数理解析研究所講究録 1236 巻 2001 年 122-130

ある過剰決定系の *Mathematica* を用いた解法

東北大学大学院理学研究科　　平川 信也 (Shin-ya Hirakawa)
Mathematical Instisute,
Tohoku University

1　導入

3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面の一般化として，空間形内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ曲面の研究が行われている．まず4次元実空間形の場合に曲面の局所的な形が決定され，次いで2次元複素空間形の場合が決定された．2次元複素空間形の場合は，尾方 [2] が求めた過剰決定系を，剱持-Zhou [1] が解き，曲面の局所的な表示を与えたことにより決定された．本論文では尾方の過剰決定系 [2] に関して [1] とは異なる解法を与える．その解法に数式処理ソフト *Mathematica* を用いる．また，その後 *Mathematica* を用いずにすむ解法も得たので，最後にそれを述べる．

まず [2] の結果について述べる．M を向きづけられた連結な実2次元リーマン多様体，X を定正則断面曲率 4ρ の複素2次元複素空間形とする．$x: M \to X$ を平行な平均曲率ベクトル場 H をもつ等長的はめこみとし，$|H| = 2b > 0$ とおく．また θ を x のケーラー角度とする．

このとき $M' = \{p \in M \mid \theta(p) \neq 0, \pi\}$ 上に複素構造 ϕ，実数値関数 a と複素数値関数 c が存在して以下の等式を満たす:

$$
\begin{aligned}
d\phi &= \cot\theta \cdot (a-b)\phi \wedge \overline{\phi}, & (1)\\
d\theta &= (a+b)(\phi + \overline{\phi}), & (2)\\
da &= \left\{2\cot\theta \cdot (a-b)a + \frac{3}{4}\rho \sin 2\theta\right\}(\phi + \overline{\phi}), & (3)\\
dc \wedge \overline{\phi} &= 2\cot\theta \cdot (a-b)c\,\phi \wedge \overline{\phi}, & (4)\\
|c|^2 &= a^2 + \frac{\rho}{2}(3\sin^2\theta - 2). & (5)
\end{aligned}
$$

M' の点の適当な等温座標系 $(U,(u,v))$ をとると，$\lambda > 0$ を等温因子として $\phi = \lambda(du + \sqrt{-1}dv)$ と表せる．このとき上の過剰決定系は次のように書きかえられる．

定理 [2]　M，X，M'，x，H を上のように定める．このとき M' の各点にある等温座標系 (u,v) が存在し，λ，θ，a は u 変数のみの関数となり，次の微分方程式系を満

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\lambda}{du} = -2\lambda^2 \cot\theta \cdot (a-b),\ \lambda > 0,\\
&\frac{d\theta}{du} = 2\lambda(a+b),\\
&\frac{da}{du} = 2\lambda\left\{2\cot\theta\cdot(a-b)a + \frac{3}{4}\rho\sin 2\theta\right\},\\
&\log\lambda^4\Big(a^2 + \frac{\rho}{2}(3\sin^2\theta - 2)\Big) = k_1 u + k_2.
\end{aligned}
$$

このとき c は,

$$
c = \sqrt{a^2 + \frac{\rho}{2}(3\sin^2\theta - 2)}\,e^{\sqrt{-1}(-k_1 v/2 + t)} \tag{6}
$$

と表される．ここで k_1, k_2, t は実定数である．

[2] ではまた，逆に (u,v)-平面の単連結な領域 M で，上の微分方程式系を満たす実数値関数 λ, θ, a が与えられると，あるはめこみ $x: M \to X$ が存在して，x の誘導計量に関してその平均曲率ベクトル場 H が平行で，$|H| = 2b > 0$，かつケーラー角度が θ となるものが X の正則等長変換を除いて一意的に存在することを示している．

