数理解析研究所講究録 1238 巻 2001 年 192-206

直交群の極大放物型部分群の作用する概均質ベクトル空間から得られる一変数保型形式について

立教大学理学部　　上野　隆彦 (TAKAHIKO UENO)

本稿では“直交群の極大放物型部分群の作用する概均質ベクトル空間の二変数ゼータ関数の解析的な性質”を考察する．主結果は，それらのゼータ関数の変数の一方に適当な整数を代入して，つまり一変数に特殊化して得られる Dirichlet 級数の Mellin 逆変換が重さ整数または半整数の（楕円型）保型形式になることを示すものである．

ここで扱うゼータ関数は既に研究されている次の３つの場合を含む．

A. ２次対称行列の成すベクトル空間に付随する２変数ゼータ関数 (cf. [8])
B. 正定値 m 変数二次形式の２変数ゼータ関数 (cf. [3])
C. ２次エルミート行列の成すベクトル空間に付随する２変数ゼータ関数 (cf.[10])

A は直交群が $SO(1,2)$ の場合であり，このゼータ関数からは重さ半整数の $\Gamma_0(4)$ 保型形式 Cohen Eisenstein 級数が得られる．B は直交群が $SO(m+1,1)$ の場合で Peter [3] により詳しく研究されている．また Peter は論文の中で，このゼータ関数から保型形式が得られるだろう事を予想している．そして本稿の結果により，この予想は肯定的に解決される．C のゼータ関数から保型形式が得られることは [10] において証明されている．これは概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数から保型形式への対応を与えた初めての例でもある．証明には Weil の逆定理 (cf. Miyake [1], Theorem 4.3.15) が用いられた．

今回の結果は [10] の一般化であり，得られる保型形式は先に述べたように重さ整数または半整数になる．主定理の証明にはやはり Weil 型の逆定理を用いる．ここでいう Weil 型の逆定理というのは，Dirichlet 級数とそれを捻って得られる L-関数たちの間に成り立つ関数等式を含むいくつかの解析的性質により保型形式を特徴づけるものである．重さ半整数の保型形式に対する Weil 型の逆定理については Shimura [7] の最後にコメントされている．詳しいステートメントは preprint [11] に書かれている．

1. 概均質ベクトル空間

$V=\mathbb{C}^{m+2}$ 上の整数係数非退化二次形式

$$Q(x)=x_0x_{m+1}+\sum_{1\le i,j\le m} a_{ij}x_ix_j$$

を考える．ここで $a_{ij}=a_{ji}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\ (i\neq j)$ かつ $a_{ii}\in\mathbb{Z}$ とする．$A=(a_{ij})$ とおくとき，Q の行列 S と Q の判別式 D を次のように定義する：

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & A & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D=\det 2S=-\det 2A.$$

直交群 $SO(Q)=\{g\in GL_{m+2}(\mathbb{C})\,|\,Q(gx)=Q(x),\ \det g=1\}$ の極大放物型部分群を

$$P=\left\{\begin{pmatrix} a & -2a\,{}^tuAh & -aA[u] \\ 0 & h & u \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix} a\in\mathbb{C},\ a\neq 0 \\ h\in SO(A) \\ u\in\mathbb{C}^m \end{matrix}\right\}$$

とする．ここで $A[u]$ は ${}^tuAu$ を表す．このとき $P\times GL_1(\mathbb{C})$ の V への作用を

$$\rho(p,t)x=tpx\quad (x\in V,\ (p,t)\in P\times GL_1(\mathbb{C}))$$

で定めると $(P\times GL_1(\mathbb{C}),\rho,V)$ は概均質ベクトル空間になり，その特異集合は

$$S=\{x\in V\,|\,x_{m+1}=0\}\cup\{x\in V\,|\,Q(x)=0\}$$

である．この概均質ベクトル空間の基本相対不変式は x_{m+1} と $Q(x)$ であり，

$$\chi_1\left(\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & h & * \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix},t\right)=ta^{-1},\quad \chi\left(\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & h & * \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix},t\right)=t^2$$

