

族のフレアーホモロジー

深谷賢治

京都大学理学部数学教室

1. 序 1

本稿は族のフレアーホモロジーを構成する構想を述べたものである。本稿の構想の多くの部分はまだ実現していない。この構成は、成功すれば、ホモロジー的ミラー対称性 ([Ko1][Ko2]) の証明の重要なステップをなすものと考えている。

始めに、以下に構成したいものの「ミラー」に当たるものを説明する。この「ミラー」は複素幾何に属する。本当に構成したいものはシンプレクティック幾何に属する。「ミラー」の方は、複素幾何ですでに厳密に構成されている。複素幾何の場合の構成の方が「易しい」のは、そちらでは量子効果がないからである。(A模型では量子補正がありB模型ではない、というのがミラー対称性の一般論であった。)

$\pi: M \rightarrow N$ を複素多様体から複素多様体への固有正則写像とする。 \mathcal{E} を M 上の接続層とする。このとき、導来関手 $R\pi_*\mathcal{E}$ は N 上の接続層の圏の導来圏の対象を与える。もし、 $\pi: M \rightarrow N$ がファイバー束で \mathcal{E} がベクトル束とすると、 $R\pi_*\mathcal{E}$ は次のように理解される。 $p \in N$ に対してファイバー $\pi^{-1}(p)$ を考え、そこに \mathcal{E} を制限する。層係数コホモロジー $H_j^*(\pi^{-1}(p); \mathcal{E})$ が定まる。点 p を動かしたとき、その次元 $\dim H_j^*(\pi^{-1}(p); \mathcal{E})$ が一定ならば、 $H_j^*(\pi^{-1}(p); \mathcal{E})$ は正則ベクトル束を定める。これが、 $R\pi_*\mathcal{E}$ である。一般には、 $\dim H_j^*(\pi^{-1}(p); \mathcal{E})$ はジャンプするから、 $H_j^*(\pi^{-1}(p); \mathcal{E})$ は正則ベクトル束を定めないが、その交代和 $\bigoplus_k (-1)^k H_j^*(\pi^{-1}(p); \mathcal{E})$ は N 上の接続層の圏の導来圏の対象を定める。これが $R\pi_*\mathcal{E}$ である。

もう少し限定的であるが、我々の状況により近いのは、以下の設定である。

複素多様体 X を固定しその上のベクトル束のモジュライ空間のある成分を N とする。すると、 N が十分良いモジュライ空間であれば、 X をファイバーとするファイバー束 $\pi: M \rightarrow N$ と M 上のベクトル束 $\mathcal{E} \rightarrow M$ が決まり、 $p \in N$ でのファイバへの \mathcal{E} の制限は、 p に対応する X 上のベクトル束を与える。 N' をベクトル束のモジュライ空間の別の成分とし、 $\pi': M' \rightarrow N'$ 、 $\mathcal{E}' \rightarrow M'$ を同様に考える。このとき、 $N \times N'$ 上の接続層の圏の導来圏の対象が次のように定まる。

$(p, q) \in N \times N'$ とする。このとき、 X 上の2つのベクトル束、 $\mathcal{E}|_{\pi^{-1}p}, \mathcal{E}'|_{\pi'^{-1}q}$ がきまる。これから、次数付きベクトル空間 $\text{Ext}^*(\mathcal{E}|_{\pi^{-1}p}; \mathcal{E}'|_{\pi'^{-1}q})$ が決まる。このベクトル空間の次元が (p, q) を動かしたとき連続的に変化する限り、 $\text{Ext}^*(\mathcal{E}|_{\pi^{-1}p}; \mathcal{E}'|_{\pi'^{-1}q})$ は $N \times N'$ 上の正則ベクトル束を定める。一般には次元はジャンプする。しかし、その交代和 $\bigoplus_k (-1)^k \text{Ext}^*(\mathcal{E}|_{\pi^{-1}p}; \mathcal{E}'|_{\pi'^{-1}q})$ は $N \times N'$ 上の接続層の圏の導来圏の対象と見なすことができる。

以上の構成はミラー対称性でも現れるフーリエ・向井変換とも関係が深い。以下考えたいのは、この構成のシンプレクティック幾何での類似物である。それは、フーリエ・向井変換と関係が深い、「フーリエ・向井変換の一種である」とは筆者は考えない。(ホモロジー的ミラー対称性に関わる論文の一部に、この点で筆者と意見を異にするものも見られる。) 一番の大きな違いは、シンプレクティック幾何での類似物では、量子効果が現れるという点である。量子効果という新しい現象が、ミラー対称性を介して量子効果のない複素幾何の場合(フーリエ・向井変換)に帰着され、これによって量子効果が理解される、というのが最も重要な点であると考えている。(もっともこのプロセスを数学的に実現することには、筆者はまだ殆ど成功していないが。)

2. 序 2

次に、シンプレクティック幾何の場合に何を構成したいのかを説明する。 (M, ω) をシンプレク

ティック多様体とする。閉2次型式 B をとり、 $\Omega = \omega + 2\pi\sqrt{-1}B$ を考える。無限次元空間

$$\mathcal{LAG}^-(M, \Omega) = \{(L, \mathcal{L}, \nabla) \mid \text{条件 1}\} \quad (1)$$

を考える。ここで条件1とは

条件1

- (1) $\dim L = \dim M/2$, $\omega|_L = 0$.
- (2) \mathcal{L} は L 上の直線束, ∇ はその接続で, ∇ の曲率 F_∇ は $F_\nabla = 2\pi\sqrt{-1}B$ を満たす.

である。集合 $\mathcal{LAG}^-(M, \Omega)$ は無限次元であるので、ゲージ変換群の作用を考えたい。より正確には次のようにして同値関係を定義する。

まずハミルトン同相写像の定義を思い出そう。関数 $f: M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとする。 $f_t(x) = f(x, t)$ と置く。 X_{f_t} を

$$\omega(X_{f_t}, V) = df_t(V)$$

が任意の V に対して成り立つただ一つのベクトル場とする。微分同相の族 $\Phi^t: M \rightarrow M$ を

$$\begin{cases} \Phi^0(x) &= x \\ \frac{d\Phi^t(x)}{dt} &= V_{f_t}(x) \end{cases} \quad (2)$$

で定義する。これを $f: M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が生成するハミルトンアイソトピーと呼び、 Φ^1 をハミルトン同相写像と呼ぶ。 $\Phi^t: M \rightarrow M$ はシンプレクティック構造を保つことが知られている。

さて、同値関係 $(L_1, \mathcal{L}_1, \nabla_1) \sim (L_2, \mathcal{L}_2, \nabla_2)$ を、 $f: M \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, 複素直線束 $\mathcal{L} \rightarrow L \times [0, 1]$ とその接続 ∇ で、次の条件を満たすものが存在すること、と定義する。 $\Phi^t: M \rightarrow M$ を f が生成するハミルトンアイソトピーとする。

条件2

- (1) $\Phi^1(L_1) = L_2$.
- (2) $(\mathcal{L}, \nabla)|_{L \times \{0\}} = (\mathcal{L}_1, \nabla_1)$, $(\mathcal{L}, \nabla)|_{L \times \{1\}} \cong \Phi^{1*}(\mathcal{L}_2, \nabla_2)$.
- (3) $F_\nabla = 2\pi\sqrt{-1}\Phi^*B$. ここで、 $\Phi: L_1 \times [0, 1] \rightarrow M$ は $\Phi(x, t) = \Phi^t(x)$ で定義する.

この同値関係による同値類全体を $\mathcal{LAG}(M, \Omega)$ とかく。このモジュライ空間のハウスドルフ性は微妙な問題である。これは複素幾何での安定性の類似物に関わると思われるが、はっきりしない。もちろん正則ベクトル束のモジュライ空間も、(半)安定性を仮定しないとハウスドルフ空間にはならない。この点は両者平行であると思われるので、全く自明でない問題であるが、ここでは無視する。これを無視すると、 $\mathcal{LAG}(M, \Omega)$ に複素構造が定まる。これを説明する。

$(L, \mathcal{L}, \nabla) \in \mathcal{LAG}^-(M, \Omega)$ とする。 $I_1: \Gamma(L; TM|_L) \rightarrow \Gamma(L; T^*L) \otimes \mathbf{C}$ が $V \mapsto i_V \Omega$ で定まる。

$(L_i, \mathcal{L}_i, \nabla_i) \in \mathcal{LAG}^-(M, \Omega)$ なる族を考える。 $L \cong L_i$ なる微分同相の族を決めて置く。また、この微分同相による、 L_i の引きもどしと L の同型も決めておく。すると、埋め込み $L \cong L_i \subset M$ と ∇_i を t 微分することにより、ベクトル場 V と微分1形式 u がそれぞれ得られる。

$$I\left(\frac{\partial}{\partial t}(L_i, \mathcal{L}_i, \nabla_i)\right) = I_1(V) + 2\pi\sqrt{-1}u \in \Gamma(L; T^*L) \otimes \mathbf{C} \quad (3)$$

と定義する.

I が $I: T_{[L, L, \nabla]} \mathcal{L}AG(M, \Omega) \rightarrow \Gamma(L; T^*L) \otimes \mathbf{C}$ を定めることを示したい.

L はラグランジュ部分多様体であるから, $\operatorname{Re} I_1(V) = 0$ であるのは, V が L に接するとき, そのときに限られる. よって, (3)の実部は, $L \cong L_t$ なる微分同相の族の取り方によらない.

また L_t の引きもどしと L の同型の取り方を変えると, u が $u + \sqrt{-1}df$ に変化する. すなわち, I は $\operatorname{Im} d$ の取り方を除いて, この同型の取り方によらない.

最後に(3)の虚部を考える. V を L に接するベクトル場とし, $\exp tV$ を V が生成する1径数変換群とする. $L_t = (\exp tV)(L) = L$ である. $L_t = L$ とし, その $\exp tV$ による引き戻し $\exp(tV)^* L$ と L の同型を次のようにとる. $p \in L$ とする. $s \mapsto (\exp(tsV))(p)$ は p と $(\exp(tV))(p)$ を結ぶ道を与える. ∇ についてのこの道に沿った平行移動で L_p と $L_{(\exp(tV))(p)} \cong (\exp(tV)^* L)_p$ との同型が得られる. これが $\exp(tV)^* L$ と L の同型を定める.

この同型で ∇ を引き戻したものが定める族を $\exp(tV)^* \nabla$ とかく. すると $F_\nabla = 2\pi\sqrt{-1}I_1$ より

$$\frac{d}{dt} \exp(tV)^* \nabla \Big|_{t=0} = i_\nabla F_\nabla = \operatorname{Im} 2\pi\sqrt{-1}I_1.$$

よって, この族の微分を I で移すと0になる.

同様にして, 同値関係 \sim は接空間に移ると d の像に対応することが確かめられる. 以上から $\mathcal{L}AG(M, \Omega)$ の接空間は $H^1(L; \mathbf{C})$ に同一視されることが分かった.

従って $\mathcal{L}AG(M, \Omega)$ は (ハウスドルフ性を仮定すれば) 複素多様体になる. (ここに入れた複素構造の積分可能性は比較的容易に確かめられる.) この複素構造を $\mathcal{L}AG(M, \Omega)$ の古典的複素構造と呼び $\mathcal{L}AG(M, \Omega)_{cl}$ とかく. (以上の構成は[Fu3]で複素トーラスの時与えた構成の一般化である.)

積 $\mathcal{L}AG(M, \Omega)_{cl} \times \mathcal{L}AG(M, \Omega)_{cl}$ を考え, その上に正則ベクトル束, より正確には, 接続層の圏の導来圏の対象を定義したい. すなわち, $(L_1, L_1, \nabla_1), (L_2, L_2, \nabla_2) \in \mathcal{L}AG(M, \Omega)$ に対して, そのファイバーがフレアーホモロジー群 $HF((L_1, L_1, \nabla_1), (L_2, L_2, \nabla_2))$ であるような, ベクトル束を考えたい. この構成が1で述べたもののミラーである, というのがホモロジー的ミラー対称性の一部に当たる予想である. この予想は, 実はそのままでは成り立たない. どのような修正が必要かは話の要点であるべきであるが, 筆者にはまだ分かっていない点がかなりある. とにかく楽観的に話を進める.

問題点は以下の通りである.