劔持-Zhou [1] はこの過剰決定系を完全に解いた．

定理 [1]　尾方の過剰決定系の解は $k_1 = 0$ を満たし，以下のものが全てである．

(α) $\rho \geq -2b^2$ のとき

$$a \equiv -b,\ \theta \equiv \frac{\pi}{2}$$

(β) $\rho = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
&a \equiv 0,\ \theta = nonconst\\
&a \equiv b,\ \theta = nonconst\\
&a = nonconst,\ \sin^2\theta = c_1\frac{(a-b)^2}{|a|}
\end{aligned}
$$

(γ) $\rho = -3b^2$ のとき

$$
\begin{aligned}
&a \equiv -b,\ \sin\theta \equiv \sqrt{\frac{8}{9}}\\
&a = b\Big(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\Big),\ \theta = nonconst.
\end{aligned}
$$

ここで $c_1 > 0$ は実定数である．

注意 [1] では $\rho=0$ のときの $a\equiv 0$, $a\equiv b$ なる解が抜けていたのを補った.

[1] では上の微分方程式系の解析を行い, $k_1=0$ を示している. $k_1=0$ が示されれば, 全ての解を求めることは容易である.

我々は $k_1=0$ と同値な命題を求め, その証明を多項式の計算に帰着した. 次節でそれを述べる.

2 定理の証明

$c\not\equiv 0$ として, c が値 0 をとる点以外で $c=|c|e^{\sqrt{-1}\tau}$ と表す. ここで τ は実数値関数である. (6) より $k_1=0$ は τ が定数であることと同値である. これはさらに次の命題に同値なことが以下の補題で分かる.

命題 過剰決定系の解に対して $\theta\equiv\pi/2$, $\rho=0$, $4a-4b+9b\sin^2\theta\equiv 0$ のいずれかが成立する.

以下ではこの命題を証明する. まず次の補題を準備する.

補題 $c\not\equiv 0$ として, $c=|c|e^{\sqrt{-1}\tau}$ と表す. このとき次の等式が成立する.

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\left(2a^2+\rho(3\sin^2\theta-2)\right)d\tau\\&\qquad=-\rho\cot\theta\cdot(9b\sin^2\theta+4(a-b))(\phi-\overline{\phi}).\end{aligned}\tag{7}$$

証明 (2), (3), (5) より,

$$\begin{aligned}dc^2&=d(|c|^2e^{\sqrt{-1}2\tau})\\&=e^{\sqrt{-1}2\tau}\left\{2a\,da+\frac{3}{2}\rho\sin2\theta\,d\theta+\left(a^2+\frac{\rho}{2}(3\sin^2\theta-2)\right)\sqrt{-1}\,2d\tau\right\}\\&=e^{\sqrt{-1}2\tau}\left\{\left(-4\cot\theta\cdot(b-a)a^2+\frac{3}{2}\rho a\sin2\theta\right)(\phi+\overline{\phi})\right.\\&\qquad\left.+\frac{3}{2}\rho\sin2\theta\cdot(a+b)(\phi+\overline{\phi})+\sqrt{-1}\,\left(2a^2+\rho(3\sin^2\theta-2)\right)d\tau\right\}.\end{aligned}$$

一方, $dc^2=2c\,dc$ であることと, (4) より,

$$\begin{aligned}dc^2\wedge\overline{\phi}&=2c\,dc\wedge\overline{\phi}\\&=4\cot\theta\cdot(a-b)c^2\phi\wedge\overline{\phi}\\&=4\cot\theta\cdot(a-b)\left(a^2+\frac{\rho}{2}(3\sin^2\theta-2)\right)e^{\sqrt{-1}2\tau}\phi\wedge\overline{\phi}\end{aligned}$$

であるから，上の二つの式を比較して，

$$
\begin{aligned}
&\cot\theta\cdot(a-b)\left(4a^2+2\rho(3\sin^2\theta-2)\right)\phi\wedge\overline{\phi}\\
&=\left\{-4\cot\theta\cdot(b-a)a^2+\frac{3}{2}\rho\sin 2\theta\cdot(2a+b)\right\}\phi\wedge\overline{\phi}\\
&\quad+\sqrt{-1}\,\left(2a^2+\rho(3\sin^2\theta-2)\right)d\tau\wedge\overline{\phi}.
\end{aligned}
$$