とするとき，

$$(\rho(p,t)x)_{m+1}=\chi_1(p,t)x_{m+1},\quad Q(\rho(p,t)x)=\chi(p,t)Q(x)$$

を満たす．

V の元 $x={}^t(x_0,x_1,\ldots,x_{m+1})$ と $y={}^t(y_0,y_1,\ldots,y_{m+1})$ に対して，内積

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=0}^{m+1}x_iy_i$$

を考え，V と V^* を同一視する．このとき，ρ の反傾表現ρ^* は

$$\rho^*(p,t)y=t^{-1}\,{}^tp^{-1}y\quad (y\in V)$$

で与えられ，(G,ρ^*,V) も概均質ベクトル空間になる．その特異集合は

$$S^*=\{y\in V\,|\,y_0=0\}\cup\{y\in V\,|\,Q^*(y)=0\}$$

である．ここで二次形式 Q^* は

$$Q^*(y)=y_0y_{m+1}+4^{-1}\sum_{1\le i,j\le m}a^*_{ij}y_iy_j\quad with\ A^{-1}=(a^*_{ij})$$

である．その基本相対不変式は y_0 と $Q^*(y)$ で，

$$\chi_1^*\left(\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & h & * \\ 0 & 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, t\right) = (ta)^{-1}, \quad \chi^*\left(\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & h & * \\ 0 & 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, t\right) = t^{-2}$$

とおけば，

$$(\rho^*(p,t)y)_0 = \chi_1^*(p,t)y_0, \quad Q^*(\rho^*(p,t)y) = \chi^*(p,t)Q^*(y)$$

を満たす．

ここで $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{m+2}$ とし，

$$P^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2a\,{}^tuAh & -aA[u] \\ 0 & h & u \\ 0 & 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a \in \mathbb{R},\ a > 0 \\ h \in SO(A) \\ u \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\}$$

とおく．このとき $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ の $P^+ \times GL_1(\mathbb{R})$ 軌道分解は $\epsilon = \pm 1$, $\epsilon_1 = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ と $\eta_1 = \pm 1$ に対して，

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \cup_{\epsilon,\epsilon_1} V_{\epsilon\epsilon_1}, \quad V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^* = \cup_{\eta,\eta_1} V_{\eta\eta_1}^*$$

$$V_{\epsilon\epsilon_1} = \{x \in V_\epsilon \,|\, \mathrm{sgn}\ Q(x) = \epsilon,\ \mathrm{sgn}\ x_{m+1} = \epsilon_1\}$$
$$V_{\eta\eta_1}^* = \left\{ y \in V_\eta^* \middle| \mathrm{sgn}\ Q^*(y) = \eta,\ \mathrm{sgn}\ y_0 = \eta_1 \right\}$$

で与えられる．上の各軌道ごとにゼータ関数は定義される．そのゼータ関数の定義を見ると x_{m+1} や y_0 の符号に関してゼータ関数を区別する必要がないので $Q(x)$, $Q^*(y)$ の符号のみに関する軌道 $V_\epsilon = \cup_{\epsilon_1} V_{\epsilon\epsilon_1}$, $V_\eta^* = \cup_{\eta_1} V_{\eta\eta_1}^*$ を考えておく．

次に $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ と $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ に対して，

$$\Phi_{\epsilon\epsilon_1}(f; w, s) = \int_{V_{\epsilon\epsilon_1}} |x_{m+1}|^w |Q(x)|^s f(x) dx,$$
$$\Phi_{\eta\eta_1}^*(f^*; w, s) = \int_{V_{\eta\eta_1}^*} |y_0|^w |Q^*(y)|^s f^*(y) dy$$
$$\Phi_\epsilon(f; w, s) = \sum_{\epsilon_1} \Phi_{\epsilon\epsilon_1}(f; w, s), \quad \Phi_\eta^*(f^*; w, s) = \sum_{\eta_1} \Phi_{\eta\eta_1}^*(f^*; w, s)$$

を定義する．これらの積分を概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) の局所ゼータ関数という．これらは $\mathrm{Re}(w) > 0$ かつ $\mathrm{Re}(s) > 0$ で絶対収束する．

また $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して f の Fourier 変換 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(x) = \int_{V_{\mathbb{R}}} f(y) e(\langle x, y\rangle) dy$$