- (A) フレアーホモロジーはいつも定義されるとは限らない.
 - (A.1) フレアーホモロジーが有理係数あるいは複素数係数で定義されるためには, 少なくともラグランジュ部分多様体が, 相対スピン構造を持たなければならない.
 - (A.2) フレアーホモロジーが定義されるには, 障害類がすべて消えなければならない.
- (B) (A)が解決しフレアーホモロジーが定義される場合でも, それは, 定義に必要な他のデータによってしまい, 一意には決まらない.
- (C) フレアーホモロジーの次数がうまく決まるためには, 他のデータが必要である.
- (D) フレアーホモロジーが定義される場合でも, 境界作用素の収束性の問題があり, 係数はノビコフ環 (形式的べき級数環) になり, 複素数体そのものではない.
- (E) 収束性が示されたとしても, 素朴に考えたフレアーホモロジーの族に対する正則構造は, 量

子効果によって境界作用素がジャンプするため、不連続である¹。

- (F) (E)を「量子補正を伴った正則構造」を考えることによって解決できたとしても、できた正則構造は $\mathcal{L}AG(M, \Omega)_{cl} \times \mathcal{L}AG(M, \Omega)_{cl}$ 上の正則ベクトル束ではなく、量子補正が入った空間 $\mathcal{L}AG(M, \Omega)_{qm} \times \mathcal{L}AG(M, \Omega)_{qm}$ 上の正則ベクトル束である。

上で述べた問題点の内、(A)(B)(C)の取り扱いは基本的には理解されている。(A)(B)については太田氏の稿[Oh],[FOOO]および3節を参照。(C)については例えば[Sei]をみよ。(D)(E)(F)を説明するのが本稿の主要な目的である。(結局(F)については、触れられなかった。またの機会にしたい。)

3. 無限小族

しかしその話題に入る前に、(A.2),(B)に関する[FOOO]の主要結果を、族のフレアーホモロジーの立場から書き替えておきたい。これは、 $\mathcal{L}AG(M, \Omega)$ の一点の無限小近傍（形式的近傍（formal neighborhood））での、族のフレアーホモロジーの構成に当たるのである。

まず、普遍ノビコフ環を次の式で定義する。

$$\Lambda_{nov} = \left\{ \sum a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbf{C}, \lambda_i \in \mathbf{R}, \lambda_i < \lambda_{i+1}, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty \right\}.$$

この定義は、[FOOO]やこの予稿集の太田氏の原稿のものとは多少違うが、ミラー対称性に応用するにはこちらの方が便利である。

その部分環を

$$\Lambda_{0,nov} = \left\{ \sum a_i T^{\lambda_i} \in \Lambda_{nov} \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$$

で定め、その極大イデアルを

$$\Lambda_{+,nov} = \left\{ \sum a_i T^{\lambda_i} \in \Lambda_{nov} \mid \lambda_i > 0 \right\}$$

で定義する。 $\Lambda_{0,nov} / \Lambda_{+,nov} \cong \mathbf{C}$ である。

L をシンプレクティック多様体 (M, ω) ラグランジュ部分多様体とする。以下次のことを仮定する。

仮定 1

- (1) $c^1(M) = 0$.
- (2) $\eta: \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbf{Z}$ をマスロフ指数とすると、 $\eta = 0$ 。(η の定義は例えば太田氏の稿を見よ。)

この仮定は、 $\varphi: (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, L)$ なる概正則写像のモジュライ空間の仮想次元が、 φ のホモトピー類によらずに n であることを意味する。一般の状況下では、仮想次元は φ のホモトピー類によって変わり、これを制御するのもう一つの不定元を Λ_{nov} に付け加える必要がある。([FOOO]では、仮定1をおいていなかったのが違った Λ_{nov} を用いた。) 仮定1の(2)が満たされると、ラグランジュ部分多様体 L に次数付け(grading)という構造を定めることが出来る。 L の次数付けを用いて、フレアーホモロジーに整数値の次数が定まるのであるが、その点については本稿ではふれない。([Sei],

¹ここで正則構造とは複素ベクトル束を正則ベクトル束にする構造である。問題点(D)が解決すれば、フレアーホモロジーは複素ベクトル空間であるから、その族は「複素ベクトル束」をなす。(括弧がついているのは次元がジャンプするからである。)しかし、正則ベクトル束にするにはよけいに構造を与えなければならない。ここで問題にしているのはその点である。それで、複素構造と区別するため正則構造と呼んだ。

[Fu6] をみよ.)

仮定 1 は, キャラビ・ヤウ多様体の特殊ラグランジュ部分多様体(Special Lagrangian submanifold) ([SYZ]をみよ) に対しては満たされている.

さて, L の特異鎖複体を $S(L)$ とかく. $S_k(L)$ の元は超関数係数の $n-k$ 次の微分型式と見なすことができる. $S(L)$ の二つの元が同じ超関数係数の $n-k$ 次微分型式を決めるとき同値と見なし, この同値関係による商を $\bar{S}(L)$ とかく. ただし, $\bar{S}_k(L) = \bar{S}^{m-k}(L)$ とすることで, $\bar{S}(L)$ を余鎖複体と見なす.

$\bar{S}(L)$ の元は超関数係数であるから, その元間の積は一般には定義されない. しかし, 次のことが示される. ([FOOO] Chapter 5.)

定理 1 : $\bar{S}(L)$ の可算個の元で生成される部分ベクトル空間 $C(L; \mathbf{C})$ の上の, A_∞ 代数の構造 ([St] をみよ) ($C(L; \mathbf{C}), \bar{m}_k$) ($k=1, 2, \dots$) が存在し, それは, 微分加群 $(\Gamma(L; \Lambda^*(L)); d, \wedge)$ とホモトピー同値である.

\bar{m}_k は次数を 1 上げる

$$\bar{m}_k : \overbrace{C[1](L; \mathbf{C}) \otimes \cdots \otimes C[1](L; \mathbf{C})}^k \rightarrow C[1](L; \mathbf{C}) \quad (4)$$

なる準同型である. ここで $C[1]^k(L; \mathbf{C}) = C^{k+1}(L; \mathbf{C})$ である. 以後

$$B_k C[1](L, \mathbf{C}) \cong \overbrace{C[1](L; \mathbf{C}) \otimes \cdots \otimes C[1](L; \mathbf{C})}^k, \quad BC[1](L, \mathbf{C}) = \sum_k B_k C[1](L, \mathbf{C})$$

と書く. m_k が A_∞ 代数の構造を決めるとは

$$\sum_{1 \leq l < m \leq k} \pm \bar{m}_{k-m+l}(x_1, \dots, x_{l-1}, \bar{m}_{m-l+1}(x_l, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_k) = 0 \quad (5)$$

が成り立つことを指す. A_∞ 代数などの用語については太田氏の稿および[FOOO]を見よ.

荒く言えば, 定理 1 は, 「超関数係数の $n-k$ 次の微分型式の積を, A_∞ 代数の意味で変形すれば, いたるところ積が定義できるようにすることができる», ということを意味する.

さて, [FOOO]の主定理の一つは次の定理である. $C(L; \Lambda_{0, nov})$ を $C(L; \mathbf{C}) \otimes \Lambda_{0, nov}$ の完備化とする.

定理 2 : $(L, \mathcal{L}, \nabla) \in \text{LAG}^-(M, \Omega)$ とし, L は相対スピン構造を持つとする. さらに仮定 1 の(1)(2)を仮定する. すると $(C(L; \Lambda_{0, nov}), m_k)$, $k=0, 1, 2, \dots$ なるフィルター付き A_∞ 代数が定まり, 係数を $\Lambda_{0, nov} / \Lambda_{+, nov} \cong \mathbf{C}$ に落とすと定理 1 の A_∞ 代数に一致する.

($C(L; \Lambda_{0, nov})$ は (L, ∇) によらないが, m_k の定義には (L, ∇) が現れる.)

フィルター付き A_∞ 代数とは, 大体, (4)(5)をノビコフ環係数で考えたものであるが, m_k が $k=0$ から始まっている点に注意を要する. (さらに, ノビコフ環係数で考えるために, 完備化についての種々の注意が必要である.)

m_k の定義はおおよそ次の通りである. (詳しくは太田氏の稿および[FOOO]を見よ.) モジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1}(L)$ を, $\varphi : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, L)$ なる概正則写像と ∂D^2 上の $k+1$ 個の点 $\bar{z} = (z_0, \dots, z_k)$ の組 (φ, \bar{z}) の全体とする.

代入写像(evaluation map) $ev : \mathcal{M}_{k+1}(L) \rightarrow L^{k+1}$ を,

$$ev(\varphi, \bar{z}) = (\varphi(z_0), \dots, \varphi(z_k))$$

で定義する.

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1}(L)$ の上の関数 B, E, H を,

$$E(\varphi) = \int_{D^2} \varphi^* \omega \in \mathbf{R}, \quad B(\varphi) = \int_{D^2} \varphi^* B \in \mathbf{R}, \quad H(\varphi) = Hol_{\varphi(\partial D^2)}(L, \nabla) \in S^1$$

で定義する. ここで $Hol_{\varphi(\partial D^2)}(L, \nabla)$ は閉曲線 $\varphi(\partial D^2)$ に沿った接続 ∇ のホロノミーを指す.

補題 1 : $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi) \otimes T^{E(\varphi)}$ は φ のホモトピー類だけで決まる.

証明 : T のべきの部分と絶対値がホモトピー類にのみよることは, L がラグランジュ部分多様体であることと, Stokes の定理の帰結である. 偏角については, $F_{\nabla} = 2\pi\sqrt{-1}B$ の帰結である.

証明終わり

さて P_i を $C(L; \mathbf{C})$ の元を与えるチェーンとする. おおのこの $\pi_2(M, L)$ の元 β に対して, $\mathcal{M}_{k+1}(L)$ の対応する成分を $\mathcal{M}_{k+1}(L; \beta)$ と書く. このとき

$$m_k(P_1, \dots, P_k) = \sum_{\beta} e^{2\pi\sqrt{-1}B(\beta)} H(\beta) \left(\mathcal{M}_{k+1}(L; \beta) \times_{L^k} (P_1 \times \dots \times P_k) \right) \otimes T^{E(\beta)}. \quad (6)$$

定理 2 の証明のこれ以上の説明はここでは省く.

定理 2 を言い換えたい. $C(L; \mathbf{C})$ の \mathbf{C} 上の双対空間 $C(L; \mathbf{C})^*$ をとり, $C(L; \Lambda_{0, nov})^*$ の完備化を $C(L; \mathbf{C})^* \otimes \Lambda_{0, nov}$ とおく. 次数を前のように 1 つずらし, その自由テンソル代数 $TC[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ を考える. $TC[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ は $\Lambda_{0, nov}$ 上の非可換多元環である. $\Lambda_{0, nov}$ のフィルター付けから導かれる $TC[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ のフィルター付けによる完備化をとり, それを $\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ と書く. つぎに, m_k の双対は写像 $m_k^* : C[1](L; \Lambda_{0, nov})^* \rightarrow TC[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ を与える. m_k^* を $TC[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ の微分であるように一意に拡張する. それを $\delta^k : TC[1](L; \Lambda_{0, nov})^* \rightarrow TC[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ と書く. すると, 和 $\hat{\delta} = \sum \delta_k$ は完備化 $\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ 上の微分として意味をもつ. こうして非可換フィルター付き次数付き微分加群 $(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \bullet, \hat{\delta})$ を得る.

$(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \bullet, \hat{\delta})$ のコホモロジーをとると, 非可換環 $(H(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}), \bullet)$ を得る.

[FOOO] Chapter 4 の結果を使うと, この非可換環が $(L, L, \nabla) \in \mathcal{LAG}^{\sim}(M, \Omega)$ の \sim 同値類でのみ決まることが分かる. しかしこの形の不変性は, 前述の (B) に対する回答としてはまだ不満足である.

$(H(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}), \bullet)$ は環としては大きすぎるし, また, $\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ のもつもう一つの重要なフィルター付け (エネルギーではなく, $C[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ の元を何個テンソル積をとったかで決まるフィルター付け, これを個数フィルターと呼ぶ) を捨ててしまっている. (m_0 があるので, $\hat{\delta}$ はこのフィルター付けを保たない.)

注意 : Eliashberg-Givental-Hofer の接触ホモロジー [E], [EGH] では, L_{∞} 構造について同様な構成を行い, $(H(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}), \bullet)$ に当たる不変量を得ている. ここで述べたものと同様の構成をして, より小さい代数系を得ることが可能である. (Chekanov [Ch] は接触多様体とルジャンドル部分多様体という状況下で, ほぼ同様の構成をしていると見なせる.)

(L, L, ∇) (の \sim 同値類) の $\mathcal{LAG}(M, \Omega)_{cl}$ での無限小変形を考えよう. すでに説明したように,

これは $H^1(L; \mathbf{C})$ の 0 での無限小近傍に対応するであろう。

しかし、ここで第 1 番目の量子補正が現れる。すなわち、我々が考えるべきモジュライ空間は $\mathcal{L}AG(M, \Omega)_{cl}$ より一般には小さい。それは、 $\text{spec}\left(H\left(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}\right), \bullet\right)$ と見るのが自然である。非可換フィルター付き次数付き微分加群の spec は、まだどう定義したらいいか筆者は知らない。非可換形式的超スキームというべきものであろう。（ $\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ が非可換環だから「非可換」、次数付き環でしかも微分を考えているから超 (super)、形式的べき級数環の多少の一般化である普遍ノビコフ環を係数環にしているから、形式的である。）

ここでは、その「近似」として、 $\text{spec}\left(H\left(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}\right), \bullet\right)$ の $\Lambda_{0, nov}$ 値の点全体の集合を考えよう。これは $\Lambda_{0, nov} \rightarrow H\left(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}\right)$ なる環準同型全体である。さてここで、ホモロジーをとることと、環準同型全体をとること、の順番をひっくりがえす。すなわち、次のように定義する。

定義 1 : $\varphi: \hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^* \rightarrow \Lambda_{0, nov}$ なる環準同型で、 $\varphi \circ \hat{\delta} = 0$ なるもの全体を $\tilde{\mathcal{M}}'(L, \mathcal{L})$ と書く。

定義 1 を双対にひっくり返してみよう。すなわち、 $\varphi: \hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^* \rightarrow \Lambda_{0, nov}$ なる環準同型を与えることは、逆向き $\varphi^*: \Lambda_{0, nov} \rightarrow \hat{BC}[1](L; \Lambda_{0, nov})$ の余環の余準同型を与えることに同値である。

(ここで $\hat{BC}[1](L; \Lambda_{0, nov})$ のハットは完備化をしていることを表す。) $\hat{BC}[1](L; \Lambda_{0, nov})$ の余環構造および $\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^*$ の環構造は深いものではない。つまり後者は (自由) テンソル代数で前者は (自由) テンソル余代数である。だから、微分の方がより重要である。余準同型ということの帰結は次の補題の通りである。

補題 2 : $\varphi^*: \Lambda_{0, nov} \rightarrow \hat{BC}[1](L; \Lambda_{0, nov})$ なる余環準同型は、 $C[1](L; \Lambda_{0, nov})$ の元 b により、

$$e^b = 1 + b + b \otimes b + b \otimes b \otimes b + \dots, \quad \varphi^*(1) = e^b$$