を得る．これを整理し，τ は実数値関数であることから (7) が成立する． □

(7) を外微分することにより，

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-1}\Big(4\cot\theta\cdot(a-b)a^2+3\rho\sin\theta\cos\theta\cdot(2a+b)\Big)(\phi+\overline{\phi})\wedge d\tau\\
&=\rho\Big(-4a^2-9ab\sin^2\theta+27b^2\cos^2\theta-5b^2+6\rho\cos^2\theta\Big)\phi\wedge\overline{\phi} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

を得る．(7) と (8) から，$\rho\neq 0$ ならば，$x=\sin^2\theta$ とおくと，a と x の間には次の非自明な関係式が成立することが分かる．

$$
\begin{aligned}
&a^4(32-24x)+a^3(-64b+136bx-54bx^2)\\
&+a^2(32b^2-148b^2x+126b^2x^2+28x\rho-24x^2\rho)\\
&+a(-24bx\rho+114bx^2\rho-81bx^3\rho)\\
&+20b^2x\rho-42b^2x^2\rho+27b^2x^3\rho+12x\rho^2-30x^2\rho^2+18x^3\rho^2=0.
\end{aligned}
$$

この等式の左辺を $P_1(a,x)$ とおく．ここで，(2) と (3) より，

$$
\begin{aligned}
da &= \cot\theta\cdot\left(2(a-b)a+\frac{3}{2}\rho x\right)(\phi+\overline{\phi}),\\
dx &= \cot\theta\cdot 2x(a+b)(\phi+\overline{\phi})
\end{aligned}
$$

であるから，$\theta\neq\pi/2$ とすると，$P_1(a,x)=0$ を外微分して a と x の二つ目の非自明な関係式を得る．

$$
\begin{aligned}
&a^5(256-240x)+a^4(-640b+1232bx-540bx^2)\\
&+a^3(512b^2-1432b^2x+1116b^2x^2+360x\rho-336x^2\rho)\\
&+a^2(-128b^3+296b^3x-440bx\rho+1296bx^2\rho-891bx^3\rho)\\
&+a(136b^2x\rho-384b^2x^2\rho+216b^2x^3\rho+24x\rho^2-36x^2\rho^2+36x^3\rho^2)\\
&+40b^3x\rho-168b^3x^2\rho+162b^3x^3\rho+24bx\rho^2\\
&-156bx^2\rho^2+279bx^3\rho^2-\frac{243}{2}bx^4\rho^2=0.
\end{aligned}
$$

この等式の左辺を $P_2(a,x)$ とおく．$c\neq 0$，$\rho\neq 0$，$\theta\neq\pi/2$ なる解が存在したとすれば $P_1(a,x)=0$，$P_2(a,x)=0$ を満たさなければならない．そのとき $P_1(a,x)$ と

$P_2(a,x)$ は共通因数をもつことになる．共通因数が存在するには終結式が 0 でなければならない．これら二つの式を a に関する多項式と見て *Mathematica* を使い終結式を求める．得られた終結式は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&(578415690713088000b^{12}\rho^4 + 2699273223327744000b^{10}\rho^5\\
&+ 282781004348620800b^8\rho^6 + 856912134389760b^6\rho^7)x^{20}\\
&+(-1283225921248665600b^{14}\rho^3 - 6383138489069322240b^{12}\rho^4\\
&- 2319506427546593280b^{10}\rho^5 - 164827842487031808b^8\rho^6\\
&- 159449131969413120b^6\rho^7 + 615001959825408b^4\rho^8)x^{19}\\
&+(783788965588500480b^{16}\rho^2 + 1247721195147116544 0b^{14}\rho^3\\
&+ 3165727948310111846 4b^{12}\rho^4 + 9223254213971853312b^{10}\rho^5\\
&+ 747583546313687040b^8\rho^6 + 177550783690604544b^6\rho^7\\
&- 225174723680010 24b^4\rho^8 + 106993205379072b^2\rho^9)x^{18}\\
&+\cdots\\
&+(-334324549287936 00b^{16}\rho^2 - 221445077807923 20b^{14}\rho^3\\
&+ 428269399745495 04b^{12}\rho^4 + 362642986657382 40b^{10}\rho^5\\
&- 102818424689786 88b^8\rho^6 - 142886346392862 72b^6\rho^7\\
&- 935134639423488b^4\rho^8 + 1653184451837952b^2\rho^9\\
&+ 338151365148672\rho^{10})x^5.
\end{aligned}\tag{9}$$