で定義しておく．局所ゼータ関数 Φ_ϵ と Φ_η^* は次の関数等式を満たす．証明については Muro [2] または Sato [6] を参照されたい．

定理 1. $\Phi_\epsilon(f;w,s)$ と $\Phi^*_\eta(f;w,s)$ は $\mathbb{C}^2$ の有理型関数に解析接続され次の関数等式を満たす:

$$\begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{pmatrix} \left(\hat{f}; w-m, s-1\right) = \gamma(w,s) \begin{pmatrix} \Phi^*_+ \\ \Phi^*_- \end{pmatrix} \left(f; w-m, \frac{m}{2}-w-s\right),$$

ここで $\gamma(w,s)$ は

$$\gamma(w,s) = 2|D|^{-1/2}(2\pi)^{m/2-w-2s}\Gamma(s)\Gamma(w+s-m/2) \\ \times \begin{pmatrix} \cos(\pi(w+2s-p)/2) & \cos(\pi(w-q)/2) \\ \cos(\pi(w-p)/2) & \cos(\pi(w+2s-q)/2) \end{pmatrix}$$

である.

次の積分は, 2節で定義するゼータ積分の計算に表れる. $f \in \mathcal{S}(V_\mathbb{R})$ と $f^* \in \mathcal{S}(V^*_\mathbb{R})$ に対して,

$$\Sigma(f;s) = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}} |a|^{s-m/2-2} f \begin{pmatrix} -a^{-1}A[u] \\ u \\ a \end{pmatrix} da\,du,$$

$$\Sigma^*(f^*;s) = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}} |a|^{s-m/2-2} f^* \begin{pmatrix} a \\ u \\ -(4a)^{-1}A^{-1}[u] \end{pmatrix} da\,du$$

とする. この積分 $\Sigma(f;s)$ と $\Sigma^*(f^*;s)$ は $\mathrm{Re}(s) > m/2$ で絶対収束する. 更にこれらの積分について次の命題が成り立つ.

命題 2. (1) $f \in C_0^\infty(V_\mathbb{R} - S_\mathbb{R})$ に対して,

$$\Sigma(\hat{f};s) = 2|D|^{1/2}(2\pi)^{1-s}\Gamma(s-1) \\ \times \sum_\epsilon \cos\frac{\pi}{4}(p-q+\epsilon(2-2s))\Phi_\epsilon\left(f; s-\frac{m}{2}-1, 1-s\right).$$

(2) $f^* \in C_0^\infty(V^*_\mathbb{R} - S^*_\mathbb{R})$ に対して,

$$\Sigma((f^*)^\wedge;s) = 2|D|^{-1/2}(2\pi)^{1-s}\Gamma(s-1) \\ \times \sum_\eta \cos\frac{\pi}{4}(q-p+\eta(2-2s))\Phi^*_\eta\left(f^*; s-\frac{m}{2}-1, 1-s\right).$$

2. 概均質ベクトル空間のゼータ関数とゼータ積分

本節で概均質ベクトル空間のゼータ関数を定義するが，次のようにするとゼータ関数の取り扱いが簡単になる．すなわち $P \times GL_1$ の代わりに

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2a\,{}^tuA & -aA[u] \\ 0 & 1_m & u \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \\ u \in \mathbb{C}^m \end{array} \right\} \times GL_1(\mathbb{C})$$

を考える．このように群を小さくしても依然として (G, ρ, V) は概均質ベクトル空間で，そのゼータ関数は $(P \times GL_1, \rho, V)$ のゼータ関数と本質的に変わらない．また，

$$G^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & -2a\,{}^tuA & -aA[u] \\ 0 & 1_m & u \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a \in \mathbb{R},\ a > 0, \\ u \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\} \times GL_1^+(\mathbb{R}),$$

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2\,{}^tuA & -A[u] \\ 0 & 1_m & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| u \in \mathbb{Z}^m \right\},$$

$$V_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}}^* = \mathbb{Q}^{m+2}, \quad V_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}}^* = \mathbb{Z}^{m+2}$$

とする．次に奇素数 r を法とする Dirichlet 指標 ψ を考える[1]．$(r, n) \neq 1$ のときには $\psi(n) = 0$ と理解しておく．次に $V_{\mathbb{Q}}$ 上の関数 ϕ_1, ϕ_ψ とを定義する．後でこれらの関数を用いてゼータ関数を定義する．