と与えられる。また $\varphi: \hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, nov})^* \rightarrow \Lambda_{0, nov}$ なる環準同型は、 $C[1](L; \Lambda_{0, nov})$ の元 b により、 $\varphi(x^1 \otimes \dots \otimes x^k) = x^1(b)x^2(b)\dots x^k(b)$ で与えられる。

証明は単純な代数なので省略する。(正確に言うと、完備化の取り方をきちんと決めておかないといけない。 $\varphi^*(1) = e^b$ が収束し $\hat{BC}[1](L; \Lambda_{0, nov})$ の元であるためには、 $b \in F^\lambda(C[1](L; \Lambda_{0, nov}))$ がある正の λ に対して成り立っていないなければならない。)

補題 2 より次の等号が従う。

$$\tilde{\mathcal{M}}'(L, \mathcal{L}) = \left\{ b \in C[1](L; \Lambda_{0, nov}) \mid \hat{\delta}e^b = 0 \right\}.$$

いままで $b \in C[1](L; \Lambda_{0, nov})$ の次数については述べなかったが、 e^b の各項の次数 (1 ずらしたあと) が一定であるには、 $b \in C[1]^0(L; \Lambda_{0, nov})$ (ずらしたあとの次数が 0) である必要がある。そこで

$$\tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L}) = \left\{ b \in C[1]^0(L; \Lambda_{0, nov}) \mid \hat{\delta}e^b = 0 \right\}. \quad (4)$$

とおく。この元を bounding chain と呼ぶ。(4) 式の定義は、[FOOO] の定義と一致する。(太田氏の稿参照。) さてこうして $(C(L; \Lambda_{0, nov}), m_*)$ から「空間」 $\tilde{\mathcal{M}}(C(L; \Lambda_{0, nov}), m_*)$ が構成されてことになる。

方程式 $\hat{\delta}e^b = 0$ を書き下してみよう。まず

$$b = \sum_i b_{\lambda_i} T^{\lambda_i}$$

とおく。 ($b_{\lambda_i} \in C^1(L; \mathbf{C})$ である。) 次に, $x_i \in C^*(L; \mathbf{C})$ に対して

$$m_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_i m_{k, \lambda_i}(x_1, \dots, x_k) T^{\lambda_i},$$

$m_{k, \lambda_i}(x_1, \dots, x_k) \in C^*(L; \mathbf{C})$ と分解する。フィルター付き A_∞ 代数一般に対しては、このような分解を可能にするような、 \mathbf{R} の離散部分集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ が x_i によらずに存在することは明らかではない。

(x_i をとめれば明らかに存在する。) しかし定理 2 の A_∞ 代数に対しては、この部分集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ は、 L を境界とする概正則円盤に沿った、シンプレクティック型式の積分の値全体の集合に一致し、従って Gromov のコンパクト性定理より離散的である。

方程式 $\hat{\delta}e^b = 0$ は以上の記号を用いて

$$\begin{aligned} m_{0, \lambda}(1) + \sum_{\lambda_0 + \lambda_1 = \lambda} m_{1, \lambda_0}(b_{\lambda_1}) + \sum_{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda} m_{2, \lambda_0}(b_{\lambda_1}, b_{\lambda_2}) \\ + \sum_{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda} m_{3, \lambda_0}(b_{\lambda_1}, b_{\lambda_2}, b_{\lambda_3}) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができる。

A_∞ 代数の特別な場合である、次数付き微分多元環に対して方程式 (5) を考える。すなわち、 $m_0 = m_3 = \dots = 0$ であるとする。残った m_1 は微分 d で m_2 は積構造 \wedge である。(正確には符号の分だけ m_1 と d , m_2 と \wedge は異なる。[FOOO] または太田氏の稿をみよ。) この場合に (5) あるいはもともとの $\hat{\delta}e^b = 0$ を書くと

$$db + b \wedge b = 0 \quad (6)$$

となる。これは、複素ベクトル束の変形の方程式

$$\bar{\partial}B + B \wedge B = 0 \quad (7)$$

(E を正則ベクトル束, $B \in \Gamma(M; \text{End}(E) \otimes \Lambda^{0,1})$) とおくと, (7) が正則ベクトル束の正則構造の変形の方程式) とも, 平坦ベクトル束の方程式

$$F_A = dA + A \wedge A = 0 \quad (8)$$

(E をベクトル束, $A \in \Gamma(M; \text{End}(E) \otimes \Lambda^1)$) とおくと, (8) が曲率=0) とも同じ格好をしている。

その昔 (Berkeley の ICM の頃?) Witten が非可換幾何学を使った開いた元の定式化を言っていた ([Wil] など参照) のはこの話と関わっていると思われる。

もう少し後に ([Wi2] をみよ) Witten は開いた弦理論はゲージ理論になると述べたが、これはもっとはっきりと今の考察と関わっている。すなわち、余接束 $T^*X (= M)$ 上の開いた弦理論のミラーは、 X 上のゲージ理論である。すなわち、変形の方程式 (6) が平坦ベクトル束の方程式 (8) になる。この場合は (6) と (8) の一致は単なる形式的アナロジーを越えて、ミラーによる一致となる²。

²この話にはジーナスが高いリーマン面からの一般化があると思われる。易しい場合に [Fu1] で一部行

ただし [Wi2] で扱われていたのは実 3 次元多様体の余接束の場合で、そのときは概正則円盤はない (ラグランジュ部分多様体としては 0 切断をとる) から、 $m_{0,\lambda}(1)$ は現れないし、 λ_i も $\lambda_0 = 0$ だけが 0 でない。これに概正則円盤の効果を与えるには、実 3 次元多様体の余接束ではなく、閉じた複素 3 次元キャラビ・ヤウ多様体 M のなかのラグランジュ部分多様体を考える必要がある。このときは、その (方程式 (6) の) ミラーは、 M のミラー M^\vee 上の正則ベクトル束の変形理論であろう。(そのモジュライの方程式が (7)³。) これがホモロジー的ミラー対称性の一つの表現である。

ゲージ理論の場合 (7) は

$$(\bar{\partial} + B \wedge) \circ (\bar{\partial} + B \wedge) = 0 \quad (9)$$

と同値だった。すなわち $\bar{\partial}_B = \bar{\partial} + B \wedge$ とおくと、 $\bar{\partial}_B$ が同じベクトル束 E の別の正則構造を与えるための条件が (9) である。(5) あるいは、 $\hat{\delta}(e^b) = 0$ にも同様なことがいえる。すなわち、

$$m_1^b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} m_{k+\ell+1}(\overbrace{b, \dots, b}^k, x, \overbrace{b, \dots, b}^{\ell}) \quad (10)$$

とおくと、(5) は

$$m_1^b \circ m_1^b = 0 \quad (11)$$

と同値である。さらに、 m_k も同様に変形できるのだが、その解説は [FOOO] と太田氏の稿に任せることにする。(11) より、ホモロジー

$$\frac{\text{Ker } m_1^b}{\text{Im } m_1^b} = HF((L, \mathcal{L}, b); (L, \mathcal{L}, b)) \quad (12)$$

が決まる。これがフレアーホモロジーである。

さて、 $\tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L})$ の定義は (4) であるが、これだと $\text{spec}\left(H(\hat{TC}[1](L; \Lambda_{0, \text{nov}})^*, \hat{\delta}), \bullet\right)$ の $\Lambda_{0, \text{nov}}$ 値の点全体とは差が大きい。つまり、(4) はホモロジー群の非線形化ではなくて、サイクルつまり $m_1 b = 0$ を満たす b 全体の集合の非線形化である。

これが $\tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L})$ に \sim がついている理由である。これを本来は同値類で割る必要がある。(サイクルからホモロジーに移る手続きの非線形化。) これはゲージ場の方程式 (7) (8) との類似を考えれば明白である。つまり、(7) (8) の解全体はモジュライ空間とはいえず、ゲージ変換群の作用を考えた同値類をとる必要がある。

それでは方程式 (5) を保つゲージ変換群とは何だろうか。これは実は [FOOO] でも不満足な形でしか解決されていない点である。すなわち [FOOO] の Chapter 4 で与えられているゲージ同値の定義は純代数的ではない。ここでは純代数的な定義を与えておく。([Ko3] で Kontsevitch が述べている定義は、たぶん以下述べるのもの L_∞ 代数の場合を指しているのだと思われる。) ただし、この定義と [FOOO] の定義と (定理 2 の A_∞ 代数の場合に) との同値性は、私たち ([FOOO] の著者 4 人) には現時点ではチェックできていない。以下の定義だと [FOOO] の目的には現時点では不十分である。

もう一つ形式的なパラメータ S を導入し、

$$b(S) = \sum_i b_{\lambda_i}(S) T^{\lambda_i}$$

³そのジーナスが高い場合への一般化は、量子小平・Spencer 理論と [BCVO] で呼ばれているものの、ベクトル束のモジュライに対する類似物であろう。

を考える。ただし、 $b_{\lambda_i}(S) = \sum_{j=1}^{k_i} b_{\lambda_i, j} S^j \in C^1(L; \mathbf{C})[S]$ は $C^1(L; \mathbf{C})$ 係数の S の有限次多項式である。
同様に

$$c(S) = \sum_i c_{\lambda_i}(S) T^{\lambda_i}, \quad c_{\lambda_i}(S) = \sum_{j=1}^{k_i} c_{\lambda_i, j} S^j \in C^0(L; \mathbf{C})[S]$$

とおく。 $b(S)$ の S に複素数を代入できることに注意しておく。さて

$$\frac{\partial b(S)}{\partial S} = m_1^{b(S)}(c(S)). \quad (13)$$

という方程式を考える。(13)の右辺は、 m_1^b の定義式(10)に $b = b(S)$ を形式的に代入すれば、 S の形式的べき級数として意味がつく。(おのおのの $b_{\lambda_i}(S)$ は有限次だが、この次数は $\lambda_i \rightarrow \infty$ で一般には発散する。したがって(13)の両辺は S の形式的べき級数である。)

定義2 : (12)が満たされているとき、 $b(0) \approx b(1)$ とかく。 \approx が生成する最小の同値関係を \sim と書き、代数的ゲージ同値と呼ぶ。

補題3 : $b(0) \approx b(1)$, かつ、 $b(0) \in \tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L})$ ならば、 $b(1) \in \tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L})$ である。

証明 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(e^{b(S)})}{\partial S} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial S} m_k(\overbrace{b(S), \dots, b(S)}^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} m_{k+\ell+1} \left(\overbrace{b(S), \dots, b(S)}^k, \frac{\partial b(S)}{\partial S}, \overbrace{b(S), \dots, b(S)}^{\ell} \right) \\ &= m_1^{b(S)} \left(\frac{\partial b(S)}{\partial S} \right) \\ &= (m_1^{b(S)} \circ m_1^{b(S)})(c(S)) \end{aligned} \quad (14)$$

から分かる。実際 $m(e^{b(S)})$ が S の k 次の項から始まるとすると、 $m_1^{b(S)} \circ m_1^{b(S)}$ は S の k 次の項から始まり、よって(13)より、 $k \neq 0$ ならば $\hat{\delta}(e^{b(S)})$ の S の k 次の項は0になる。 $\hat{\delta}(e^{b(S)})$ の0次の項は $b(0) \in \tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L})$ より0である。 証明終わり

定義3 : $\mathcal{M}(L, \mathcal{L}) = \tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L}) / \sim$.

演習問題 : $b(0) \approx b(1) \in \tilde{\mathcal{M}}(L, \mathcal{L})$ ならば、 $m_1^{b(0)}$ と $m_1^{b(1)}$ のホモロジー (すなわちフレアーホモロジー(12)) は同型であることを示せ。

さて $\mathcal{M}(L, \mathcal{L})$ は点集合として定義したが、これは形式的べき級数環もどきの $\Lambda_{0, nov}$ に値をもつ点と見るべきだったから、点集合的に見るのは正しくないであろう。本来はFormal schemeあるいは無限小近傍と見るべきであるからである。ではどうしたらいいか、筆者にはまだ良く分からない。Differential graded scheme (この講演会でBehrentはそういう題の講演をしたが) というものがうまくできるのなら、そこに入るべき対象である。ただし、Formalでしかも非可換であろう。

さて、族のフレアーホモロジーの無限小族を作るというこの節の目的に戻ろう。

そのまえに $\mathcal{M}(L, \mathcal{L})$ についても一言述べる。これはラグランジュ部分多様体 L から決まる A_{∞} 代数の無限小変形を媒介変数表示する空間であった。しかし、これはラグランジュ部分多様体 L 自身の変形と以下に述べるような関係がある。 $\mathcal{M}(L, \mathcal{L})$ の一点 $[b]$ での接空間 $T_{[b]}\mathcal{M}(L, \mathcal{L})$ を考えよう。

($\mathcal{M}(L, \mathcal{L})$ は非特異とは限らないから、ザリスキー接空間である。) これは、方程式(5)の線形化方程式の解空間を、ゲージ変換(12)の線形化で割った商空間である。(5)の線形化方程式は(13)を見ればわかり

$$m_1^b(\Delta b) = 0.$$

である。ここで Δb が未知変数である。一方(12)の線形化に当たる自明な変形は

$$\Delta b = m_1^b(c). \quad (15)$$

で与えられる。結局

$$T_{[b]}\mathcal{M}(L, \mathcal{L}) \cong HF^1((L, \mathcal{L}, b); (L, \mathcal{L}, b)) \quad (16)$$

