数理解析研究所講究録 1236 巻 2001 年 21-30

Minimal submanifolds in Riemannian spin manifolds with parallel spinor fields

都立大・理学研究科 入江 博 (Hiroshi Iriyeh)
Department of Mathematics,
Tokyo Metropolitan Univ.

Q^n を平行スピノル場をもつ n 次元リーマンスピン多様体とする. 簡単な計算により, Q^n のリッチテンソル場は0となることがわかる (cf. [2, p.31]). 例えば, ホロノミー群が $SU(n/2), Sp(n/4), G_2$ あるいは $Spin(7)$ のいずれかである完備なリーマン多様体上には, 自然なスピン構造があり, 非自明な平行スピノル場をもつことが知られている (cf. [5, p.64-69]). 本稿では, このようなリーマン多様体 Q^n 内のある種の極小部分多様体を考察する.

まず1節では, リーマンスピン多様体上のスピン構造について簡単に述べ, 平行スピノル場を定義する. 2節では, Q^{2n+m} のスピノル束 ΣQ の部分多様体 M^{2n} 上への制限 $\Sigma Q|_M$ を M^{2n} のスピノル束 ΣM とその法束 N のスピノル束 ΣN から構成する Bär の方法 [1] を説明し, 基本的な関係式を示す. 3節で, 考察の対象とする Q^{2n+m} 内の $2n$ 次元極小部分多様体のあるクラスについて述べ, 4節と5節で, 極小超曲面及び4次元リーマン多様体内の極小曲面について得られた結果を報告する.

1 スピン構造と平行スピノル場

(Q,g) を n 次元有向リーマン多様体とする. Q の計量と向きから Q 上の主 $SO(n)$ 束 P が一意的に定まる. Q 上のスピン構造 $(\tilde{P},\pi)$ とは, 主 $SO(n)$ 束 $P\to Q$ の主 $Spin(n)$ 束 $\tilde{P}\to Q$ への一つの持ち上げのことである. ここで, $\pi:\tilde{P}\to P$ は各ファイバーにおいて標準的な2重被覆写像 $\pi: Spin(n)\to SO(n)$ である.

Q がスピン構造をもつための必要十分条件は, Q の第2スティフェル-ホイットニー類 $w_2(Q)\in H^2(Q;\mathbf{Z}_2)$ が消えることである. Q がスピン構造をもつとき, Q をスピン多様体と呼ぶ. 以下, スピン多様体と呼ぶときには, Q 上に一つのスピン構造 $(\tilde{P},\pi)$ を固定して考えることにする.

次に, リーマンスピン多様体 Q 上に複素スピノル束 ΣQ を構成する. Δ^n を $Spin(n)$ の複素スピン表現とする. つまり, Δ^n はクリフォード代数 $Cl(n)$ の複素化の表現から誘導される $Spin(n)$ の表現で, 次の性質をもつ:

$n=2m$ のとき, $\dim_{\mathbf{C}}\Delta^{2m}=2^m$ で, $\Delta^{2m}=\Delta_+^{2m}\oplus\Delta_-^{2m}$ と直和分解する. ここで, $\Delta_\pm^{2m}$ は $Spin(2m)$ の既約表現である.

$n=2m+1$ のとき, $\dim_{\mathbf{C}}\Delta^{2m+1}=2^m$ で, Δ^{2m+1} は $Spin(2m+1)$ の既約表現である.

このとき, 複素スピン表現から作られる同伴ベクトル束 $\Sigma Q:=\tilde{P}\times_{Spin(n)}\Delta^n$ を複素スピノル束という. $n=2m$ のときには, 上の既約表現への分解に対応して $\Sigma Q=\Sigma^+Q\oplus\Sigma^-Q$ と分解する.

ΣQ の滑らかな切断 $\psi\in\Gamma(\Sigma Q)$ を Q 上のスピノル (場) という. ΣQ 上には, 接束 TQ の Levi-Civita 接続 ∇^Q から自然に誘導される接続 $\nabla^{\Sigma Q}$(スピン接続という) が一意的に存在する. $\nabla^{\Sigma Q}\psi=0$ をみたすスピノル場 ψ を平行スピノル場という.