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in V_{\mathbb{Z}} \\ 0 & \text{if } x \notin V_{\mathbb{Z}} \end{cases}, \quad \phi_\psi(x) = \begin{cases} \psi(Q(x)) & \text{if } x \in V_{\mathbb{Z}} \\ 0 & \text{if } x \notin V_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

次に，ゼータ積分やゼータ関数の関数等式を記述するのに必要な，ϕ_1 と ϕ_ψ の Fourier 変換 $\hat{\phi}_1$ と $\hat{\phi}_\psi$ を定義する．まず，関数 $\phi = \phi_1$ または $\phi = \phi_\psi$ と各 $y \in V_{\mathbb{Q}}$ に対して，(y に依存する）正定数 M で

$$x \equiv x' \pmod{MV_{\mathbb{Z}}} \Longrightarrow \phi(x)e(\langle -x, y\rangle) = \phi(x')e(\langle -x', y\rangle)$$

を満たすものをとる．そして

$$\hat{\phi}(y) = M^{-m-2} \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}/MV_{\mathbb{Z}}} \phi(x)e(-x, y), \quad (y \in V_{\mathbb{Q}})$$

を ϕ の Fourier 変換と呼ぶことにする．この定義は M の選び方にはよらない．次の命題 3 は ϕ_1 と ϕ_ψ の Fourier 変換の公式である．命題を述べる前にいくつかの記号を導入しておく．まず，r を法とする 2 次剰余指標を

$$\varphi_{(r)}(j) = \left(\frac{j}{r}\right), \quad \varphi^{(r)}(j) = \left(\frac{r}{j}\right)$$

[1]Weil 型の逆定理にはゼータ関数を Dirichlet 指標で捻った関数も考える必要がある．Dirichlet 指標の法としては有限個の素数を除いた奇素数だけを考えれば十分である．

と表し，r を法とする Dirichlet 指標 ψ に対して $\psi_{(r)}$ と $\psi^{(r)}$ でそれぞれ $\psi\varphi_{(r)}$ と $\psi\varphi^{(r)}$ を表すものとする．また r を法とする原始的 Dirichlet 指標 ψ に対して Gauss 和を

$$\tau(\psi) := \sum_{j=1}^{r} \psi(j)e(j/r)$$

で定義する．更に定数 ϵ_r を $r \equiv 1 \pmod 4$ ならば 1, $r \equiv 3 \pmod 4$ ならば $\sqrt{-1}$ と定めることにする．

命題 3. (1)

$$\hat{\phi}_1(y) = \begin{cases} 1 & \textit{if } y \in V_{\mathbf{Z}}^*, \\ 0 & \textit{if } y \notin V_{\mathbf{Z}}^*. \end{cases}$$

(2) r を $2|D|$ を割らない素数とし ψ を r を法とする原始的 *Dirichlet* 指標とする．

(i) m が偶数のとき

$$\hat{\phi}_\psi(y) = \begin{cases} r^{-m/2-1}\epsilon_r^{m+2}\varphi^{(D)}(r)\psi(-D)\tau(\psi)\tau(\bar{\psi})^{-1}\bar{\psi}(DQ^*(ry)) & \textit{if } y \in r^{-1}V_{\mathbf{Z}}^*, \\ 0 & \textit{if } y \notin r^{-1}V_{\mathbf{Z}}^*. \end{cases}$$

(ii) m が奇数で $\psi \neq \varphi_{(r)}$ のとき

$$\hat{\phi}_\psi(y) = \begin{cases} r^{-m/2-1}\epsilon_r^{m+2}\varphi^{(2D)}(r)\psi_{(r)}(-D) & \\ \quad \times\tau(\psi_{(r)})\tau(\bar{\psi})^{-1}\bar{\psi}_{(r)}(DQ^*(ry)) & \textit{if } y \in r^{-1}V_{\mathbf{Z}}^*, \\ 0 & \textit{if } y \notin r^{-1}V_{\mathbf{Z}}^*. \end{cases}$$

(iii) m が奇数で $\psi = \varphi_{(r)}$ のとき

$$\hat{\phi}_\psi(y) = \begin{cases} r^{-m/2-1}\alpha_{\varphi_{(r)}} & \textit{if } y \in r^{-1}V_{\mathbf{Z}}^*, \\ 0 & \textit{if } y \notin r^{-1}V_{\mathbf{Z}}^*, \end{cases}$$