が分かった。(16)の意味を説明する。フレアーホモロジー $HF^1((L, \mathcal{L}, b); (L, \mathcal{L}, b))$ は L の普通のホモロジーの量子変形である。すなわち、境界作用素(10)を T で展開すると

$$m_1^b = \sum_{i=1}^{\infty} m_{1,i}^b T^{\lambda_i} \quad (17)$$

と書けるが、この初項 $m_{1,0}^b T^{\lambda_0}$ は普通の境界作用素と(符号を除いて)一致する。 $(\lambda_1 = 0)$ 。正確には $HF^1((L, \mathcal{L}, b); (L, \mathcal{L}, b))$ と $H(L; \Lambda_{0, nov})$ を結びつけるスペクトル列がある。(FOOO, 太田氏の稿参照。) 結局 $\mathcal{M}(C(L; \Lambda_{0, nov}), m_*)$ の接空間は、 L の1次の(コ)ホモロジーの量子変形である。

一方で、ラグランジュ部分多様体 L を変形することを考える。 L' が L に C^1 位相で近いとする。Darboux-Weinsteinの定理により、 L の近傍は L の余接束とシンプレクティック構造も含めて一致する。すると、 L' は L のある閉1形式 u のグラフと見なせる。ここで L' が L とハミルトン同相で一致すること(2で述べた同値関係)と、 u が $u = df$ と表せることは同値であることが分かる。(ただし2で述べたハウスドルフ性の問題が残る。) 従って、ラグランジュ部分多様体のハミルトン同値類のモジュライ空間の接空間は、ラグランジュ部分多様体の第1コホモロジーである。

一方、ラグランジュ部分多様体のモジュライの接空間の量子化は、 $\mathcal{M}(L, \mathcal{L})$ の接空間である。これは $\mathcal{M}(L, \mathcal{L})$ がラグランジュ部分多様体のハミルトン同値類の無限小モジュライ空間の量子化である、ことを示唆する。ここで量子化というときの量子効果は、 m_1^b と普通の境界作用素の差で、これは、正の λ_i に対応する(16)の項だが、もとをたどれば概正則円盤がその原因であった。

さて、これで $\mathcal{M}(C(L; \Lambda_{0, nov}), m_*)$ がおおよそラグランジュ部分多様体の無限小モジュライ空間と見なせることが分かった。

さて、 $\mathcal{L}AG(M, \Omega) \times \mathcal{L}AG(M, \Omega)$ (の量子化) 上の、族のフレアーホモロジーを作る、というのが我々のこの節での目的であった。無限小族の上に作るのであるから、点集合論的に考えないで、スキーム的に考える必要がある。環論と幾何学の間標準的な辞書を考えよう。この辞書による対応は次のようになる。 L_1, L_2 を考えよう。すると、

$$L_i \text{の無限小近傍} = \mathcal{M}(C(L; \Lambda_{0, nov}), m_*) \Leftrightarrow \hat{T}C[1](L_i; \Lambda_{0, nov})^*$$

と対応する。従って、 (L_1, L_2) の $\mathcal{L}AG(M, \Omega) \times \mathcal{L}AG(M, \Omega)$ での無限小近傍上のベクトル束は

$\hat{TC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})^* \times \hat{TC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})^*$ 上の加群に対応するだろう. ただし, $\hat{TC}[1](L_i; \Lambda_{0, nov})^*$ が非可換なので少し注意を要し, 対応は

$$(L_1, L_2) \text{ の無限小近傍上のベクトル束 } \Leftrightarrow \text{ 左 } \hat{TC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})^* \text{ 右 } \hat{TC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})^* \text{ 双加群}$$

となる. 実際, フレアーホモロジー $HF(L_1, L_2)$ は左 $\hat{TC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})^*$ 右 $\hat{TC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})^*$ 微分双加群の (コ) ホモロジーとして [FOOO] では構成される. (正確に言うと, [FOOO] ではこの双対の定式化がなされている.) ちょっと弱い形だが, 簡単のため次のように書いておく.

定理 3 : 左 $\hat{TC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})^*$ 右 $\hat{TC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})^*$ 微分双加群 \mathcal{D} が定まる.

アーベル群としては

$$\mathcal{D} = \hat{TC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})^* \otimes_{\Lambda_{0, nov}} \left(\bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1, p}, L_{2, p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov} \right) \otimes \hat{TC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})^*$$

である. 双加群の構造は, $\hat{TC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})^*$ と $\hat{TC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})^*$ を左右からそれぞれのテンソル積因子にかけるだけだから, 深くない. 重要なのは微分である. その構成はフレアーホモロジーの境界作用素の定義と定理 2 の証明をあわせたものである ([FOOO]). この節の最後に概略を与える.

定理 3 から決まった \mathcal{D} が (L_1, L_2) の無限小近傍上のベクトル束に対応するのだとすると, そのファイバーはどうなるだろうか. これは辞書を見直せば分かる. 「 $\text{spec}\left(H\left(\hat{TC}[1](L_i; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}\right), \bullet\right)$ の $\Lambda_{0, nov}$ に値を持つ点」とは, $\varphi: \hat{TC}[1](L_i; \Lambda_{0, nov})^* \rightarrow \Lambda_{0, nov}$ なる環準同型で, $\varphi \circ \hat{\delta} = 0$ をみたすもので, それは $b_i \in \tilde{\mathcal{M}}\left(\hat{TC}[1](L_i; \Lambda_{0, nov})^*, \hat{\delta}\right)$ に対して $\varphi_{b_i}(x^1 \otimes \cdots \otimes x^k) = x^1(b_i)x^2(b_i)\cdots x^k(b_i)$ と与えられた.

\mathcal{D} に対応するベクトル束の (b_1, b_2) でのファイバーは, 従って, テンソル積

$$\Lambda_{0, nov} \otimes_{\varphi_{b_1}} \mathcal{D} \otimes_{\varphi_{b_2}} \Lambda_{0, nov} \quad (18)$$

で与えられる. これはアーベル群としては, $\bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1, p}, L_{2, p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov}$ であるが, 微分加群である. すなわち, 微分

$$\partial_{b_1, b_2}: \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1, p}, L_{2, p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov} \rightarrow \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1, p}, L_{2, p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov}$$

が存在し, 微分加群としてこれが (18) になる. 実際 [FOOO] の定義と見比べると, ∂_{b_1, b_2} のコホモロジーが $HF((L_1, L_1, b_1), (L_2, L_2, b_2))$ である. こうして, 族のフレアーホモロジーを無限小近傍上に構成するという問題は, 定理 3 によって解決されていることになる.

無限小族を局所的な $\text{sh}0$ でない大きさを持つ近傍までのばすという問題を, 次の節で扱う.

さて定理 3 で主張されている双微分加群の構成について述べる. ここでは, その双対を構成する. すなわち

$$\mathcal{D}^* = \hat{BC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov}) \otimes_{\Lambda_{0, nov}} \left(\bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1, p}, L_{2, p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov} \right) \otimes_{\Lambda_{0, nov}} \hat{BC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})$$

に対する, $\hat{d}: \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{D}^*$ である. $\hat{BC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})$, $\hat{BC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})$ は余環である. また, \mathcal{D}^* は左 $\hat{BC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov})$ 右 $\hat{BC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov})$ 自由余加群である. あとは, 余微分を構成すればよい. 自由双余加群上の余微分であるから,

$$n: \hat{BC}[1](L_1; \Lambda_{0, nov}) \otimes \left(\bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(\mathcal{L}_{1,p}, \mathcal{L}_{2,p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov} \right) \\ \otimes \hat{BC}[1](L_2; \Lambda_{0, nov}) \rightarrow \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(\mathcal{L}_{1,p}, \mathcal{L}_{2,p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov}$$

を構成すれば、それから $\hat{d}: \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{D}^*$ は

$$\hat{d}(\mathbf{x} \otimes [p] \otimes \mathbf{y}) = (\hat{d}(\mathbf{x}) \otimes [p] \otimes \mathbf{y}) + (1 \otimes n \otimes 1)(\Delta \mathbf{x} \otimes [p] \otimes \Delta \mathbf{y}) \\ + (-1)^{\deg \mathbf{x} + \deg p + 2} (\mathbf{x} \otimes [p] \otimes \hat{d}(\mathbf{y})) \quad (19)$$

できる。 n を定義するには、やはり概正則曲線のモジュライ空間を用いる。 L_1 と L_2 は横断的に交わっていると仮定する。 $p, q \in L_1 \cap L_2$ とし、次のモジュライ空間を考える。

$$\mathcal{M}(L_1, L_2; p, q) = \{ \varphi: [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow M \mid \text{条件 3 (1), (2), (3)} \}$$

条件 3 :

- (1) φ は概正則。
- (2) $\varphi(0, \tau) \in L_1, \varphi(1, \tau) \in L_2$ 。
- (3) $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \varphi(t, \tau) = p, \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(t, \tau) = q$ 。

$\mathcal{M}(L_1, L_2; p, q)$ には、 φ の定義域 $[0, 1] \times \mathbf{R}$ の第 2 成分のずらしから定まる \mathbf{R} の作用がある。この作用による商空間を $\overline{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q)$ とかく。 $\overline{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q)$ の次元（正確には仮想次元）は連結成分（あるいはその元 φ の属するホモトピー類）によって異なる。 k 次元の成分を集めたものを $\overline{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q)_k$ とおく。

次に重み関数を定義する。 $\varphi \in \mathcal{M}(L_1, L_2; p, q)$ に対して

$$E(\varphi) = \int_{D^2} \varphi^* \omega \in \mathbf{R}, \quad B(\varphi) = \int_{D^2} \varphi^* B \in \mathbf{R}$$

と定め、さらに

$$H(\varphi): \text{Hom}(\mathcal{L}_{1,p}, \mathcal{L}_{2,p}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{L}_{1,q}, \mathcal{L}_{2,q})$$

を

$$H(\varphi)(v) = h_{\varphi(\{1\} \times \mathbf{R})}(\mathcal{L}_2) \circ v \circ h_{\varphi(\{0\} \times \mathbf{R})}^{-1}(\mathcal{L}_1)$$

で定義する。ここで $h_{\varphi(\{1\} \times \mathbf{R})}(\mathcal{L}_2): \mathcal{L}_{2,p} \rightarrow \mathcal{L}_{2,q}$ は道 $\varphi(\{1\} \times \mathbf{R})$ に沿った \mathcal{L}_2 上の接続による平行移動である。 $h_{\varphi(\{0\} \times \mathbf{R})}(\mathcal{L}_1): \mathcal{L}_{1,p} \rightarrow \mathcal{L}_{1,q}$ も同様。

補題 4 : $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi) \otimes T^{E(\varphi)}$ は φ のホモトピー類だけで決まる。

証明は補題 1 と同様である。さて、

$$n_{0,0}: \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(\mathcal{L}_{1,p}, \mathcal{L}_{2,p}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov} \rightarrow \bigoplus_{q \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(\mathcal{L}_{1,q}, \mathcal{L}_{2,q}) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda_{nov}$$

$$n_{0,0}(\mathbf{v}) = \sum_q \sum_{\varphi \in \mathcal{M}(L_1, L_2; p, q)_0} \exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi)(\mathbf{v}) \otimes T^{E(\varphi)} \quad (20)$$

で定義する。Gromovのコンパクト性定理を用いると、(20)の右辺は

$$\bigoplus_{q \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1,q}, L_{2,q}) \otimes_{\mathbf{C}} \Lambda_{nov}$$

に含まれることが分かる。

(20)と3で簡単に説明した m_k の構成をあわせると、 $n_{0,0}$ の一般化

$$\begin{aligned} n_{k,\ell} : \hat{B}_k C[1](L_1; \Lambda_{0,nov}) \otimes \left(\bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1,p}, L_{2,p}) \otimes_{\mathbf{C}} \Lambda_{nov} \right) \\ \otimes \hat{B}_\ell C[1](L_2; \Lambda_{0,nov}) \rightarrow \bigoplus_{p \in L_1 \cap L_2} \text{Hom}(L_{1,p}, L_{2,p}) \otimes_{\mathbf{C}} \Lambda_{nov} \end{aligned} \quad (21)$$

が次のように定義できる。 $\mathcal{M}(L_1, L_2; p, q; k, \ell)$ を $\mathcal{M}(L_1, L_2; p, q)$ の元 φ と $\{0\} \times \mathbf{R}$ 上の k この点の組 \bar{z} 、 $\{1\} \times \mathbf{R}$ 上の ℓ この点の組 \bar{w} からなる3つ組 $(\varphi, \bar{z}, \bar{w})$ 全体とする。これも \mathbf{R} の作用で割って商 $\bar{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q; k, \ell)$ を考える。さらに代入写像

$$ev : \bar{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q; k, \ell) \rightarrow L_1^k \times L_2^\ell$$

を

$$ev(\varphi, \bar{z}, \bar{w}) = (\varphi(z_1), \dots, \varphi(w_\ell))$$

で定義する。 $P_{1,1}, \dots, P_{1,k}$ を L_1 上のサイクル、 $P_{2,1}, \dots, P_{2,\ell}$ を L_2 上のサイクルとする。このとき

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q; k, \ell; P_{1,1}, \dots, P_{1,k}; P_{2,1}, \dots, P_{2,\ell}) \\ = \pm \bar{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q; k, \ell) \times_{ev} (P_{1,1} \times \dots \times P_{1,k} \times P_{2,1} \times \dots \times P_{2,\ell}) \end{aligned} \quad (22)$$

と定義し (符号は[FOOO]と太田氏の稿参照) , これを用いて

$$\begin{aligned} n_{k,\ell} \left((P_{1,1} \otimes \dots \otimes P_{1,k}) \otimes \mathbf{v} \otimes (P_{2,1} \otimes \dots \otimes P_{2,\ell}) \right) \\ = \sum_{q \in L_1 \cap L_2} \sum_{(\varphi, \bar{z}, \bar{w}) \in \bar{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q; k, \ell; P_{1,1}, \dots, P_{1,k}; P_{2,1}, \dots, P_{2,\ell})_0} \exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi)(\mathbf{v}) \otimes T^{E(\varphi)} \end{aligned} \quad (23)$$

