数理解析研究所講究録 1230 巻 2001 年 38-41

2種類の C^*-環の包含について

山形大理 佐野隆志 (Takashi SANO)

Department of Mathematical Sciences,

Faculty of Science, Yamagata University

本講演では，浜地－宇崎による「Orbital Factor Maps」の，C^*-環の指数理論としての考察を紹介する。

X をコンパクト距離空間，G を X 上 homeo に作用する可算離散群．G により定まる X 上の同値関係を $\mathcal{R}$ とする。この $\mathcal{R}$ を topological groupoid とみて，その the reduced groupoid C^*環 $C^*_{red}(\mathcal{R})$ を考える。(これは，

$$A_0 := C_c(G) = \{ f : \mathcal{R} \to \mathbb{C} \mid \text{conti \& cpt supported} \}$$

の適当な ℓ^2-表現による完備化であった。)

また，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{R}$ の (clopen) subrelation で，

$$\exists \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \quad (\varphi_1 \equiv id) \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$$

なる choice functions : $\mathcal{R}(x) = \overset{\text{disjoint}}{\bigcup_{i=1}^{n}} \mathcal{S}(\varphi_i x) \quad (x \in X)$

が，とれるものとする。

このとき,

$$B_0 := \{ f \in A_0 \mid \operatorname{supp} f \subseteqq \mathcal{S} \}$$

$$E_0(f)(x,y) := \chi_{\mathcal{S}}(x,y)\, f(x,y) \quad (f \in A_0)$$

$$\Gamma_i := \{ (\varphi_i x,\, x) \mid x \in X \}$$ とおけば,

<u>Prop.</u> $A_0 \supseteqq B_0$ に対し, $\{\chi_{\Gamma_i}^* \cdot \chi_{\Gamma_i}\}$ は E_0 の quasi-basis である。 $A = C^*_{red}(\mathcal{R}) = \overline{A_0}^{\|\cdot\|} \supseteqq B := \overline{B_0}^{\|\cdot\|}$ $(\cong C^*_{red}(\mathcal{S}))$ に対しても同様。

次に, skew product extension : $X = Y \times \{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{\pi} Y$ において, ある $\mathfrak{S}_n$-値 conti. cocycle σ on $\mathcal{R}_Y$ で, $x = (y, i)$, $x' = (y', j) \in X$ に対し

$$x \underset{\mathcal{S}_X}{\sim} x' \iff y \underset{\mathcal{R}_Y}{\sim} y' \text{ と } \sigma(y', y)(i) = j$$

なるものを考える。 このとき,

$$A_0 = C_c(\mathcal{S}_X) \supseteqq B_0 := \left\{ f \in C_c(\mathcal{S}_X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \hat{f} \in C_c(\mathcal{R}_Y) \text{ s.t.} \\ f(x,y) = \hat{f}(\pi(x), \pi(y)) \\ \qquad (x,y) \in \mathcal{S}_X \end{array} \right\}$$

$$E_0(f)(x,y) := \frac{1}{n} \sum_{\substack{\pi(x) = \pi(x') \\ \pi(y) = \pi(y') \\ x' \underset{\mathcal{S}_X}{\sim} y'}} f(x', y')$$

$$\Gamma_i := X \times \{i\}$$

に対し,

Prop. $A_0 \supseteq B_0$ に対し. $\{X_{p_i}^*, X_{p_i}\}$ は E_0 の quasi-basis.

このような skew product でない extension, 例えば covering map から得られる包含についても同様のことが言える。

例 $Y = \mathbb{T}$ 上のさまざまな 2:1 extensions は, 次のような包含を産む:

$$A_\theta \oplus A_\theta \supseteq A_\theta, \quad A_\theta \supseteq A_{2\theta}, \quad A_{\theta+\frac{1}{2}} \supseteq A_{2\theta}$$

などである。

Basic extensions に関する事柄については別の機会に述べる.

Remark. G が良い groupoid のとき, $C^*(G^0)$ は $C^*(G, \sigma)$ の Cartan になる。また, C が A の Cartan であれば, このような形であることが知られている. ([R])

Prop. $A \supseteq B$ が common Cartan C をもてば, $\exists G \supseteq H$ groupoid, $\exists \sigma$: 2-cocyle s.t.

$$A \supseteq B \supseteq C \cong C^*(G, \sigma) \supseteq C^*(H, \sigma) \supseteq C^*(G^0)$$

References

[R] J. Renault, A groupoid approach to C^*-algebras Lect. Notes in Math. 793, Springer-Verlag. 1980

[HK] T. Hamachi and H. Kosaki, Orbital factor maps, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 13 (1993), 33-55