ここで

$$\alpha_{\varphi_{(r)}} = \begin{cases} (r-1) \times (\epsilon_r\varphi^{(2)}(r))^{m+2}\varphi^{(D)}(r)\epsilon_r^{-1}r^{-1/2} & \textit{if } r \mid Q^*(ry), \\ -(\epsilon_r\varphi^{(2)}(r))^{m+2}\varphi^{(D)}(r)\epsilon_r^{-1}r^{-1/2} & \textit{if } r \nmid Q^*(ry) \end{cases}$$

である．

注意．m が奇数ならば $|D|$ は偶数でかつ $2|D|Q^*$ は整数係数である．m が偶数ならば $|D|Q^*$ は整数係数である．また m が偶数でかつ $|D| \equiv 2 \mod 4$ のとき $\varphi^{(D)}$ は $4|D|$ を法とする指標である．これらの事は保型形式に対応する Dirichlet 級数を構成する際に重要である．実際，得られる保型形式の level は m が奇数ならば $2|D|$, m が偶数ならば $|D|$ または $4|D|$ である．

命題3 (1) の証明は易しい. (2) の (i), (ii) は Stark [9], Theorem 1 により, (iii) は [9] の 式(36) より得られる.

準備ができたので概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) のゼータ積分とゼータ関数とを定義する.

$f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ とし ϕ は ϕ_1 または ϕ_ψ また $\hat{\phi}$ は $\hat{\phi}_1$ または $\hat{\phi}_\psi$ を表すものとする. 次の積分 $Z(f, \phi; w, s)$ と $Z^*(f^*, \hat{\phi}; w, s)$ $(w, s \in \mathbb{C})$ をゼータ積分という:

$$Z(f, \phi; w, s) := \int_{G^+/\Gamma} \chi_1(p,t)^w \chi(p,t)^s \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}} \setminus S_{\mathbb{Q}}} \phi(x) f(\rho(p,t)x) d_r g,$$

$$Z^*(f^*, \hat{\phi}; w, s) := \int_{G^+/\Gamma} \chi_1^*(p,t)^w \chi^*(p,t)^s \sum_{x \in V_{\mathbb{Q}}^* \setminus S_{\mathbb{Q}}^*} \hat{\phi}(x) f^*(\rho^*(p,t)x) d_r g.$$

ここで $g = \left(\begin{pmatrix} a & -2a\,{}^t uA & -aA[u] \\ 0 & 1_m & u \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, t \right)$ に対して $d_r g = 2t^{-1} a^{m-1} dt\, da\, du$ は G^+ の右不変測度である. 次にゼータ関数を $(\epsilon, \epsilon_1, \eta, \eta_1 = \pm 1)$ に対して,

$$\zeta_{\epsilon\epsilon_1}(\phi; w, s) := \sum_{x \in \Gamma \setminus V_{\epsilon\epsilon_1} \cap V_{\mathbb{Q}}} \phi(x) |x_{m+1}|^{-w} |Q(x)|^{-s},$$

$$\zeta_{\eta\eta_1}^*(\hat{\phi}; w, s) := \sum_{y \in \Gamma \setminus V_{\eta\eta_1}^* \cap V_{\mathbb{Q}}^*} \hat{\phi}(y) |y_0|^{-w} |Q^*(y)|^{-s},$$

と定義する. ここで ϵ_1 と η_1 はそれぞれ x_{m+1}, y_0 の符号であったから $\zeta_{\epsilon+} = \zeta_{\epsilon-}$ と $\zeta_{\eta+}^* = \zeta_{\eta-}^*$ が成り立つ. そこで,

$$\zeta_\epsilon(\phi; w, s) := \zeta_{\epsilon+}(\phi; w, s), \quad \zeta_\eta^*(\hat{\phi}; w, s) := \zeta_{\eta+}^*(\hat{\phi}; w, s)$$

だけを考えることにする. Sato [5], Theorem 1 によりこれらの関数は $\mathrm{Re}(w) > m$ かつ $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束する.