と定める。(($\varphi, \bar{z}, \bar{w}$) $\in \bar{\mathcal{M}}(L_1, L_2; p, q; k, \ell; P_{1,1}, \dots, P_{1,k}; P_{2,1}, \dots, P_{2,\ell})_0$ の添え字の0は0次元の成分の和を意味する。) (23)(20)(19)で微分が定義される。

4. 局所族

3ではラグランジュ部分多様体の無限小族に対してフレアーホモロジーを考えた。そこでは、

$H^1(L; \mathbf{R})$ の元がラグランジュ部分多様体を動かす媒介変数だということ（ここでは述べなかったが、 $H^1(L; \sqrt{-1}\mathbf{R})$ の方は、直線束を動かす媒介変数に対応する）を根拠に、3の構成は（無限小）族のフレアーホモロジーに対応している、と述べたが、ラグランジュ部分多様体を実際に動かして考えていたわけではない。

この節からは、本当にラグランジュ部分多様体を動かして考えることにしよう。

まず設定を行う。フレアーホモロジーを考えるには、ラグランジュ部分多様体が2つ必要だが、簡単のため、その1つ L_0 は固定しておく。（その上の直線束 L_0 も固定しておく。）つぎに、もう一方については、族 $(L(\nu), \mathcal{L}(\sigma))$ を考える。ここで (ν, σ) は $\mathbf{R}^{2b} \cong H^1(L(0); \mathbf{C})$ の0の近傍の元とする。この族は次のようにして選ぶ。

前に述べたように、 $(L(0), \mathcal{L}(0))$ を少し動かした組 (L, \mathcal{L}) の2節~による同値類は、ハウスドルフ性を忘れて局所的に考えれば、 $H^1(L; \mathbf{C})$ で与えられ、その対応は以下の通りであった。Darboux-Weinsteinの定理により、 L の M での近傍は余接束 T^*L とシンプレクティック同型である。 $H^1(L; \mathbf{Z})$ の基底を実現する微分1形式を $e_1, \dots, e_{b_1(L)}$ とする。 $(\nu, \sigma) = (\nu_1, \dots, \nu_{b_1(L)}; \sigma_1, \dots, \sigma_{b_1(L)})$ に対して、

$$L(\nu) = \nu_1 e_1 + \dots + \nu_{b_1(L)} e_{b_1(L)} \text{ のグラフ} \quad (24)$$

$$\mathcal{L}(\sigma) = (L, \nabla(\sigma)) \quad (25)$$

$$\nabla(\sigma) = \nabla + 2\pi\sqrt{-1}(\sigma_1 e_1 + \dots + \sigma_{b_1(L)} e_{b_1(L)}) \quad (B=0 \text{ のとき}) \quad (26.1)$$

と選ぶ。 $B \neq 0$ の時は、次のようにする。まず $\varphi: L \times [0, 1] \rightarrow M$ を

$$\varphi(x, t) = x + t(\nu_1 e_1 + \dots + \nu_{b_1(L)} e_{b_1(L)}) \quad (27)$$

で定義する。（(27)の右辺は x での $t(\nu_1 e_1 + \dots + \nu_{b_1(L)} e_{b_1(L)})$ の値が表す T^*L の元と同一視される L の近傍の点のことである。）すると

$$\nabla(\sigma) = \nabla + 2\pi\sqrt{-1} \left(\sigma_1 e_1 + \dots + \sigma_{b_1(L)} e_{b_1(L)} + \int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial x}} \varphi^* B \right) \quad (26.2)$$

である。（第2項のおかげで曲率の条件 $F_{\nabla(\sigma)} = 2\pi\sqrt{-1}B|_{L(\nu)}$ が満たされる。）

こう選ぶと、 $(\nu, \sigma) \mapsto (L(\nu), \mathcal{L}(\sigma))$ は \mathbf{R}^{2n} と $\text{LAG}(M, \Omega)$ の (L, \mathcal{L}) の近傍との微分同相を与える。（ただし $\text{LAG}(M, \Omega)$ が (L, \mathcal{L}) の近傍でハウスドルフである場合。） (ν, σ) を動かす0の近傍を V としておく。

ここでは、ラグランジュ部分多様体とその上の接続付き複素直線束だけを動かした。あとのデータ、例えば相対スピン構造は、離散的なデータだから、 (ν, σ) を動かしても変わらないようにとれる。

この同相は、 $B \neq 0$ であるとき、 \mathbf{C}^n を \mathbf{R}^{2n} と普通に同一視する（ ν を実部 σ を虚部と見る）と、複素構造を保たないことに注意しておく。（ B が複素構造をゆがめる。）計算が面倒な読者は $B=0$ と読んで読んでも良い。

以下では L' と L は横断的であると仮定する。すると考える (ν, σ) の集合 V を小さく取り直すことにより、 L' と $L(\nu)$ はつねに横断的であるとしてよい。この条件は、本節のように局所的な族を考えているときは一般性を失うことなく仮定できるが、大域的な族を考えるときは仮定できない。（6節でこの点を議論する。）

さて、ここで構成したいのは、複素多様体 V の上の正則ベクトル束と正則準同型からなる複体、 $(CF((L_0, L_0), (L(\nu), \mathcal{L}(\sigma))), \delta)$ である。（ V には2節でいれた $\text{LAG}(M, \Omega)$ の複素構造から導かれる V の複素構造を与える）。これができれば、 V 上の接続層の圏の導来圏の対象ができたことに

まず、複素ベクトル束としては

$$CF((L_0, L_0), (L(v), L(\sigma))) = \bigoplus_{p(v) \in L_0 \cap L(v)} \text{Hom}(L_0|_{p(v)}, L(\sigma)|_{p(v)}) \otimes \Lambda_{nov} \quad (28)$$

ととる。左辺はフレアーホモロジーの（境界作用素をとるまえの）鎖複体である。したがって、族のフレアーホモロジーを決める鎖複体としてはこれが自然である。

(28)式について、いくつかの注意が必要である。まず第一に、 L' と $L(v)$ はつねに横断的であると仮定した。 V は単連結として良いから、すると、 $N = \#(L' \cap L)$ とすると、 v に連続的に依存する $p_1(v), \dots, p_N(v)$ がとれて、

$$L_0 \cap L(v) = \{p_1(v), \dots, p_N(v)\} \quad (29)$$

となる。したがって、(28)は実は自明な複素ベクトル束である。これは V は可縮にもとれるのだから当たり前である。

つぎに Λ_{nov} について述べる。 Λ_{nov} はフィルター付けを使って位相が入っているが、この位相を少し変える必要がある。位相は次の通り。

$$x_i = \sum_j a_{i,j} T^{\lambda_{i,j}} \in \Lambda_{nov}$$

とする。（普遍ノビコフ環の条件を満たしているとする。）これが $x = \sum_j T^{\lambda_j} \in \Lambda_{nov}$ に収束するとは、次の条件が満たされることを指す。

- (1) 任意の C に対して、 k が存在して、任意の j に対して、 $\lambda_{i,j} > C$ が成立する。
- (2) $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{i,j} = \lambda_j$.
- (3) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,j} = a_j$.

（ $a_{i,j}$ が0に収束するときこの定義は少し不正確だが、修正は容易なので略す。）もともとの位相で収束するためには、 $\lambda_{i,j}$ はあるところから i によらずに λ_j にならなければならない。もちろん収束べき級数を使うことができれば、このようなことを論じる必要はなくなる。

さて、つぎに(28)を正則ベクトル束にしたい。これにはもう一つのデータが必要である。すなわち、次のことを仮定する。

仮定2： もう一つのラグランジュ部分多様体 L_{st} （ここでは境界があっても良い）と、その上の接続付き複素直線束 L_{st} が存在して、次のことが成り立つ。

- (1) L_{st} の曲率は $2\pi\sqrt{-1}B$.
- (2) $L(v)$ と L_{st} は任意の v に対して一点で横断的に交わる。

例： $M \rightarrow N$ をファイバーがラグランジュ部分多様体であるようなファイバー束とする。（特異ファイバーがあってもよい。）このときファイバーはトーラス T^n である。族 $T^n(v)$ は $\text{Re } V \subseteq N$ として、 $v \in \text{Re } V$ のファイバーだとして良い。

$s: N \rightarrow M$ を切断とし（ $\text{Re } V$ 上の切断でこの目的には十分）、その像はラグランジュ部分多様体とする。この像のことを L_{st} とすれば仮定が満たされる。

注意： ミラー対称性に現れる特殊ラグランジュファイバー束の場合には、しばしば大域的な切断 $s: N \rightarrow M$ の存在が仮定されている。

さて, (L_{st}, L_{st}) の存在を前提に, (28) に正則構造を入れよう. それには, 正則な枠を決めてしまえばよい. (ここでの話は局所的である.) 一見では, $[p_i(v)]$, $i=1, \dots, N$ で良さそうだが, これはまずい. まず第一に $Hom(\mathcal{L}_0|_{p(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p(v)})$ 成分を決めないとこれは意味をなさない. さらに深刻なのが次の点である.

われわれは, フレーアの境界作用素 ∂ (および [FOOO] によるその修正版) の (v, σ) を動かした族を考えたい. このとき, ∂ の, 正則な枠で考えた係数が, 少なくとも素朴に考えて, $(v, \sigma) \in V$ の正則関数にならないと困る. それには, $[p_i(v)]$, $i=1, \dots, N$ なる単純な枠を少し修正しなければならない. (以下の構成は雑形が複素トラスの場合に [Fu3] でなされている.)

$s_i(0, 0) \in Hom(\mathcal{L}_0|_{p(0)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p(0)})$ を決めておき, これを (v, σ) の関数

$$s_i(v, \sigma) \in Hom(\mathcal{L}_0|_{p(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p(v)})$$

に拡張する. 以下 L は連結とする. $L(v)$ と L_{st} の交点を $p_0(v)$ とおく. $p_0(0)$ と $p_i(0)$ を結ぶ $L=L(0)$ の道 $l_{i,0}$ を選んでおく. これを決めると, $p_0(v)$ と $p_i(v)$ を結ぶ $L(v)$ の道 $l_{i,v}$ が v に滑らかに依存するようにとれる.

一方 $p_i(v)$ と $p_i(0)$ を結ぶ L' の道 $\gamma_{i,v}$ がとれ, 更に $p_0(v)$ と $p_0(0)$ を結ぶ L_{st} の道 $\gamma'_{i,v}$ がとれる. これらをうまくとれば, $l_{i,0}, l_{i,v}, \gamma_{i,v}, \gamma'_{i,v}$ の 4 本の和を境界とする面積の小さい円盤を v に滑らかに依存するようにとることができる. この円盤を $\psi_v: D^2 \rightarrow M$ と表す.

次に, v, σ を動かしたときのベクトル空間の族 $Hom(\mathcal{L}_{st}|_{p_0(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p_0(v)})$ を考える. これは V 上の複素直線束をなす. この束の自明化を決めておく. 自明化を決めると, その切断 $\mathbf{v}_{p_0(v)} \in Hom(\mathcal{L}_{st}|_{p_0(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p_0(v)})$ が決まる. $\mathbf{v}_{p_0(v)}$ はどこでも 0 にならない切断で, v を動かすとなめらかに動く.

$$s_i(v, \sigma) = \exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi)) \otimes T^{E(\varphi)} \left(h_{l_{i,v}}(\mathcal{L}(\sigma)) \circ \mathbf{v}_{p_0(v)}^{-1} \circ h_{\gamma'_{i,v}}(\mathcal{L}_{st}) \circ \mathbf{v}_{p_0(0)} \circ h_{l_{i,0}}(\mathcal{L}(0)) \circ s_i(0, 0) \circ h_{\gamma_{i,v}}^{-1}(\mathcal{L}') \right) \quad (30)$$

と定義する. 右辺に出てくる h はホロノミーのことで, たとえば $h_{\gamma'_{i,v}}(\mathcal{L}_{st})$ は道 $\gamma'_{i,v}$ に沿ったベクトル束 \mathcal{L}_{st} の接続のホロノミーである. 右辺が $Hom(\mathcal{L}_{st}|_{p_0(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p_0(v)})$ の元であることは容易にわかる.

(30) をもちいると, V 上のファイバーが $\bigoplus_{p(v) \in L_0 \cap L(v)} Hom(\mathcal{L}_0|_{p(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p(v)})$ であるベクトル束の自明化ができ, 従って (28) に正則束ベクトル束の構造が入る.

補題 5 : この正則ベクトル束の構造は円盤の族 $\psi_v: D^2 \rightarrow M$ や, 道の族 $\gamma_{i,v}, l_{i,0}, l_{i,v}, \gamma_{i,v}, \gamma'_{i,v}$ によらない.

補題の証明は [Fu3] の議論と実は殆ど同じである. ここでは与えない.

こうして, 形式的べき級数になってしまったが, とにかくフレーアホモロジーを決める鎖複体 (を構成するベクトル空間の族) に対しては, 正則構造を与えることができた.

さてそれでは境界作用素はどうであろうか. 境界作用素の定義は前の節で与えた. ここで大切なのは次の補題 6 である.

$p(v), q(v) \in L_0 \cap L(v)$ という, v に連続に依存する 2 点の族をとっておく.

$\psi_0: D^2 \rightarrow M$ なる写像をとり, これが条件 3 の (1)(2) を $L_0, L(0), p(0), q(0)$ に対して満たしているとする. これを連続に拡張して, $\psi_v: D^2 \rightarrow M$ なる, 条件 3 の (1)(2) を $L_0, L(v), p(v), q(v)$ に対し

て満たす写像の族を作る.