まず x が定数ではない場合を考える．このとき (9) 式=0 は x の恒等式である．よって (9) 式の全ての次数の係数が 0 でなければならない．x^{20} の係数を *Mathematica* を使い因数分解すると，

$$856912134389760b^6\rho^4(3b^2+\rho)(15b^2+\rho)^2$$

が得られる．同様に x^{19} の係数を *Mathematica* を使い因数分解すると，

$$\begin{aligned}
&-881596846080b^4\rho^3(3b^2+\rho)\times\\
&(4851900b^8 + 22517460b^6\rho + 1264275b^4\rho^2 + 201792b^2\rho^3 - 6976\rho^4)
\end{aligned}$$

となる．これらがともに 0 になるには $\rho = 0, -3b^2$ でなければならない．実際 $\rho = -15b^2$ を x^{19} の係数に代入しても 0 にならない．今 $\rho \neq 0$ であるから，$\rho = -3b^2$ である．すると全ての次数の係数が消えることが分かる．*Mathematica* を使い $\rho = -3b^2$ を $P_1(a,x)$ に代入し，因数分解する．

$$P_1(a,x) = (4a - 4b + 9bx)Q_1(a,x).$$

$$
\begin{aligned}
Q_1(a,x) \;=\; \Big(& -8a^3+8a^2b+6a^3x-10a^2bx \\
& +30ab^2x+12b^3x-27ab^2x^2-9b^3x^2\Big)
\end{aligned}
$$

とおいた．同様に *Mathematica* を使い $\rho=-3b^2$ を $P_2(a,x)$ に代入し，因数分解する．

$$P_2(a,x)=-\frac{1}{2}(4a-4b+9bx)Q_2(a,x)$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
Q_2(a,x) \;=\; \Big(& -128a^4+192a^3b-64a^2b^2+120a^4x \\
& -208a^3bx+616a^2b^2x-48ab^3x+48b^4x \\
& -594a^2b^2x^2-36ab^3x^2-342b^4x^2+243b^4x^3\Big)
\end{aligned}
$$

とおいた．ここで共通因数が $4a-4b+9bx$ 以外にないことを確認する．実際それぞれの式における $Q_1(a,x)$，$Q_2(a,x)$ の終結式を *Mathematica* を使い求めると，

$$
\begin{aligned}
&1152b^{12}x^3(-8+9x)^2\Big(258048-1628160x+4203328x^2 \\
&-5701824x^3+4295964x^4-1707291x^5+279936x^6\Big)
\end{aligned}
$$

である．この多項式は $b>0$ より 0 にならない．よって共通解は $4a-4b+9bx=0$ 以外にない．

次に x が定数，すなわち θ が定数の場合を考える．このとき $d\theta\equiv 0$ より $a\equiv -b$ が分かる．よって (5) より $|c|$ は定数である．ゆえに，

$$dc=|c|e^{\sqrt{-1}\tau}\sqrt{-1}d\tau=\sqrt{-1}c\,d\tau$$

である．また (4) より，

$$dc\wedge\overline{\phi}=-4b\cot\theta\cdot c\,\phi\wedge\overline{\phi}$$

である．$c\not\equiv 0$ であり，$|c|$ は定数だから，c は値 0 をとらない．また τ は実数値関数であるので，

$$\sqrt{-1}\,d\tau=-4b\cot\theta\cdot(\phi-\overline{\phi})$$

を得る．この式を外微分して，

$$-4b\cot\theta\cdot(d\phi-d\overline{\phi})=0$$

を得る．よって $\cot\theta = 0$，または $d\phi - d\overline{\phi} = 0$ である．$d\phi - d\overline{\phi} = 0$ の場合，今 $d\phi = -2b\cot\theta\,\phi\wedge\overline{\phi}$ より，$d\phi + d\overline{\phi} = 0$ であるから，これと合わせて $d\phi = 0$ を得る．ゆえに $\cot\theta \equiv 0$，すなわち $\theta \equiv \pi/2$ である．