2 Bär の構成法

この節では, 平行スピノル場をもつとは限らない一般のリーマンスピン多様体 Q^{2n+m} 内のはめ込まれた $2n$ 次元有向部分多様体 M^{2n} を考える. M^{2n} には常に Q^{2n+m} からの誘導リーマン計量を入れる. もし, M^{2n} がスピン多様体であれば, Milnor の結果 (cf. [6, p.85]) によって, M^{2n} の法束 N 上に一意的にスピン構造が誘導される (注. スピン構造及び複素スピノル束は, 接束以外の一般の実ベクトル束に対しても 1 節と全く同様にして定義される). このとき, Q^{2n+m} 上の複素スピノル束 ΣQ を部分多様体 M^{2n} 上に制限したものは, M^{2n} と法束 N の複素スピノル束を使って

$$\Sigma Q|_M=\Sigma M\otimes\Sigma N$$

と表現できる (cf. [1] or [4, §2]). Q^{2n+m} 内の部分多様体 M^{2n} の第 2 基本形式を II とする. $TQ|_M$ の直交直和分解 $TQ|_M=TM\oplus N$ におけるガウスの式

$$\nabla_X^QY-\nabla_X^MY=II(X,Y),\qquad X,Y\in\Gamma(TM)$$

を用いて, Bär [1] は次の式を示した (cf. [4, §2]).

$$\nabla_X^{\Sigma Q}-\nabla_X^{\Sigma M\otimes\Sigma N}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\gamma_Q(X_i\cdot II(X,X_i)). \tag{1}$$

ここで, $\{X_1,\dots,X_{2n}\}$ は TM の向きづけられた局所正規直交枠で, γ_Q は $\Sigma Q|_M$ 上のクリフォード積を表す. M^{2n} 上の通常の Dirac 作用素は,

$$D_M:=\sum_{j=1}^{2n}\gamma_M(X_j)\nabla_{X_j}^{\Sigma M}$$

と定義されるが, 法束 N の複素スピノル束 ΣN を係数にもつ Dirac 作用素

$$D_M^{\Sigma N}:=\sum_{j=1}^{2n}\gamma_Q(X_j)\nabla_{X_j}^{\Sigma M\otimes\Sigma N}$$

を考えることにより, Q^{2n+m} 内での M^{2n} の外在的な曲がり具合いについての情報を引き出すことができる. 実際, 次がわかる.

補題 2.1 (Bär [1]).

$$D_M^{\Sigma N} = \sum_{j=1}^{2n} \gamma_Q(X_j)\nabla_{X_j}^{\Sigma Q} + n\gamma_Q(H). \tag{2}$$

ここで, H は Q^{2n+m} における M^{2n} の平均曲率ベクトル場を表す.

証明. (1) 式より,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2n} \gamma_Q(X_j)\nabla_{X_j}^{\Sigma Q} - D_M^{\Sigma N} &= \sum_{j=1}^{2n} \gamma_Q(X_j)\left(\nabla_{X_j}^{\Sigma Q} - \nabla_{X_j}^{\Sigma M\otimes\Sigma N}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\gamma_Q(X_j)\sum_{i=1}^{2n}\gamma_Q(X_i\cdot II(X_j,X_i)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}\gamma_Q(X_j\cdot X_i)\gamma_Q(II(X_j,X_i)).
\end{aligned}$$

ここで, クリフォード代数の関係式 $X_j \cdot X_i + X_i \cdot X_j = 0 (i \neq j)$ と II の対称性より,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2n} \gamma_Q(X_j)\nabla_{X_j}^{\Sigma Q} - D_M^{\Sigma N} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\gamma_Q(X_i\cdot X_i)\gamma_Q(II(X_i,X_i)) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma_Q\left(\sum_{i=1}^{2n} II(X_i,X_i)\right) \\
&= -n\gamma_Q(H).
\end{aligned}$$

□

Bär 自身は, 論文 [1] において, この公式を部分多様体上の係数つき Dirac 作用素 $D_M^{\Sigma N}$ の第 1 固有値の上からの評価に応用している.

3 ある 1 階偏微分方程式によって定義される極小部分多様体

以下, Q^{2n+m} は非自明な平行スピノル場をもつ $(2n+m)$ 次元リーマンスピン多様体とする. ここで, 次の問題を設定する.

問題 3.1. M^{2n} を Q^{2n+m} に等長的にはめ込まれた $2n$ 次元閉リーマンスピン多様体とする. Q^{2n+m} の平行スピノル場 ψ を M^{2n} に制限したとき,

$$\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N}(\psi|_M) = 0 \tag{3}$$

をみたす M^{2n} を特徴づけよ.