補題 6 :

$$\begin{aligned} \exp(2\pi\sqrt{-1}B(\psi_v))H(\psi_v) \otimes T^{E(\psi_v)} : \text{Hom}(\mathcal{L}_{0,p(v)}, \mathcal{L}_{1,p(v)}) \otimes \Lambda_{nov} \\ \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{L}_{0,q(v)}, \mathcal{L}_{1,q(v)}) \otimes \Lambda_{nov} \end{aligned}$$

は V 上の正則ベクトル束 $\text{Hom}(\text{Hom}(\mathcal{L}_{0,p(v)}, \mathcal{L}_{1,p(v)}), \text{Hom}(\mathcal{L}_{0,q(v)}, \mathcal{L}_{1,q(v)})) \otimes \Lambda_{nov}$ の正則な切断を与える. ここで, T には本来 e を代入すべきものである, ということを念頭に置いて,

$$\frac{\partial}{\partial v} T^{\lambda(v)} = \frac{\partial \lambda(v)}{\partial v} T^{\lambda(v)}$$

と定義している.

証明は定義を見比べればすぐに行える. 実はこの補題が成り立つようにいろいろと定義を決めてきたのである. [Fu3]にはほぼ同様な命題の証明があるので, 補題 6 の証明は説明しない.

補題 6 の $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\psi_v))H(\psi_v) \otimes T^{E(\psi_v)}$ は前の節で定義した境界作用素の重みであった. さて, 補題 6 から境界作用素が, v に正則に (複素解析的に) 依存する, と言っていいであろうか. 実はそうではない. この点がこの原稿の最重要点であるので, それは次の節に述べる. ここでは, もし, 境界作用素が (v, σ) に正則に依存すればどうなるかを述べておく.

境界作用素を ∂_v と書く . . . というのは正しくない. なぜならこれは v 以外にいろいろなものによるからである. そこで $\partial_{v,\sigma,b}$ と書くべきであろう. $b \in \mathcal{M}(L(v), \mathcal{L}(\sigma))$ である. 本当は $\mathcal{M}(L_0, \mathcal{L}_0)$ の元にもよるが, これは止めておく.

そこで, $b(v, \sigma) \in \mathcal{M}(L(v), \mathcal{L}(\sigma))$ が (v, σ) になめらかに依存するようにとれ, $\partial_{v,\sigma,b(v,\sigma)}$ が

$$\text{Hom}(\text{Hom}(\mathcal{L}_{0,p(v)}, \mathcal{L}_{1,p(v)}), \text{Hom}(\mathcal{L}_{0,q(v)}, \mathcal{L}_{1,q(v)}))$$

の正則な切断を与えていると仮定しよう. このとき,

$$\partial_{v,\sigma,b(v,\sigma)} : CF((L_0, \mathcal{L}_0), (L(v), \mathcal{L}(\sigma))) \rightarrow CF((L_0, \mathcal{L}_0), (L(v), \mathcal{L}(\sigma))) \quad (31)$$

を (v, σ) を動かして考えると, V 上の正則ベクトル束とその間の正則準同型を作る複体になる. この複体が定める, V 上の連接層の圏の導来圏の対象が, 族のフレアーホモロジーであるべきであろう. もちろん上でした仮定は一般には成立しない. 成立しない理由がはまさしく量子効果なのである.

5. フレアーホモロジーの壁越え

さて(31)が正則な切断にならない理由を説明しよう. 2つの問題点がある.

- (1) $b(v, \sigma)$ が (v, σ) に「正則」に依存性するようにとれるか.
- (2) そうとったとき(31)が正則になるか.

$b(v, \sigma)$ が属する $\mathcal{M}(L(v), \mathcal{L}(\sigma))$ は, 組 $(L(v), \mathcal{L}(\sigma))$ の量子化された無限小モジュライ空間であった. これが本当に (無限小でなく) (v, σ) を動かしたときどう変わっていくかという問題が(1)である. モジュライの一般的な考え方からある程度見当がつく部分が多いが, 1つ基本的な問題点がある. それは, $\mathcal{M}(L(v), \mathcal{L}(\sigma))$ を定義するのに基本的である作用素 m_k が, (v, σ) を動かすとき連続 (あるいは正則) に動かず, ジャンプする, という問題点である. この問題点以外は, (1)はモジュライ空間

の一般的な考え方で理解可能である。この問題点は、(2)と同根である。

そこで、以下では(1)は忘れて(2)だけを論じる。このために次の比較的強い仮定をおく。

仮定3： どの v に対しても、 $L(v)$ を境界値に持つ概正則円盤は自明なもの（定値写像）しかない。

この仮定ははずせると思われるが、それには、変形の一般論に関わることをいろいろ考えなければならぬので、いまは仮定しておく。

さてすると m_k は全部0である。というのは嘘で、普通のカップ積、より正確には、それをチェインレベルで定義するのに A_∞ 代数化したもの（定理1）がのこる。しかし、 $m_0 = 0$ はそれでも正しい。そこで $b(v, \sigma) \equiv 0$ とおくことができる。こうすることで、以下この節では、(31)の $\partial_{v, \sigma, b(v, \sigma)}$ は $\partial_{v, \sigma}$ と書く。

というわけで、問題が(31)の正則性に戻ってきた。ここで3で与えた $\partial_{v, \sigma}$ の定義を思いだそう。ここでは $b(v, \sigma) \equiv 0$ なので、必要なのは(20)式の $n_{0,0}$ だけである。つまり

$$\partial_{v, \sigma}(v) = \sum_q \sum_{\varphi \in \mathcal{M}(L_0, L(v); p(v), q(v))_0} \exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi)(v) \otimes T^{E(\varphi)}. \quad (32)$$

かくして我々の問題は(32)の右辺が v, σ について正則か、になった。補題6によれば、各項の係数 $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi)(v) \otimes T^{E(\varphi)}$ は v, σ について正則である。しかし、じつは、

観察： (32)項の数、すなわち $\mathcal{M}(L_0, L(v); p(v), q(v))_0$ の元の数、より正確には、あるホモトピー類に属する元の数⁴は、 v を動かすと一般にはジャンプする。

この現象を、4次元ゲージ理論でのDonaldson不変量に対してDonaldsonが見いだした同様の現象[Do]にならって、フレアーホモロジーの壁越え（wall crossing）とよぶ。壁越えが実際に起こる例は、[FOOO]のChapter 7で与えられている。

ここでは、壁越えが族のフレアーホモロジーになにを意味するかを述べたい。そのためにモジュライ空間 $\mathcal{M}(L_0, L(v); p(v), q(v))$ の族を考察しよう。すなわち

$$\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para) = \bigcup_v \mathcal{M}(L_0, L(v); p(v), q(v)) \times \{v\}$$

を考える。すると

$$\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para) \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (\varphi, v) \mapsto v$$

という写像が得られる。 $\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)$ は有限次元である。ここでは、 $\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)$ は有限次元の角付き多様体であると仮定する。（倉西構造の理論[FO]をつかえば、言葉を少し換えるだけでこの仮定をしなくても、以下の議論をそのまま正当化できる。） $\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)$ の次元は成分ごとに異なる。 $n-k$ 次元の成分を集めたものを、 $\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}$ と書くことにする。 σ の方は、モジュライ空間の定義には現れないが、これを人工的に入れておく。つまり

$$\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}}^+ = \mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k} \times \sqrt{-1}\mathbf{R}^n$$

とおく。

⁴単に項の数だと、普通は無限大である。

$$\pi : \mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}}^+ \rightarrow V \quad (33)$$

なる写像が得られる。さて、 $Hom(\mathcal{L}_0|_{p(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p(v)}) \otimes \Lambda_{0, nov}$ が p でのファイバーであるベクトル束を、 π で $\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}}^+$ に引き戻す。すると

$$(\varphi, v) \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi) \otimes T^{E(\varphi)}$$

はこの束の切断を与える。これを、 $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi) \otimes T^{E(\varphi)}$ とかく。さて $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi) \otimes T^{E(\varphi)}$ と(33)をつかって、

$$B_{p,q}^k \in W^{-\infty}\left(V, Hom(\mathcal{L}_0|_{p(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p(v)}) \otimes \Lambda^k(V)\right) \otimes \Lambda_{0, nov}$$

を定義したい。ここで $\Lambda^k(V)$ は微分 k 形式のベクトル束で $\Lambda_{0, nov}$ は普遍ノビコフ環、 $W^{-\infty}$ は超関数 (Distribution) 値の切断を表す。

$B_{p,q}^k$ の定義は次の通りである。 Ψ を $Hom(\mathcal{L}_0|_{p(v)}, \mathcal{L}(\sigma)|_{p(v)})$ の双対に値を持つ、 $n-k$ 次の微分形式とし、滑らかかつコンパクト台を持つとする。このとき

$$\int_V \langle B_{p,q}^k \wedge \Psi \rangle = \int_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}}^+} \langle \exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi), \pi^*\Psi \rangle \otimes T^{E(\varphi)} \quad (34)$$

と定義する。(34)の雛形は[Fu3]に現れている。)

言い換えると、 $B_{p,q}^k$ は余次元 k の部分多様体である $\pi\left(\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}}^+\right)$ が定める超関数に、 $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi) \otimes T^{E(\varphi)}$ をかけたものである。ただしこの言い方は不正確である。なぜなら $\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}}^+$ はコンパクトでなく、従って超関数は定めないからである。しかし、重み $\exp(2\pi\sqrt{-1}B(\varphi))H(\varphi) \otimes T^{E(\varphi)}$ を考えると、普遍ノビコフ環の定義より、 $\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{\mathcal{M}(L_0, L; p, q; para)_{-k}}^+$ のエネルギー有界な元の集合がコンパクトであることを示せば十分であることが分かる。したがって、Gromovのコンパクト性定理により、定義(34)は意味を持つ。

さて複素多様体 V 上の「微分 k 形式」 $B_{p,q}^k$ を、 k を正則反正則に分ける普通のやり方で分解し、その、 $0, k$ 成分を $B_{p,q}^{0,k}$ と表す。

これらを合わせて、超関数値のかけ算作用素

$$\begin{aligned} B \wedge : \bigoplus_{k+t=m} (CF^t((L_0, L_0), (L(v), \mathcal{L}(\sigma)))) \otimes \Lambda^{0,k}(V) \\ \rightarrow \bigoplus_{k+t=m+1} (CF^t((L_0, L_0), (L(v), \mathcal{L}(\sigma)))) \otimes \Lambda^{0,k}(V) \end{aligned}$$

がえられる。

$$\text{定理 4 : } (\bar{\partial} + B \wedge) \circ (\bar{\partial} + B \wedge) = 0.$$

注意： B は超関数値であるから、定理の主張中の合成ができることは微妙な問題であるが、写像(33)たちの間の横断正則性を、エネルギーについての帰納法で確立することにより、証明できる。その議論は[FOOO] Chapter 5と本質的に同じである。

定理4の証明はここでは省略する。本質的にはフレアーホモロジーの境界作用素が2回合成すると0になるという性質（この節の始めにおいた仮定のもとでは成立する、一般には不成立で3節で述べた議論がこれを補っている）の証明の、族の場合の類似物である。

注意：壁越えが発見されたのはゲージ理論が最初であったが、そこでも4次元多様体の族のゲージ理論を考えることが出来る。これは、4次元多様体の微分同相の群のコホモロジーをゲージ理論で調べることになる。するとやはり壁越えが現れ、現れる条件は、単独の4次元多様体不変量に対する場合（2次のコホモロジー上のカップ積の正の固有値が1の場合）より緩い。すなわち2次のコホモロジー上のカップ積の正の固有値が k とすると、 k 次元の族ぐらいから現れる。この現象をうまく解析できれば、不定値のテータ関数などが現れると思われる。（[Fu3]を[GZ]あたりと読み比べてみるとそんな気がしてくると思う。）これはKotchik-Morgan予想[KM]などとも関わっていると思うのだが、研究しようと思っ（5年ぐらい前から）思っていてまだその機会がもてないでいる。族のゲージ理論を4次元多様体に実査に応用して見せた論文を、筆者は壁越えを発見したDonaldsonのものと論文[Do]以外は知らない。（ここではK3曲面の微分同相群の π_0 の研究に応用されている。）

定理4により、 V 上の正則ベクトル束とその間の（正則関数のかけ算と可換な）作用素の作る微分複体が出来たことになる。これで V 上の導来圏の対象が出来たかということ、まだ問題がある。

未解決問題⁵ T に十分小さい正の数を代入すれば、 B は収束し、 $\bar{\partial} + B\wedge$ は

$$\bigoplus_{k+\ell=m} \overline{CF}^{\ell}((L_0, L_0), (L(v), L(\sigma))) \otimes \Lambda^{0,k}(V) \rightarrow \bigoplus_{k+\ell=m+1} \overline{CF}^{\ell}((L_0, L_0), (L(v), L(\sigma))) \otimes \Lambda^{0,k}(V)$$

としてwell definedである。ここで

$$\overline{CF}^{\ell}((L_0, L_0), (L(v), L(\sigma))) = \bigoplus_{p(v) \in L_0 \cap L(v)} \text{Hom}(L_0|_{p(v)}, L(\sigma)|_{p(v)}).$$

これが出来ないと、最後まで形式べき級数で論じることになり、困難が大きい。

注意：今年（2000年）7月Ecole Polytechniqueで行われたセミナーで、Kontsevitchはこのような収束問題はBerkovich scheme(例えば[Be]参照)を用いることにより解決できるであろう、それによってホモロジー的ミラー対称性はかなりの部分で証明できるであろう（例えばトーラスの場合）、と述べた。

もう一点、こっちはほぼ解決積みの問題点を指摘しておく。それは B が超関数であることに関わる。すなわち、たとえばうへの未解決問題が解けたとして、微分作用素の列

$$\begin{aligned} \bar{\partial} + B\wedge : \bigoplus_{k+\ell=m} \overline{CF}^{\ell}((L_0, L_0), (L(v), L(\sigma))) \otimes \Lambda^{0,k}(V) \\ \rightarrow \bigoplus_{k+\ell=m+1} \overline{CF}^{\ell}((L_0, L_0), (L(v), L(\sigma))) \otimes \Lambda^{0,k}(V) \end{aligned}$$