以上のことから，$c \not\equiv 0$ ならば，$\theta \equiv \pi/2$，$\rho = 0$，$4a - 4b + 9bx \equiv 0$ のいずれかが成立することが分かった．$c \not\equiv 0$ から (8) より $d\tau \equiv 0$ である．よって τ は定数であることが分かった．ゆえに，

$$c = \sqrt{a^2 + \frac{\rho}{2}(3\sin^2\theta - 2)}e^{\sqrt{-1}t}$$

と表せる．ここで t は実定数である．$c \equiv 0$ のときも $|c|^2 \equiv 0$ を外微分することによって，$\theta \equiv \pi/2$，$\rho = 0$，$4a - 4b + 9b\sin^2\theta \equiv 0$ のいずれかが成立することが分かる．よって過剰決定系 (1)–(5) の解に対して，$\theta \equiv \pi/2$，$\rho = 0$，$4a - 4b + 9b\sin^2\theta \equiv 0$ のいずれかが成立する．これで命題の証明が終了した．

次にこれらのときの a，θ を (2)，(3) より求める．

(α)　$\theta \equiv \pi/2$ のとき

このとき (2) より $a \equiv -b$ を得る．$|c|^2 \geq 0$ より，$\rho \geq -2b^2$ でなければならない．

(β)　$\rho = 0$ のとき

このとき (3) は，$da = 2\cot\theta \cdot (a - b)a(\phi + \overline{\phi})$ となる．

(β-1)　a が定数の場合

$da \equiv 0$ より $\theta \equiv \pi/2$，$a \equiv 0$，$a \equiv b$ のいずれかが成立する．$\theta \equiv \pi/2$ のときは $a \equiv -b$ である．

(β-2)　a が定数でない場合

θ を a の関数と見ると，$d\theta = (d\theta/da)da$ であるから，

$$(a + b) = \frac{d\theta}{da}\,2\cot\theta \cdot (a - b)a$$

を得る．変数分離をしたのち積分して，

$$\sin^2\theta = c_1\frac{(a - b)^2}{|a|}$$

が分かる．ここで c_1 は正の定数である．

(γ)　$4a - 4b + 9b\sin^2\theta \equiv 0$ のとき

このときこれを外微分した式，$da = -(9b/4)\sin 2\theta\, d\theta$ に (2)，(3) を代入し，$\rho = -3b^2$ が分かる．また θ が定数とすると，$a \equiv -b$ で $\sin\theta \equiv \sqrt{8/9}$ を得る．

以上で全ての解が求められた．ρ により解を分けることで定理 [1] を得る．

定理 [1] の別証明として *Mathematica* を使わず手計算でできる方法も得たので以下で述べる．

$c \neq 0, \theta \not\equiv \pi/2, \rho \neq 0$ と仮定する．$P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ の共通因数 $f(a,x)$ があるとする．仮に $\partial f/\partial a = 0$ だとすると，$f(a,x)=0$ は x の方程式となり x が定数となる．すると上で示したことにより，$\theta \equiv \pi/2$ となり，仮定に反する．よって $\partial f/\partial a \neq 0$ である．$P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ の x に 1 を代入した式は共通因数 $f(a,1)$ をもつ．$P_1(a,1)$ は次のように因数分解できる．

$$P_1(a,1) = (a+b)(4a+5b)(2a^2+\rho).$$

よって共通因数をもつためには $P_2(a,1)$ は $(a+b)$，$(4a+5b)$，$(a \pm \sqrt{-\rho/2})$ のいずれかを因数に持たなければならない．$P_2(-b,1)$ を因数分解すると，