まず, (1) 式により M^{2n} が Q^{2n+m} において全測地的ならば上の条件をみたす. さらに,

命題 3.2. 上の条件 (3) をみたす M^{2n} は Q^{2n+m} 内の極小部分多様体である.

証明. $\psi \in \Gamma(\Sigma Q)$ を条件 (3) をみたす Q^{2n+m} の非自明な平行スピノル場とする. このとき, $\psi|_M \in \Gamma(\Sigma Q|_M)$ のノルムは M^{2n} 上 0 でない定数である. (2) 式より,

$$\begin{aligned} D_M^{\Sigma N}(\psi|_M) &= \sum_{i=1}^{2n} \gamma_Q(X_i)\nabla_{X_i}^{\Sigma Q}(\psi|_M) + n\gamma_Q(H)\psi|_M \\ &= n\gamma_Q(H)\psi|_M. \end{aligned}$$

一方, $D_M^{\Sigma N}$ の定義にもどると,

$$D_M^{\Sigma N}(\psi|_M) = \sum_{i=1}^{2n} \gamma_Q(X_i)\nabla_{X_i}^{\Sigma M\otimes\Sigma N}(\psi|_M) = 0.$$

よって,

$$\gamma_Q(H)\psi|_M = 0.$$

$|\psi|_M| \neq 0$ であるから, $H = 0$ を得る. □

したがって, 問題 3.1 の条件 (3) は 1 階の偏微分方程式によって記述される Q^{2n+m} 内の極小部分多様体のあるクラスを定めていることになる.

4 Q^{2n+1} 内の極小超曲面

まず, 問題 3.1 を取り扱う一般的な方針を説明しておく. Q^{2n+m} 上の平行スピノル場 ψ が与えられると, 補題 2.1 により, Q^{2n+m} 内の極小部分多様体 M^{2n} 上の作用素 $D_M^{\Sigma N}$ は非自明な核 $\psi|_M$ をもつ. 一方, $D_M^{\Sigma N}$ に対して次の Lichnerowicz 型の公式が成立する.

補題 4.1. Q^{2n+m} を $(2n+m)$ 次元リーマンスピン多様体とし, M^{2n} を Q^{2n+m} に等長的にはめ込まれた $2n$ 次元リーマンスピン多様体とする. M^{2n} のスカラー曲率を κ, 法曲率テンソル場を $R^{\perp}$ で表す. このとき,

$$\begin{aligned} \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2 &= (\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N})^*\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N} + \frac{1}{4}\kappa \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma_Q\left(\sum_{i<j}^{2n}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle X_i\cdot X_j\cdot Y_k\cdot Y_l\right) \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ. ここで, $\{Y_1,\ldots,Y_m\}$ は N の向きづけられた局所正規直交枠である.

証明. Lawson と Michelson の教科書 [6, p.164] の (8.23) 式から

$$\left(D_M^{\Sigma N}\right)^2 = (\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N})^*\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N} + \frac{1}{4}\kappa + \mathcal{R}^{\Sigma N}$$

が成り立つ. ここで, $\mathcal{R}^{\Sigma N} : \Gamma(\Sigma M \otimes \Sigma N) \to \Gamma(\Sigma M \otimes \Sigma N)$ は次の式で定義されている.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\Sigma N}(\sigma\otimes\tau) &:= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}\gamma_M(X_i\cdot X_j)\sigma\otimes\left(R^{\Sigma N}_{X_i,X_j}\tau\right)\\ &= \sum_{i<j}^{2n}\gamma_M(X_i\cdot X_j)\sigma\otimes\left(R^{\Sigma N}_{X_i,X_j}\tau\right). \qquad (5)\end{aligned}$$

ここで, $\sigma\in\Gamma(\Sigma^+M)$ あるいは $\sigma\in\Gamma(\Sigma^-M)$ で, $\tau\in\Gamma(\Sigma N)$ である. したがって, 後は (5) 式を計算すればよい. [6, p.100] の (4.37) 式より,

$$R^{\Sigma N}_{X_i,X_j}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle\gamma_N(Y_k\cdot Y_l)\tau. \qquad (6)$$