また, 上のゼータ関数と関係する Dirichlet 級数 $Z(n, w)$ と $Z^*(n, w)$ $(n \in \mathbb{Z})$ を

$$Z(n, w) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r(l, n)}{l^w}, \quad Z^*(n, w) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^*(l, n)}{l^w}$$

と定義する. ここで

$$r(l, n) = \sharp \{ v \in \mathbb{Z}^m/(l\mathbb{Z})^m |\, A[v] \equiv n \pmod{l} \},$$

であり, $r^*(l, n)$ は m が奇数ならば

$$r^*(l, n) = \sharp \left\{ v^* \in \mathbb{Z}^m / 2lA\mathbb{Z}^m |\ 2^{-1} \cdot |D| A^{-1}[v^*] \equiv n \pmod{2|D|l} \right\},$$

m が偶数ならば

$$r^*(l, n) = \sharp \left\{ v^* \in \mathbb{Z}^m / 2lA\mathbb{Z}^m |\ 4^{-1} \cdot |D| A^{-1}[v^*] \equiv n \pmod{|D|l} \right\}$$

である[2]. $Z(n,w)$ と $Z^*(n,w)$ は $\{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) > m\}$ で絶対収束する.

$Z(n,w)$, $Z^*(n,w)$, $\zeta_\epsilon(\phi; w,s)$ と $\zeta^*_\eta(\hat{\phi}; w,s)$ の間の関係は次の補題で与えられる.

補題 4. (1) m が偶数のとき,

$$\zeta_\epsilon(\phi_1; w,s) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(\epsilon n, w) n^{-s},$$

$$\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_1; w,s) = \begin{cases} |D|^s \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(\eta n, w) n^{-s} & \textit{if } |D| \not\equiv 2 \pmod 4, \\ (4|D|)^s \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(\eta n, w)(4n)^{-s} & \textit{if } |D| \equiv 2 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\zeta_\epsilon(\phi_\psi; w,s) = \psi(\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) Z(\epsilon n, w) n^{-s},$$

$$\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_\psi; w,s) = \begin{cases} c(\psi)\bar{\psi}(\eta \mathrm{sgn}(D))(|D|r^2)^s \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}(n) Z^*(\eta n, w) n^{-s} & \textit{if } |D| \not\equiv 2 \pmod 4, \\ c(\psi)\bar{\psi}(4^{-1}\eta \mathrm{sgn}(D))(4|D|r^2)^s & \\ \quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}(4n) Z^*(\eta n, w)(4n)^{-s} & \textit{if } |D| \equiv 2 \pmod 4) \end{cases}$$

となる. ここで,

$$c(\psi) = \frac{\epsilon_r^{m+2} \varphi^{(D)}(r) \psi(-D) \tau(\psi)}{\tau(\bar{\psi})}$$

である.

(2) m が奇数のとき,

$$\zeta_\epsilon(\phi_1; w,s) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(\epsilon n, w) n^{-s}, \quad \zeta^*_\eta(\hat{\phi}_1; w,s) = (2|D|)^s \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(\eta n, w) n^{-s},$$

$$\zeta_\epsilon(\phi_\psi; w,s) = \psi(\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) Z(\epsilon n, w) n^{-s},$$

$$\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_\psi; w,s) = \begin{cases} \bar{\psi}_{(r)}(\eta \mathrm{sgn}(D)) c(\psi)(2|D|r^2)^s \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_{(r)}(n) Z^*(\eta n, w) n^{-s} & \textit{if } \psi \neq \varphi_{(r)}, \\ c(\psi)(2|D|r^2)^s & \\ \quad \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} r Z^*(\eta r n, w)(rn)^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(\eta n, w) n^{-s}\right) & \textit{if } \psi = \varphi_{(r)} \end{cases}$$

である. ここで

$$c(\psi) = \begin{cases} \epsilon_r^{m+2} \varphi^{(2D)}(r) \psi_{(r)}(-2D) \tau(\psi_{(r)}) \tau(\bar{\psi})^{-1} & \textit{if } \psi \neq \varphi_{(r)}, \\ \epsilon_r^{m+1} \varphi^{(2D)}(r) r^{-1/2} & \textit{if } \psi = \varphi_{(r)} \end{cases}$$

である[3].