$$P_2(-b,1) = \frac{1}{2}b(2b^2+\rho)(8b^2+3\rho)$$

より $(a+b)$ を共通因数にもつには $\rho=-2b^2$，$\rho=-8b^2/3$ でなければならない．同様に，

$$P_2(-\frac{5}{4}b,1) = -\frac{9}{16}b(3b^2+\rho)(25b^2+8\rho)$$

より $(4a+5b)$ を共通因数にもつには $\rho=-3b^2$，$\rho=-25b^2/8$ でなければならない．

$P_2(a,1)$ に $\rho=-2a^2$ を代入すると，$4a^2(a+b)(4a+5b)^2$ を得る．よって，

$$P_2(a,1) = 2\Big(a+\sqrt{-\frac{\rho}{2}}\Big)\Big(a-\sqrt{-\frac{\rho}{2}}\Big)Q(a) + 4a^2(a+b)(4a+5b)^2$$

と表せる．ここで $Q(a)$ は a の多項式である．このとき共通因数をもつには $\rho=0$，$\rho=-2b^2$，$\rho=-25b^2/8$ でなければならない．

今，仮定から $\rho \neq 0$ であるので，$P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ が共通因数をもつには，$\rho=-2b^2$，$\rho=-3b^2$，$\rho=-8b^2/3$，$\rho=-25b^2/8$ のいずれかでなければならない．$\rho=-3b^2$ のときは，$P_1(a,1)$，$P_2(a,1)$ の共通因数は $(4a+5b)$ であることに注意しておく．

$\rho=-3b^2$ 以外の場合がないことを以下に見る．

$P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ の x に数を代入した式が共通因数をもたなければ，$P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ は共通因数をもたない．代入する数が有理数ならば $P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ の係数は全て有理数になるので，$P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ が有理数体 $\boldsymbol{Q}$ で共通因数をもたないことを示せばよい．そのためには，さらに p 進体 $\mathbb{F}_p$ 上で共通因数をもたないことを示せばよい．

$\rho=-2b^2$，$x=-1$ を $P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ に代入し，$\mathbb{F}_5$ 上で考えると，

$$\begin{aligned} P_1(a,-1) &\equiv a^4+a^3b+2ab^3+3b^4, \\ P_2(a,-1) &\equiv a^5+3a^4b+2a^3b^2+2a^2b^3+3ab^4+3b^5 \quad \mathrm{mod}\ 5 \end{aligned}$$

となる．ユークリッドの互除法を用いて，この二つの多項式に共通因数がないことが分かる．

同様に $\rho=-8b^2/3$，$-25b^2/8$ のときも $x=-1$ を $P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ に代入し，$\mathbb{F}_{11}$ 上で考えると，

$$\begin{aligned} P_1(a,-1) &\equiv a^4+10a^3b+a^2b^2+10ab^3+5b^4, \\ P_2(a,-1) &\equiv a^5+8a^4b+10a^3b^2+3a^2b^3+4ab^4+b^5 \quad \mathrm{mod}\ 11 \end{aligned}$$

となる．ユークリッドの互除法を用いて，この二つの多項式に共通因数がないことが分かる．

$\rho=-3b^2$ のときは $4(a-b)+9b\sin^2\theta\equiv 0$ なる解があることが分かっている．このときは，$P_1(a,1)$，$P_2(a,1)$ の共通因数は $(4a+5b)$ のみであったので，$P_1(a,x)$，$P_2(a,x)$ の共通因数は $4(a-b)+9bx$ のみである．

以上のことから *Mathematica* を用いて示したことを手計算で示すことができた．

参考文献

[1] K. Kenmotsu and D. Zhou, The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, *Amer. J. Math.* **122** (2000), 295–317.

[2] T. Ogata, Surfaces with parallel mean curvature vector in $P^2(\boldsymbol{C})$, *Kodai Math. J.* **18** (1995), 397–407.