(6) 式を (5) 式に代入すると,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\Sigma N}(\sigma\otimes\tau) &= \frac{1}{2}\sum_{i<j}^{2n}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle\gamma_M(X_i\cdot X_j)\sigma\otimes\gamma_N(Y_k\cdot Y_l)\tau\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i<j}^{2n}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle\gamma_Q(X_i\cdot X_j)(\sigma\otimes\gamma_N(Y_k\cdot Y_l)\tau)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i<j}^{2n}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle\gamma_Q(X_i\cdot X_j)(-1)^{\deg\sigma}\gamma_Q(Y_k)(\sigma\otimes\gamma_N(Y_l)\tau)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i<j}^{2n}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle\gamma_Q(X_i\cdot X_j)(-1)^{2\deg\sigma}\gamma_Q(Y_k\cdot Y_l)(\sigma\otimes\tau)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i<j}^{2n}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle\gamma_Q(X_i\cdot X_j\cdot Y_k\cdot Y_l)(\sigma\otimes\tau)\\ &= \frac{1}{2}\gamma_Q\left(\sum_{i<j}^{2n}\sum_{k<l}^{m}\langle R^{\perp}_{X_i,X_j}(Y_k), Y_l\rangle X_i\cdot X_j\cdot Y_k\cdot Y_l\right)(\sigma\otimes\tau).\end{aligned}$$

ここで, $\deg\sigma$ は, Chirality 作用素 $\omega_{\mathbf{C}}$ を用いて, $\gamma_Q(\omega_{\mathbf{C}})\sigma = (-1)^{\deg\sigma}\sigma$ によって定義される. □

(4) 式にボホナートリックを用いるのが基本的なアイデアである. 超曲面の場合の結果を述べる.

定理 4.2. Q^{2n+1} を平行スピノル場をもつ $(2n+1)$ 次元リーマンスピン多様体とし，M^{2n} を Q^{2n+1} に等長的にはめ込まれた $2n$ 次元有向閉リーマン多様体とする．このとき，次は同値である：

(i) M^{2n} は Q^{2n+1} の極小超曲面であり，そのスカラー曲率が 0 である．

(ii) M^{2n} は Q^{2n+1} の極小超曲面であり，そのリッチテンソル場が 0 である．

(iii) M^{2n} は Q^{2n+1} において全測地的超曲面である．

(iv) ある平行スピノル場 $\psi \in \Gamma(\Sigma Q)$ に対して，$\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M) = 0$ が成り立つ．

証明. (i) $\Rightarrow$ (iv)：$\psi \in \Gamma(\Sigma Q)$ を Q^{2n+1} の非自明な平行スピノル場とする．$|\psi| \equiv 1$ と正規化しておく．(4) 式を $\psi|_M$ に作用させ，$\psi|_M$ とエルミート内積をとり，M 上で積分すると，

$$\begin{aligned}&\int_M \langle (D_M^{\Sigma N})^2 \psi|_M, \psi|_M \rangle d\mathrm{vol} \\ &= \int_M \langle (\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N})^* \nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M), \psi|_M \rangle d\mathrm{vol} + \frac{1}{4}\int_M \kappa \langle \psi|_M, \psi|_M \rangle d\mathrm{vol}\end{aligned}$$

を得る．$D_M^{\Sigma N}$ は形式的自己共役作用素であるから，(2) 式を用いて，

$$n^2 \int_M |H|^2 d\mathrm{vol} = \int_M |\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M)|^2 d\mathrm{vol} + \frac{1}{4}\int_M \kappa d\mathrm{vol}$$

が得られる．仮定より，$H = 0$, $\kappa = 0$ であるから，

$$\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M) = 0.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii)：$|\psi| \equiv 1$ と正規化しておく．(1) 式より，任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して，

$$0 = \nabla_X^{\Sigma Q}(\psi|_M) - \nabla_X^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \langle II(X, X_i), Y_1 \rangle \gamma_Q(X_i \cdot Y_1)\psi|_M$$

が成り立つ．ここで，Y_1 は M の単位法ベクトル場である．点 $p \in M$ を固定して，$\varphi := \gamma_Q(Y_1)\psi|_M$ とおく．このとき，$\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$ であり，

$$\sum_{i=1}^{2n} \langle II(X, X_i), Y_1 \rangle \gamma_Q(X_i)\varphi = 0$$

が成り立つ．この両辺と $\gamma_Q(X_j)\varphi$ とエルミート内積をとると，$j = 1, \ldots, 2n$ に対して，

$$\sum_{i \neq j} \langle II(X, X_i), Y_1 \rangle \langle \gamma_Q(X_i)\varphi, \gamma_Q(X_j)\varphi \rangle + \langle II(X, X_j), Y_1 \rangle = 0$$