---

[2] この Dirichlet 級数 $Z(n,w)$ は [3] の $L(w,n;1,A)$ と同じもので Peter により研究されている.

[3] この補題により Peter が A を正定値として [3] で考察した関数 $\tilde{\tau}$ が, $\phi = \phi_1$ に対する本稿のゼータ関数と同じものであることを示している.

次の命題はゼータ積分とゼータ関数の間の関係式を与える.

命題 5. ゼータ積分 $Z(f,\phi;w,s)$, $Z^*(f^*,\hat{\phi};w,s)$ とゼータ関数 $\zeta_\epsilon(\phi;w,s)$, $\zeta^*_\eta(\hat{\phi};w,s)$ は $\mathrm{Re}(w)>m$, $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し, 次の関係式を満たす:

$$Z(f,\phi;w,s)=\sum_\epsilon \zeta_\epsilon(\phi;w,s)\Phi_\epsilon(f;w-m,s-1),$$
$$Z^*(f^*,\hat{\phi};w,s)=\sum_\eta \zeta^*_\eta(\hat{\phi};w,s)\Phi^*_\eta(f^*;w-m,s-1).$$

次にゼータ積分の関数等式を記述するために $Z_+(f,\phi;w,s)$ と $Z^*_+(f^*,\phi;w,s)$ を

$$Z_+(f,\phi;w,s)=\int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma,\ \chi(p,t)\geq 1}\chi_1(p,t)^w\chi(p,t)^s\sum_{x\in V_{\mathbb{Q}}\setminus S_{\mathbb{Q}}}\phi(x)f(\rho(p,t)x)d_rg,$$
$$Z^*_+(f^*,\phi;w,s)=\int_{G_{\mathbb{R}}/\Gamma,\ \chi^*(p,t)\geq 1}\chi^*_1(p,t)^w\chi^*(p,t)^s\sum_{x\in V^*_{\mathbb{Q}}\setminus S^*_{\mathbb{Q}}}\phi(x)f^*(\rho^*(p,t)x)d_rg$$

で定義する. これらの関数は

$$\mathfrak{D}=\left\{(w,s)\in\mathbb{C}^2\,\middle|\,\mathrm{Re}(w)>m\right\}$$

の正則関数である.

命題 6. $\mathrm{Re}(w)>m$, $\mathrm{Re}(s)>1$ とし $f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ とする.

(1)

$$\begin{aligned}
Z(f,\phi_1;w,s)=&Z_+(f,\phi_1;w,s)+Z^*_+(\hat{f},\hat{\phi}_1;w,m/2+1-w-s)\\
&+\frac{|D|^{-1}Z^*(0,w)}{w+s-m/2-1}\Sigma^*(\hat{f};w-m/2+1)\\
&+\frac{\zeta(w-m+1)}{s-1}\sum_\epsilon\Phi_\epsilon(f;w-m,0)\\
&-\frac{Z(0,w)}{s}\Sigma(f;w-m/2+1)\\
&-\frac{\zeta(w-m+1)}{w+s-m/2}\sum_\eta\Phi^*_\eta(\hat{f};w-m,0)
\end{aligned}$$

が成り立つ. また $Z^*(f,\hat{\phi}_1;w,s)$ も上と同様の等式を満たす.

(2) ψ を $2|D|$ を割らない奇素数 r を法とする *Dirichlet* 指標とする.

$$\begin{aligned}Z(f,\phi_\psi;w,s) =& Z_+(f,\phi_\psi;w,s)+Z_+^*(\hat{f},\hat{\phi}_\psi;w,m/2+1-w-s\\ &+\frac{\hat{\phi}_\psi(0)|D|^{-1}Z^*(0,w)}{w+s-m/2-1}\Sigma^*(\hat{f};w-m/2+1)\\ &+\frac{\hat{\phi}_\psi(0)r^{m-w}\zeta(w-m+1)}{s-1}\sum_\epsilon\Phi_\epsilon(f;w-m,0)\end{aligned}$$

が成り立つ. また $Z^*(f,\hat{\phi}_\psi;w,s)$ も上と同様の等式を満たす.

