones index $[M:N]$ である．

例(4) ((K_0))

$N \subset M$ を，II型を含む，一般の因子環・部分因子環で，E_N を M から N への正規忠実な条件付期待値で，index $\mathrm{Index}(E_N)$ は有限であるとする．
これに対し，bimodule X を $X := M$ とし，作用・N-値内積を次で定義する：

- $a \cdot x \cdot b := axb \qquad (x \in X = M,\ a, b \in N)$
- ${}_N\langle x, y \rangle := E_N(xy^*)$
- $\langle x, y \rangle_N := E_N(x^* y)$.

このとき、例(3)と同様に、X は有限生成の Hilbert N-N bimodule で、right index $d_r(X)$ は、$\mathrm{Index}(E_N)$ になる。

以下、例(3)をモデルとして、bimodule algebra $\mathcal{M}_X$ の構成を考えていくことにする。

(2)

ここでは、bimodule に対する KMS 条件について説明する。

<u>定義</u>: ((Kaj), (K-W1))

N を von Neumann 環、G を局所コンパクトハウスドルフ群、X を有限生成 Hilbert N-N bimodule とする。このとき、$(X, N, G, \gamma, \alpha)$ が G-equivariant system であるとは、次の条件をみたすものと定義する。

(1) α は G の N 上の連続作用

(2) γ は G から X 上の等距離同型群への準同型写像で、パラメータ $g \in G$ に関して連続、すなわち、任意の $\xi \in X$ に対し、$\gamma_g(\xi)$ が ξ に、弱い意味で収束、つまり

任意の $\eta \in X$ に対し、

$${}_N\langle \gamma_g(\xi), \eta \rangle \xrightarrow{g \to e} {}_N\langle \xi, \eta \rangle \quad (\sigma\text{-weak top. で}).$$

(3) γ と α の関係式:

- ${}_N\langle \gamma_g(\xi), \gamma_g(\eta) \rangle = \alpha_g({}_N\langle \xi, \eta \rangle)$
- $\langle \gamma_g(\xi), \gamma_g(\eta) \rangle_N = \alpha_g(\langle \xi, \eta \rangle_N)$
- $\gamma_g(a \cdot \xi \cdot b) = \alpha_g(a)\gamma_g(\xi)\alpha_g(b) \quad (a, b \in N).$

次に、$G=\mathbb{R}$ としたときの、bimodule に対する analytic element の説明をする。

<u>定義</u>

N を von Neumann 環、X を有限生成 Hilbert N-N bimodule、$(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ を与えられた $\mathbb{R}$-equivariant system とする。このとき、$\xi \in X$ が $\mathbb{R}$-equivariant system $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対する γ-analytic element であるとは、(弱い位相の意味での) $\mathbb{C}$ から X に値をとる解析関数 $\tilde{\gamma}_z(\xi)$ が存在して、$\tilde{\gamma}_t(\xi)=\gamma_t(\xi)$ $(t\in\mathbb{R})$ となることと定義する。

$\square$

これに関して、次の結果が得られる。

<u>命題</u>

N を von Neumann 環、X を有限生成 Hilbert N-N bimodule、$(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ を与えられた $\mathbb{R}$-equivariant system とする。このとき、γ-analytic element 全体の集合 X_a は、X の中で弱位相の意味で稠密である。

$\square$

次に、bimodule に対する KMS 条件について説明する。

<u>定義</u>

N を von Neumann 環、ϕ を N 上の normal state、X を有限生成の Hilbert N-N bimodule、$(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ を与えられた $\mathbb{R}$-equivariant system とする。このとき、ϕ が $\mathbb{R}$-equivariant system $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対する β-KMS state であるとは、次をみたすことと定義する：

(1) ϕ は (N, α) に対する β-KMS state である．

(2) 代数的 N_a-N_a subbimodule $Y \subset X_a \subset X$ が存在して，

- $Y \subset X$: 弱位相で dense.
- 任意の $\xi \in X$, $\eta \in Y$ に対して

$$\phi({}_N\langle \eta, \xi \rangle) = \phi(\langle \xi, \gamma_{i\beta}(\eta) \rangle_N)$$

ただし，

$$N_a := \{a \in N \mid a : \alpha\text{-analytic}\}.$$

例

$N \subset M$ を σ-finite factor, subfactor, E_N を M から N への正規忠実な条件付期待値で，Index $\mathrm{Index}(E_N)$ は有限とする．ϕ を N 上の faithful normal state とする．これに対し，bimodule を $X := M$ とし，作用・N-値内積を次で定義する．

- $a \cdot x \cdot b := axb \qquad (a, b \in N, x \in X)$.
- ${}_N\langle x, y \rangle := E_N(xy^*)$
- $\langle x, y \rangle_N := E_N(x^* y)$

このとき，α, γ を次で定義する．

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \quad : \quad \alpha_t := \sigma_t^{\phi}$$
$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Iso}(X) \quad : \quad \gamma_t := \sigma_t^{\phi \circ E_N} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

そして，Y として，M の $\sigma^{\phi \circ E_N}$-analytic element 全体とおく．
すると，ϕ は $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対する $\beta = -1$ KMS state である．

まず $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ が $\mathbb{R}$-equivariant system であることを調べる.

$$
\begin{aligned}
{}_N\langle \gamma_t(x), \gamma_t(y)\rangle &= {}_N\langle \sigma_t^{\phi\circ E_N}(x), \sigma_t^{\phi\circ E_N}(y)\rangle \\
&= E_N(\sigma_t^{\phi\circ E_N}(x)\sigma_t^{\phi\circ E_N}(y)^*) \\
&= E_N(\sigma_t^{\phi\circ E_N}(xy^*)) \\
&= E_N\circ\sigma_t^{\phi\circ E_N}(xy^*) \\
&= \sigma_t^{\phi}\circ E_N(xy^*) \\
&= \sigma_t^{\phi}(E_N(xy^*)) \\
&= \sigma_t^{\phi}({}_N\langle x, y\rangle) \\
&= \alpha_t({}_N\langle x, y\rangle).
\end{aligned}
$$