から、 \mathcal{O}_V (V の構造層)の上の加群層の複体を得る上での問題点である。もし、 B が滑らかならば、無限回微分可能切断の層

$$U \mapsto C^{\infty}\left(U; \bigoplus_{k+\ell=m} \overline{CF}^{\ell}((L_0, L_0), (L(v), L(\sigma))) \otimes \Lambda^{0,k}(V)\right) := C^m(U)$$

をとり、この層の間の写像

$$\bar{\partial} + B\wedge : C^m(U) \rightarrow C^{m+1}(U) \tag{34}$$

⁵1991頃来日したKontsevichと雑談中、グロモフ・ウィッテンポテンシャルの話になり、ところでそれは収束するのか、と聞いた。フムと話がとぎれて、その後の講演では収束性は予想として述べられた。それから10年近くたつが、収束性は計算ができていない場合以外は証明されていない。ここでの収束性もグロモフウィッテンポテンシャルの収束性と同根である。

を考えればよい。これは \mathcal{O}_V の上の加群層の複体になり、楕円型であるから、コホモロジー層は接続である。

しかし、ここでは B は超関数であるから、(34) は実は定義されない。この解決策は次の通りである。 B を滑らかな微分形式 B' で近似し、 $\bar{\partial} + B \wedge$ と $\bar{\partial} + B' \wedge$ がチェインホモトピックであるようにする。 $\bar{\partial} + B' \wedge$ を使えば、(34) が定まり、従って層の複体ができる。

今の状況下では、収束性に関する上記の未解決問題さえ解ければ、この方針でうまくいくと思われる。実際[Fu3]の最後の章では、この議論の雛形が実行されている。

以上この節は多くの部分が未完成であるが、局所的な族のフレアーホモロジーについて、筆者の持っている部分的なアイデアと問題点の概要である。

V は 0 の小さい近傍であるから、その上の接続層の導来圏の対象ととっても、そのものとしては、そんなに深いものではないであろう。

注意：ただし、量子化したあとのラグランジュ部分多様体のモジュライ空間 $\mathcal{L}AG(M, \Omega)$ に特異点がある場合は、その近傍での局所理論は深いであろう。この節では $L(v)$ を境界値に持つ概正則円盤は自明なもの（定値写像）しかないと仮定したから、そういう場合は現れない。その意味ではこの仮定をはずした局所理論は面白いかもしれない。

そこで、次の節で、張り合わせについて論じ、大域理論への端緒をしめして、この稿を締めくくりたい。

6. 導来圏の対象の張り合わせと A_∞ 構造

この節では大域的な問題を検討しよう。話を明確化するために状況を限定する。 $\pi: M \rightarrow N$ をシンプレクティック多様体 M から N への（特異）ファイバー束とし、ファイバーはラグランジュ部分多様体とする。さらに、 M に B 場 B があるときは、ファイバーへの B の制限も 0 とする。ファイバーを $L_v = \pi^{-1}(v)$ とおく。

Strominger-Yau-Zaslow[SYZ]によれば、 M のミラー M^\vee は、この状況下では、

$$M^\vee = \{(v, \sigma) \mid v \in N, \sigma \in R(L_v)\} \quad (35)$$

で与えられる。ここで $R(L_v)$ は L_v 上の複素平坦直線束全体のモジュライ空間である。(35) は $\pi: M \rightarrow N$ が特異ファイバー L_v を持つときは、 v の近傍でより精密な考察を要する。その点にはここではふれないので、以下の議論がそのまま適用できるのは、 $M = T^{2n}$ の場合に限られるであろう。しかし、何らかの修正（それは序 2 の(F)で述べた問題点とかかわる）を施して実行する可能性があるため、以下記号などは一般の形で書いておく。 M^\vee はモジュライ空間 $\mathcal{L}AG(M, \Omega)$ の連結成分である。

$s: N \rightarrow M$ を大域的な切断とし、 $s(N)$ はラグランジュ部分多様体で、 B 場も消えているとする。 (L_0, \mathcal{L}_0) を条件 1 を満たす組とする。さらに、 $b_0 \in \mathcal{M}(L_0, \mathcal{L}_0)$ とする。さて、族のフレアーホモロジー $HF((L_0, \mathcal{L}_0, b_0), (L(v), \mathcal{L}(\sigma)))$ を $(v, \sigma) \in M^\vee$ を動かして考えたい。その理由は次の予想である。

予想：組 (L_0, \mathcal{L}_0) のホモロジー的ミラー対称性におけるミラー（に当たる M^\vee の導来圏の対象）は、族のフレアーホモロジー $HF((L_0, \mathcal{L}_0, b_0), (L(v), \mathcal{L}(\sigma)))$ が定める、 M^\vee 上の接続層の圏の導来圏の対象 $E(L_0, \mathcal{L}_0, b_0)$ である。

この予想は、たとえば、次の同型を意味する。

$$HF((L_0, \mathcal{L}_0, b_0), (L_1, \mathcal{L}_1, b_1)) \cong \text{Ext}(\mathcal{E}(L_0, \mathcal{L}_0, b_0), \mathcal{E}(L_1, \mathcal{L}_1, b_1)).$$

予想の証明を試みる前に、族のフレアーホモロジー $HF((L_0, \mathcal{L}_0, b_0), (L(v), \mathcal{L}(\sigma)))$ を定義しなければならない。このための諸考察を説明するのが、この節の目的である。

さて、前の節までで述べた族のフレアーホモロジーの局所的な構成を思い出そう。いくつかの仮定の下で議論していた。まず、仮定 3 はおいてしまう、すなわち、 $L(v)$ を境界値にもつ概正則円盤は定値写像に限られるとする。

注意：この仮定は、 $M = T^{2n}$ の時は成り立っている。おそらくこの場合が、以下の議論が大きな変更なく適用出来る可能性のある唯一の例であろう。ほかの場合は 2 節の問題点 (F)、(本稿では議論しなかった) を考慮しなければならない。

このことを仮定しても、まだ一つ問題点がある。すなわち、 L_0 と $L(v)$ の交わりの横断正則性である。5, 6 節では横断正則性の仮定の下で考えていた。局所的な族のフレアーホモロジーの考察には、必要なら L_0 をハミルトン同相で動かして、 L_0 と $L(v)$ の交わりの横断正則性を仮定しても一般性を失わない。しかし大域的な族のフレアーホモロジーの考察には、そうはいかない。 L_0 と $L(v)$ の交わりが常に横断正則的なのは、 L_0 がある切断 $N \rightarrow M$ の像である場合だけである。これでは少し狭いので、この仮定ははずしたい。それには次のように考えればよい。

補題 7 : $(L_0, \mathcal{L}_0) \sim (L_0^{(i)}, \mathcal{L}_0^{(i)})$ なる $(L_0^{(i)}, \mathcal{L}_0^{(i)})$, $i = 1, \dots, m$, および, $N = \bigcup_i V_i$ なる被覆が存在し, $v \in V_i$ ならば, $L_0^{(i)}$ と L_v は横断的である。

補題の証明はほとんど明らかである。

$M_i^\vee = \pi^{-1}(V_i)$ とおく。ここで $\pi: M^\vee \rightarrow V$ である。 $M^\vee = \bigcup_i M_i^\vee$ である。5, 6 節の構成がうまくいけば, M_i^\vee 上の接続層の圏の導来圏の対象, すなわち族のフレアーホモロジー

$$HF^*((L_0^{(i)}, \mathcal{L}_0^{(i)}), (L(v), \mathcal{L}(\sigma))) \rightarrow M_i^\vee \quad (36)$$

が, 定まっていることになる。したがって, 我々の問題は次のようにまとめられる。

問: X を複素多様体とし, $X = \bigcup_i X_i$ を開被覆とする。 X_i 上の接続層の圏の導来圏の対象 E_i があるとする。このとき, X 上の接続層の圏の導来圏の対象であって, その X_i への制限が E_i とホモトピー同値になるものがあるか。

以下この問いへの答えがあるための十分条件を説明し, さらに (36) の場合にこの十分条件が満たされることを説明したい。

構成の考え方を示すために, $X = X_1 \cup X_2$ の場合を説明しよう。 E_1 の $X_1 \cap X_2$ への制限と E_2 の $X_1 \cap X_2$ への制限が, 導来圏の対象として同型である, というのがこの場合の条件である。 E_i を表す接続層の複体を取り, 同じ記号で表す。 $\varphi_{1,2}: E_1|_{X_1 \cap X_2} \rightarrow E_2|_{X_1 \cap X_2}$ を鎖写像とし, ホモロジーに同型を導くと仮定する。写像柱 $\text{Cyl}(E_1, E_2; \varphi_{1,2})$ を考える。すなわち,

$$\text{Cyl}(E_1, E_2; \varphi_{1,2}) \cong E_1|_{X_1 \cap X_2} \oplus E_2|_{X_1 \cap X_2} \oplus E_1|_{X_1 \cap X_2}[-1] \quad (37)$$

とし, 境界作用素は

$$\delta(x_1, x_2, x_{1,2}) = (\delta x_1 + (-1)^{\deg x_{1,2}} x_{1,2}, \delta x_2 + (-1)^{\deg x_{1,2}} \varphi_{1,2}(x_{1,2}), \delta x_{1,2}) \quad (38)$$

とおく. X 上の接続層の鎖複体 E を, $p \in X_1 - (X_1 \cap X_2)$ での芽が E_1 の芽に, $p \in X_2 - (X_1 \cap X_2)$ での芽が E_2 の芽に, $p \in X_1 \cap X_2$ での芽が $Cyl(E_1, E_2; \varphi_{1,2})$ の芽に一致するようにとることができる. これが求めるものである.

$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ の場合はどうか. この場合の十分条件は, 3つの鎖写像 $\varphi_{1,2}: E_1|_{X_1 \cap X_2} \rightarrow E_2|_{X_1 \cap X_2}$, $\varphi_{2,3}: E_2|_{X_2 \cap X_3} \rightarrow E_3|_{X_2 \cap X_3}$, $\varphi_{1,3}: E_1|_{X_1 \cap X_3} \rightarrow E_3|_{X_1 \cap X_3}$ があって, $\varphi_{2,3} \circ \varphi_{1,2}$ が $\varphi_{1,3}$ に $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ に鎖ホモトピックである, という条件である.

この条件を X_i の数が任意の場合に一般化しようとする, 鎖ホモトピーの間の鎖ホモトピー等々を考える必要がある. A_∞ 構造はこのような考察に便利のように最初から作られている.

さて, 求める条件を書き下そう. (C_i, δ_i) , $i=1, \dots, m$ を鎖複体とし, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, $k=1, 2, \dots$ に対して, 次数を保つ準同型写像

$$\varphi_{i_1, \dots, i_k}: C_{i_1} \rightarrow C_{i_k} [2-k]$$

が与えられているとする.

条件4: $\varphi_i = \delta_i$ で, かつ次の式が成り立つ.

$$\sum_{\ell=1}^k \varphi_{i_1, \dots, i_k} \circ \varphi_{i_1, \dots, i_\ell} + \sum_{\ell=2}^{k-1} \pm \varphi_{i_1, \dots, \hat{i}_\ell, \dots, i_k} = 0.$$

第2項の \hat{i}_ℓ は慣習通りこの部分をのぞくことを意味する. 符号については後で述べる.

たとえば, $k=3$ の場合には, 条件4は

$$\delta_3 \varphi_{1,2,3} \pm \varphi_{1,2,3} \delta_1 \pm \varphi_{2,3} \circ \varphi_{1,2} \pm \varphi_{1,3} = 0$$

である. これは合成 $\varphi_{2,3} \circ \varphi_{1,2}$ が $\varphi_{1,3}$ と鎖ホモトピックで, そのホモトピーが $\varphi_{1,2,3}$ である, という条件と同値である.

さて, 条件4のもとで, 多重写像柱, $Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*)$ を定義しよう. まず加群としては

$$C_{i_1, \dots, i_k} = C_{i_1} [k-1], \quad Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} C_{i_1, \dots, i_k}$$

とおく. 境界作用素 δ は次のように定義される.

$$\delta(C_{i_1, \dots, i_k}) \subseteq \bigoplus_{\ell=1}^k C_{i_1, \dots, i_\ell} \oplus \bigoplus_{\ell=2}^k C_{i_1, \dots, \hat{i}_\ell, \dots, i_k}$$

で, さらに, $x \in C_{i_1, \dots, i_k}$ に対して,

$$\delta(x) \text{ の } C_{i_1, \dots, i_\ell} \text{ 成分は } \pm \varphi_{i_1, \dots, i_\ell}(x), \quad \delta(x) \text{ の } C_{i_1, \dots, \hat{i}_\ell, \dots, i_k} \text{ 成分は } \pm x. \quad (39)$$

δ が次数1であることは容易にわかる.

補題 8 : 条件 4 と $\delta\delta = 0$ とは同値である.

証明は容易である.

この多重写像柱は, 写像柱を作る構成を繰り返して行えばできる. すなわち

補題 9 : $Cyl(C_1, \dots, C_{m-1}; \varphi_*)$ から C_m への鎖写像 ψ があり, $Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*)$ はその写像柱である.

証明: $C_{i_1, \dots, i_k} \subseteq Cyl(C_1, \dots, C_{m-1}; \varphi_*)$ に対して, ψ の $C_{i_1, \dots, i_k} \rightarrow C_m$ 成分を $\varphi_{i_1, \dots, i_k, m}$ で定義する. これが, 鎖写像であることは条件 4 から容易に確かめられる. その写像柱が $Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*)$ であることも, 定義からほぼ明らかである. 証明終わり

ここで条件 4, (39)の符号について述べる. (39)の符号は補題 9 が符号を含めて成立するように選ぶ. (ふつうの写像柱の場合の符号はよく知られている.) また, 条件 4 の符号は, このとき, 補題 9 が符号も含めて成立するように選ぶ. 具体的に書き下せると思うが, まだ筆者は計算していない.