を得る．これらの方程式の実部をとると，

$$\langle II(X, X_j), Y_1 \rangle (p) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2n$$

となり, M^{2n} は Q^{2n+1} において全測地的である.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : $\psi \in \Gamma(\Sigma Q)$ を Q^{2n+1} の平行スピノル場とする. $|\psi| \equiv 1$ と正規化しておく. $II = 0$ であるから, (1) より, 任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対して,

$$\nabla_X^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M) = 0$$

が成り立つ. したがって, $\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}$ の曲率テンソル場は,

$$R^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M) = 0$$

をみたす. 点 $p \in M$ を固定する. $\{\tau\}$ を $(\Sigma N)_p$ の基底とすると,

$$\psi|_M = \sum_j \sigma_j \otimes \tau$$

と表すことができる. ここで, $\sigma_j \in (\Sigma M)_p$ である. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &= R^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M) \\ &= \sum_j \left(R^{\Sigma M}\sigma_j\right) \otimes \tau + \sum_j \sigma_j \otimes R^{\Sigma N}\tau \end{aligned}$$

であるから, (6) より, $R^{\Sigma N} = 0$ となり,

$$\sum_j \left(R^{\Sigma M}\sigma_j\right) \otimes \tau = 0.$$

$\tau \neq 0$ であるから, $R^{\Sigma M}\sigma_j = 0$ となる. σ_j のうち少なくともひとつは 0 でないとしてよい. ここで, [2, p.16] の (1.13) 式より,

$$0 = \sum_{i=1}^{2n} \gamma_M(X_i) R^{\Sigma M}_{X,X_i}(\sigma_j) = -\frac{1}{2}\gamma_M(\mathrm{Ric}(X))\sigma_j,$$

$\sigma_j \neq 0$ であるから, $\mathrm{Ric}(X) = 0$ がわかる.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : 自明. □

注意. 超曲面の場合には, 上のように M^{2n} は oriented と仮定しておけば, M^{2n} のスピン構造は Q^{2n+1} のスピン構造から自然に誘導される.

注意. 上の証明で, M^{2n} が閉であることを使っているのは (i) $\Rightarrow$ (iv) の部分だけである. (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) の証明には局所的な議論しか用いていない.

定理 4.2 により, 超曲面の場合には問題 3.1 の条件 (3) をみたす M^{2n} は全測地的なものに限ることがわかる. また, (i) と (iii) の同値性はスピン構造とは全く無関係にガウスの方程式からも証明できるが, (ii) を得るには Q^{2n+1} 上の平行スピノル場の存在が本質的であることを注意しておく.

例 4.3 (Friedrich-Kath [3]). 平行スピノル場をもつ非平坦な 5 次元閉リーマンスピン多様体 Q^5 の構造は, Friedrich と Kath によって調べられている. Q^5 は, S^1 上のファイバー束の全空間で, 各ファイバーは全測地的に埋め込まれたリッチ平坦ケーラー計量をもつ $K3$ 曲面 M^4 である.

5 Q^4 内の極小曲面

この節では, 平行スピノル場をもつ4次元リーマンスピン多様体 Q^4 内のコンパクト極小曲面について考える. 4次元の場合, Q^4 が平坦であるか, 非平坦な超ケーラー多様体であるかによって, 平行スピノル場の存在に違いがある. 1節で述べたように Q^4 上の複素スピノル束は, $\Sigma Q^4 = \Sigma^+ Q^4 \oplus \Sigma^- Q^4$ と直和分解する. Q^4 が平坦のときには, 正負両方の非自明な平行スピノル場をもつが, 非平坦な超ケーラー多様体の場合には, 正の平行スピノル場しかもたない. 具体例は, 4次元平坦トーラスと4次元ユークリッド空間が平坦なものであり, 非平坦なものには, リッチ平坦ケーラー計量をもつ $K3$ 曲面, 複素射影直線の正則余接束 $T^*\mathbf{C}P^1$ などがある.

以下, この二つの場合に分けて結果を述べる.

定理 5.1. Q^4 を4次元平坦トーラスとし, M^2 を Q^4 にはめ込まれた2次元トーラスとする. M^2 には Q^4 からの誘導計量を入れる. このとき, 次は同値である :

(i) M^2 は Q^4 内の極小曲面である.