同様に

$$\langle \gamma_t(x), \gamma_t(y)\rangle_N = \alpha_t(\langle x, y\rangle_N).$$

また,

$$
\begin{aligned}
\gamma_t(a\cdot x\cdot b) &= \sigma_t^{\phi\circ E_N}(axb) \\
&= \sigma_t^{\phi\circ E_N}(a)\sigma_t^{\phi\circ E_N}(x)\sigma_t^{\phi\circ E_N}(b) \\
&= \sigma_t^{\phi}(a)\sigma_t^{\phi\circ E_N}(x)\sigma_t^{\phi}(b) \\
&= \alpha_t(a)\gamma_t(x)\alpha_t(b) \qquad (a, b\in N).
\end{aligned}
$$

よって. $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ は $\mathbb{R}$-equivariant system である.

また. $x\in X$, $y\in Y$ に対して.

$$
\begin{aligned}
\phi({}_N\langle y, x\rangle) &= \phi(E_N(yx^*)) \\
&= \phi\circ E_N(yx^*) \\
&= \phi\circ E_N(x^*\sigma_{-i}^{\phi\circ E_N}(y))
\end{aligned}
$$

$$= \phi(E_N(x^* \sigma_{-i}^{\phi\circ E_N}(y)))$$
$$= \phi(\langle x, \gamma_{-i}(y)\rangle_N)$$

より、ϕ は $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対する $\beta=-1$ KMS state である。

(3)

次に、bimodule から生成される von Neumann 環について説明する。

定義

N を von Neumann 環、X を有限生成 Hilbert N-N bimodule で full 条件をみたし、right index $d_{r}(X)$ はスカラーであるとする。このとき、$\mathcal{M}_X$ が N と X で生成される von Neumann 環であるとは、次をみたすものと定義する。

(1) N から $\mathcal{M}_X$ への σ-weak 連続な、単射単位的 $*$-hom. π が存在する。

(2) $\mathcal{M}_X$ の中の部分集合 $\{S_\xi \mid \xi\in X\}$ が存在して、

- S_* : linear
- $\pi(a)S_\xi = S_{a\xi}$, $S_\xi\pi(a) = S_{\xi a}$ $(a\in N)$
- $S_\xi^* S_\eta = \pi(\langle \xi, \eta\rangle_N)$
- $S_{\varepsilon_1}S_{\varepsilon_1}^* + \cdots + S_{\varepsilon_n}S_{\varepsilon_n}^* = 1$ ($\{\varepsilon_i\}\subset X$ は right N-basis)

(3) $\mathcal{M}_X$ から $\pi(N)$ への正規忠実な条件付期待値 G_N が存在して、

$$G_N((S_{\xi_1}\cdots S_{\xi_p})(S_{\eta_1}\cdots S_{\eta_q})^*)$$
$$= \delta_{p,q}\, d_r(X)^{-p}\, \pi({}_N\langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_p, \eta_1\otimes\cdots\otimes\eta_p\rangle) .$$

(4) $\mathcal{M}_X = \{\pi(N), \{S_\xi \mid \xi\in X\}\}''$.

注意として、N が σ-finite のとき、もし上記をみたす環が存在すれば、それらは $*$-同型を除いて一意であることがわかる。

存在については、次の結果が得られる。

<u>命題</u>

N を σ-finite von Neumann 環、ϕ を N 上の faithful normal state、X を有限生成 Hilbert N-N bimodule で full 条件をみたし、right index $d_r(X)$ はスカラーであるとする。仮定として、$\mathbb{R}$-equivariant system $(X, N, \mathbb{R}, Y, \sigma^{\phi})$ が存在して、ϕ はそれに対する $\beta = -1$ KMS state であるとする。このとき、bimodule から生成される von Neumann 環 $\mathcal{M}_X$ は存在する。

これは、Katayama による結果を含んだものになっている。

参考文献

[Kaj] T. Kajiwara
Continuous crossed product of Hilbert C^*-bimodules.
Internat. J. Math. 11 (2000), No.7, 969-981.

[K-W1] T. Kajiwara, Y. Watatani.
Crossed products of Hilbert C^*-bimodules by countable discrete group
Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), No.3, 841-851.

[K-W2] T. Kajiwara, Y. Watatani.
Jones index theory by Hilbert C^*-bimodules and K-theory.
Trans. AMS. 352 (2000), No.8, 3429-3472.

[Kat] Y. Katayama
Generalized Cuntz algebra O_N^M.
RIMS Kokyuroku 858, 87-90 (1994).

[Ko] H. Kosaki
Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors.
J. Funct. Anal., 66 (1986), 123-140.

[Pa] W. L. Paschke
Inner product module over B^*-algebras.
Trans. Amer. Math. Soc. 182 (1973), 443-468.

(Pi) M. Pimsner

A class of C^*-algebras generating both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$.

In: D. Voiculescu (ed.), Free probability theory, AMS. 12 (1997) 189-212.

(Pi-Po) M. Pimsner, S. Popa

Entropy and index for subfactors.

Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 19 (1985), 57-106.

(St) S. Stratila

Modular theory in operator algebras.

Abacus Press, 1981.

(Yo1) K. Yonetani.

Hilbert bimodule からつくられる作用素環について.

RIMS Kokyuroku, 1151 (2000), 111-119.

(Yo2) K. Yonetani

preprint.