さて, 補題 9 より次のことがわかる. $I_i: (C_i, \delta_i) \rightarrow (Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*), \delta)$ なる鎖写像を, $Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*)$ の成分 C_i への同型とする.

補題 10 : $(C_i, \delta_i) \rightarrow (Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*), \delta)$ は (コ) ホモロジーに同型を導く. また,

$$I_i: (C_i, \delta_i) \longrightarrow (Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*), \delta)$$

と合成

$$(C_i, \delta_i) \xrightarrow{\varphi_{i,j}} (C_j, \delta_j) \xrightarrow{I_j} (Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*), \delta)$$

がコホモロジーに導く写像は一致する.

証明: 補題 9 より, 前半は, $m=2$ の時示せば十分であるが, この場合はよく知られている. 後半は, $x \in C_i$ にたいして, $H(x) = x \in C_{i,j}$ とおくと,

$$\delta H \pm H \delta_i = I_i \pm I_j \circ \varphi_{i,j}$$

となることから, わかる.

証明終わり

さらに一般に次のこともわかる. $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ に対して, 多重写像柱 $(Cyl(C_{i_1}, \dots, C_{i_k}; \varphi_*), \delta)$ をつくる. すると, $Cyl(C_{i_1}, \dots, C_{i_k}; \varphi_*)$ は $Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*)$ の直和因子であるから, $I_{i_1, \dots, i_k}: (Cyl(C_{i_1}, \dots, C_{i_k}; \varphi_*), \delta) \rightarrow (Cyl(C_1, \dots, C_m; \varphi_*), \delta)$ が存在する. この写像は, 補題 10 より, ホモロジーに同型を導く. さらに, これら多くの埋め込みの合成の間に, チェインホモトピー同値が存在し, それらは, 「高次の部分も込めて」, お互いに整合的である.

さて以上をまとめると, 次の定理が得られることになる.

定理 5 : $X = \bigcup X_i$ を複素多様体 X の開被覆をとし, E_i を X_i 上の連接層の複体とする.

$\varphi_{i_1, \dots, i_k} : E_{i_1} \Big|_{X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}} \rightarrow E_{i_k} \Big|_{X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}} [2-k]$ を層の準同型とし、条件3が満たされるとする。このとき、 X 上の接続層の複体 E と、層の複体の間のホモロジーに同型を導く鎖写像 $\vartheta_i : (E_i, \delta_i) \Big|_{X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_m}} \rightarrow (E, \delta)$ があり、 ϑ_i は合成 $\vartheta_j \circ \varphi_{i_1, \dots, i_j}$ と鎖ホモトピー同値である。

証明： E を $p \in X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}$ での芽が、 $(\text{Cyl}(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}; \varphi_*, \delta))$ であるような層とする。（そのような層を作るには、補題10をつかう。）これが求めるものであることは、補題9からわかる。

証明終わり

さて、族のフレアーホモロジー(36)が定理5の仮定を満たすことを証明しよう。すなわち、層の複体の準同型

$$\varphi_{i_1, \dots, i_k} : CF^*((L_0^{(i_1)}, \mathcal{L}_0^{(i_1)}), (L(v), \mathcal{L}(\sigma))) \rightarrow CF^*((L_0^{(i_k)}, \mathcal{L}_0^{(i_k)}), (L(v), \mathcal{L}(\sigma))) [2-k] \quad (40)$$

$((v, \sigma) \in X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k})$ を条件4が満たされるように構成しよう。

まずアイデアを述べる。たとえば、 $\varphi_{i,j}$ は、フレアーホモロジーがラグランジュ部分多様体のハミルトン同相で不変である、という性質から作ることができる。 $\varphi_{i_1, \dots, i_k}$ の存在は、このフレアーホモロジーの同型が、ホモトピーの意味で、いくらでも高次の整合性をもっている、ということを示している。

さて、(40)の構成をもう少し述べる⁶。ラグランジュ部分多様体が m 個 $(L_0^{(1)}, \dots, L_0^{(m)})$ あるという設定で始めた。1個でなく m 個とったのは、横断正則性のためであった。従って、これら m 個はすべてお互いに十分近いとしてよい。さらに摂動のパラメータ空間が可縮であることを考えると、この m 個を連続な族でつなぐことができる。より正確には、次の補題11が成り立つ。 Δ^{m-1} を $m-1$ 次元の単体とする。その頂点を v_1, \dots, v_m とおく。

補題11： なめらかな写像 $\Phi : \Delta^{m-1} \times L_0 \rightarrow M$ と接続付き複素直線束 $L_0 \rightarrow \Delta^{m-1} \times L_0$ が存在して、次の性質を満たす。

- (1) 任意の $x \in \Delta^{m-1}$ に対して、 Φ の $\{x\} \times L_0$ への制限は、ラグランジュ埋め込みである。
- (2) 任意の Δ^{m-1} の道 $x(t)$ に対して、 $p \in L_0 \mapsto \frac{d}{dt} \Phi(x(t), p) \Big|_{t=0}$ は M のハミルトンベクトル場から導かれる。
- (3) $L_0 \rightarrow \Delta^{m-1} \times L_0$ の曲率は、 $2\pi\sqrt{-1}\Phi^*B$ である。
- (4) Φ および L_0 の $\{v_i\} \times L_0$ への制限は、 $(L_0^{(i)}, \mathcal{L}_0^{(i)})$ に一致する。

証明は容易である。さてこの族をつかって(40)を構成するのだが、もう一つ補題が必要である。 $\Omega(v_i, v_j; \Delta^{m-1})$ を v_i, v_j を結ぶ Δ^{m-1} の道全体の集合とする。 Δ^{m-1} を $v_1, \dots, \hat{v}_l, \dots, v_m$ を頂点とする Δ^{m-1} の面とする。道の合成で

$$\Omega(v_1, v_l; \Delta^{l-1}) \times \Omega(v_l, v_m; \Delta^{m-l}) \rightarrow \Omega(v_1, v_m; \Delta^{m-1}) \quad (41)$$

なる写像がある。（パラメータの付け方についての議論はここではごまかす。）(41)では $\Omega(v_l, v_m; \Delta^{m-l})$ の Δ^{m-l} の頂点は v_l, \dots, v_m と見なしている。

補題12： $\Omega(v_1, v_m; \Delta^{m-1})$ の $m-1$ 次元角付き部分多様体 $W(v_1, v_m; \Delta^{m-1})$ で、次の性質を満たすものが存在する。

⁶アブストラクトとしては、この構成まで書くのは少しやりすぎだが、ちゃんと論文に書ける日がいつ来るか、不安であるので書いておく。

$$\partial W(v_1, v_m; \Delta^{m-1}) = \bigcup_{\ell=2}^{k-1} (W(v_1, v_\ell; \Delta^{\ell-1}) \times W(v_\ell, v_m; \Delta^{m-\ell})) \cup \bigcup_{\ell=2}^{k-1} W(v_1, v_m; \Delta_\ell^{m-1}). \quad (42)$$

証明： おおのこの k に対して、 Δ^{m-1} 上のモース関数 g_m で次の性質をもつものが存在する。

- (1) g_m の各面への制限は g_{m-1} に一致する。
- (2) g_m の臨界点は頂点 v_1, \dots, v_m である。またこれらの臨界点はすべて非退化である。
- (3) v_i でのモース指数は $i-1$ である。

v_1, v_m を結ぶ g_m の積分曲線全体を $W(v_1, v_m; \Delta^{m-1})$ とすると、補題が成り立つ。 証明終わり

さて、準同型写像(40)を構成しよう。 $p \in \Phi(\{v_1\} \times L_0) = L_0^{(1)}$, $q \in \Phi(\{v_m\} \times L_0) = L_0^{(m)}$, $\ell \in W(v_1, v_m; \Delta^{m-1})$ とする。(ℓ のパラメータは $\ell: \mathbf{R} \rightarrow \Delta^{m-1}$ となるようにしておく。) 写像 $u: [0, 1] \times \mathbf{R} \rightarrow M$ で、次の条件を満たすもの全体を考える。(下の条件は(2)以外は条件3と同じである。)

条件5:

- (1) u は概正則。
- (2) $u(0, \tau) \in \Phi(\{\ell(\tau)\} \times L_0)$. $u(1, \tau) \in L_1(v)$.
- (3) $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} u(t, \tau) = p$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} u(t, \tau) = q$.

条件5 (1)(2)(3)を満たす u 全体を、 $\mathcal{M}(L_0, L_1(v); p, q; \Phi, \ell)$ とおく。

$$\bigcup_{\ell \in W(v_1, v_m; \Delta^{m-1})} \mathcal{M}(L_0, L_1(v); p, q; \Phi, \ell) \times \{\ell\}$$

の0次元成分を $\mathcal{M}(L_0, L_1(v); p, q; \Phi, W(v_1, v_m; \Delta^{m-1}))_0$ とかく。そうして、 $\mathbf{v} \in \text{Hom}(L_{0,p}, L_1(\sigma)_p)$ に対して、

$$\varphi_{1, \dots, m}(\mathbf{v}) = \sum_{q} \sum_{u \in \mathcal{M}(L_0, L_1(v); p, q; \Phi, W(v_1, v_m; \Delta^{m-1}))_0} \exp(2\pi\sqrt{-1}B(u)) H(u)(\mathbf{v}) \otimes T^{E(u)}$$

とおく。(42)式の右辺をよく見ると、条件3の右辺の項に対応している。そこで、定義にかえってよくみると、この $\varphi_{1, \dots, m}$ が条件3を満たすことがわかる。

こうして、定理5の仮定を満たすような、 $\varphi_{1, \dots, m}$ が、族のフレアーホモロジーに対して構成された。今までの話がすべてうまくいけば、 L_0 と L_0 からミラー M^\vee 上の接続層の圏の導来圏の対象が構成できることになる。そこからがんばれば、ホモロジー的ミラー対称性の証明ができるのではないだろうか。

もちろんいままでの話は構想であって、説明されていない点が多くある。たとえば、この節ではほとんど常に、ラグランジュ部分多様体にはそれを境界にもつ非自明な概正則円盤はないとしている。さらに、ここの構成は、おそらく形式的べき級数ではなく、収束べき級数でなすべきであると思われる。(すると1ループの効果が無視できない。) その他もろもろ・・・ゴールを遠くにみることはできるとはいえ、実際にそこまで歩ききるのははまだまだ時間がかかりそうである。しかし、(母空間の構成は無理でも) この構想の実現だけなら、まさか22世紀までかかるということはないと思うのだけれど・・・

未完

参考文献

- [Be] V.Berkovich, *p-adic analytic spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 141--151
- [BCOV] M.Bershadsky, S.Cecotti, H.Ooguri & C.Vafa, *Kodaira-Spencere Theory of Gravity and Exact Results for Quantum String Amplitudes*, Comm. Math. Phys. **165** (1994) 2, 311--427.
- [Che] Y.Chekanov, *Differential algebras of Legendrian links*, preprint.
- [Do] S.Donaldson, *Irrationality and h-cobordism conjecture*. J. Differential Geom. **26** (1986) 275 - 297.
- [E] J.Eliashberg, *Invariants in contact topology*, in "International Congress of Math. 1998 Berlin", Documenta Mathematica, extra volume.
- [EGH] J.Eliashberg, A.Givental, and H.Hofer, *Introduction to Symplectic Field theory*, preprint.
- [Fu1] K.Fukaya, *Morse homotopy and Chern-Simons Perturbation theory*, Commun. of Math. Phys. **81** (1996) 37 - 90.
- [Fu2] K.Fukaya, *Floer homology for 3-manifolds with boundary I*, preprint 120p never to appear.
- [Fu3] K.Fukaya, *Mirror symmetry of Abelian variety and multi theta functions*, preprint.
- [Fu4] 深谷賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波書店 1998.
- [Fu5] K.Fukaya, *Floer homology and mirror symmetry I*, preprint 28 p.
- [Fu6] K.Fukaya, *Floer homology and mirror symmetry II*, in preparation.
- [FOOO] K.Fukaya, Y.G. Oh, H.Ohta, and K.Ono, *Lagrangian intersection Floer theory - Anomaly and obstruction*, to appear.
- [FOn] K.Fukaya and K.Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38**, (1999) 933 - 1048.
- [GZ] L.Göttsche and D.Zagier, *Jacobi forms and structure of Donaldson invariants for 4-manifolds with $b_2^+ = 1$* , Selecta Math. **4** (1998) 69-115.
- [Ko1] M.Kontsevich, *A_∞ -Algebras in Mirror Symmetry*. in *Arbeitstagung*. 1992. Max Plank Institute of Mathematics, Bonn.
- [Ko2] M.Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*. in *International Congress of Mathematics*. 1994. Zürich: Birkhäuser.
- [Ko3] M.Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds I*. preprint, q-alg/9709040.
- [Oh] H.Ohta, *Obstruction to and deformation of Lagrangian intersection Floer cohomology*, この講究録に所収.
- [Sei] P.Seidel, *Graded Lagrangian submanifolds*, preprint, math.SG/9903049.
- [St] J.Stasheff, *Homotopy associativity of H-Spaces I*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963) 275 - 292. II, *ibid.* 293 - 312.
- [SYZ] A.Strominger S.T.Yau, E.Zaslow, *Mirror symmetry is a T duality*, Nucl. Phys. B, 1996. **479** 243 - 159. hep-th/9606040.
- [Wi1] E.Witten, *Non commutative geometry and string theory*. Nucl. Phys. B, 1982. **286** 253.
- [Wi2] E.Witten, *Chern-Simons Gauge theory as a string theory*, in "the Floer memorial Volume" (Hofer, Taubes, Weinstein, Zehnder ed.) Birkhäuser, Boston, 1995, pp 637 - 678.