(ii) ある平行スピノル場 $\psi \in \Gamma(\Sigma Q)$ に対して, $\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi|_M) = 0$ が成り立つ.

(iii) M^2 は Q^4 において全測地的である.

(iv) 正負それぞれ少なくとも一つの平行スピノル場 $\psi^\pm \in \Gamma(\Sigma^\pm Q)$ に対して, $\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi^\pm|_M) = 0$ が成り立つ.

注意. (iv) $\Rightarrow$ (iii) の証明は, 局所的な議論のみでできるので, M^2 の種数が2以上の場合でも成立する. また, (i) と (iii) の同値性は古典的な結果である.

定理 5.2. Q^4 を4次元超ケーラー多様体とし, M^2 を Q^4 に等長的にはめ込まれた2次元有向閉リーマン多様体とする. このとき, 次は同値である :

(i) M^2 は $\chi(M) + \chi(N) = 0$ をみたす極小曲面である.

(ii) M^2 は Q^4 上の計量と整合的なある複素構造に関して正則曲線である.

(iii) ある平行スピノル場 $\psi^+ \in \Gamma(\Sigma^+ Q)$ に対して, $\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}(\psi^+|_M) = 0$ が成り立つ.

ここで, $\chi(M)$ は M^2 のオイラー数, $\chi(N)$ は M^2 の法束 N のオイラー数を表す.

注意. 定理 5.2 において, (i) と (ii) の同値性は Micallef と Wolfson[7] によっても得られている.

最後に, 定理の証明について言及したい. 今の場合, Lichnerowicz 型公式は次のように簡明になる.

補題 5.3. Q^4 を4次元リーマンスピン多様体とし, M^2 を Q^4 に等長的にはめ込まれた2次元リーマンスピン多様体とする. M^2 のガウス曲率を K, 法曲率を K_N で表す. このとき,

$$(D_M^{\Sigma N})^2 = (\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N})^* \nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N} + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K_N \quad \text{on} \quad \Gamma(\Sigma^+ Q|_M) \tag{7}$$

$$\left(D_M^{\Sigma N}\right)^2 = (\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N})^*\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N} + \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K_N \quad \text{on } \Gamma(\Sigma^- Q|_M) \tag{8}$$

が成り立つ.

定理 5.1 の証明の概略を述べる. (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) は 3 節で述べた事実から明らかである. Q^4 が平坦トーラスの場合には (7), (8) 両方の式を使うことができ, (i) ⇒ (iv) が示せる. 本質的であるのは, (iv) ⇒ (iii) の証明で, これがクリフォード代数の計算に帰着する.

次に, 定理 5.2 の証明であるが, まず, (2) 式と (7) 式により, (i) と (iii) の同値性がただちにわかる. (ii) ⇒ (i) は, 複素ベクトル束としての分解 $TQ|_M = TM \oplus N$ の第 1 チャーン類をとればすぐわかる. (i) ⇒ (ii) の証明には, 次のケーラー曲面内のコンパクト極小曲面に関する Webster の公式 (cf. [8]) を用いる.

$$-p - q = \chi(M) + \chi(N).$$

ここで, p は complex tangent point の数, q は anti-complex tangent point の数を表す. 今, 仮定より, $\chi(M) + \chi(N) = 0$ であるから, $p = q = 0$ となる. つまり, M^2 は Q^4 内の全実閉曲面である. したがって, Wolfson の定理 ([8, Theorem2.2]) から, M^2 は Q^4 上の計量と整合的なある複素構造に関して正則曲線となる.

参考文献

[1] C. Bär, Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator, Ann. Global Anal. Geom., **16**(1998), 573-596.

[2] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath, Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds, Teubner, Leipzig, 1991.

[3] Th. Friedrich, I. Kath, Compact 5-dimensional Riemannian manifolds with parallel spinors, Math. Nachr., **147**(1990), 161-165.

[4] H. Iriyeh, Minimal submanifolds in Riemannian spin manifolds with parallel spinor fields, to appear in J. Geom. Phys.

[5] D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy, Oxford University Press, 2000.

[6] H. B. Lawson, M. L. Michelson, Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.

[7] M. J. Micallef, J. G. Wolfson, The second variation of area of minimal surfaces in four-manifolds, Math. Ann., **295**(1993), 245-267.

[8] J. G. Wolfson, Minimal surfaces in Kähler surfaces and Ricci curvature, J. Diff. Geom., **29**(1989), 281-294.