系 7. $\phi=\phi_1$ または ϕ_ψ に対して $Z(f,\phi;w,s)$ と $Z^*(\hat{f},\hat{\phi};w,s)$ とは $\{(w,s)\in$ における有理型関数に解析接続され, 次の関数等式を満たす:

$$Z(f,\phi;w,s)=Z^*(\hat{f},\hat{\phi};w,m/2+1-w-s).$$

系 8. $f\in C_0^\infty(V_\epsilon)$ とすると次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(1)\quad Z(f,\phi_1;w,s) =& Z_+(f,\phi_1;w,s)+Z_+^*(\hat{f},\hat{\phi}_1;w,m/2+1-w-s)\\ &+\frac{2|D|^{-1/2}(2\pi)^{m/2-w}\Gamma(w-m/2)Z^*(0,w)}{w+s-m/2-1}\\ &\times\cos\frac{\pi}{4}(p-q+\epsilon(m-2w))\Phi_\epsilon(f;w-m,m/2-w)\\ &+\frac{\zeta(w-m+1)}{s-1}\Phi_\epsilon(f;w-m,0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad Z(f,\phi_\psi;w,s) =& Z_+(f,\phi_\psi;w,s)+Z_+^*(\hat{f},\hat{\phi}_\psi;w,m/2+1-w-s)\\ &+\frac{\hat{\phi}_\psi(0)|D|^{-1/2}(2\pi)^{m/2-w}\Gamma(w-m/2)Z^*(0,w)}{w+s-m/2-1}\\ &\times\cos\frac{\pi}{4}(p-q+\epsilon(m-2w))\Phi_\epsilon(f;w-m,m/2\\ &+\frac{\hat{\phi}_\psi(0)r^{m-w}\zeta(w-m+1)}{s-1}\Phi_\epsilon(f;w-m,0).\end{aligned}$$

本稿では述べないが, この系 7 および系 8 はゼータ関数の関数等式の証 極と留数の計算に利用される.

3. 主結果

次の定理はゼータ関数 $\zeta_\epsilon(\phi;w,s)$ と $\zeta_\eta^*(\hat{\phi};w,s)$ $(\phi=\phi_1$ または $\phi=\phi_\psi)$ 成り立つ関数等式と極および留数を与えている.

定理 9. ゼータ関数 $\zeta_\epsilon(\phi;w,s)$ と $\zeta^*_\eta(\hat{\phi};w,s)$ ($\phi=\phi_1$ または $\phi=\phi_\psi$) は領域$\mathfrak{D}$ において有理型関数として解析接続され[4]次の性質を持つ.

(1) $\phi=\phi_1$ または ϕ_ψ に対して次の関数等式を満たす:

$$\begin{pmatrix}\zeta^*_+\\ \zeta^*_-\end{pmatrix}\left(\hat{\phi};w,\frac{m}{2}+1-w-s\right)={}^t\gamma(w,s)\begin{pmatrix}\zeta_+\\ \zeta_-\end{pmatrix}(\phi;w,s).$$

ここで，$\gamma(w,s)$ は定理 1 で用いた記号である.

(2) $\mathrm{Re}(w)>m$ となる w を一つ決めて固定する. このとき，

(i) 関数 $(s-1)(s+w-m/2-1)\zeta_\epsilon(\phi_1;w,s)$ は全 s 平面で正則であり $\zeta_\epsilon(\phi_1;w,s)$ の留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_\epsilon(\phi_1;w,s)=\zeta(w-m+1),$$

$$\operatorname*{Res}_{s=m/2+1-w}\zeta_\epsilon(\phi_1;w,s)=\frac{2\Gamma\left(w-\frac{m}{2}\right)Z^*(0,w)}{|D|^{1/2}(2\pi)^{w-m/2}}\cos\frac{\pi(p-q+\epsilon(m-2w))}{4}$$

で与えられる.

(ii) 関数 $(s-1)(s+w-m/2-1)\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_1;w,s)$ は全 s 平面で正則であり $\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_1;w,s)$ の留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_1;w,s)=\zeta(w-m+1),$$

$$\operatorname*{Res}_{s=m/2+1-w}\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_1;w,s)=\frac{2\Gamma\left(w-\frac{m}{2}\right)Z(0,w)}{|D|^{1/2}(2\pi)^{w-m/2}}\cos\frac{\pi(q-p+\eta(m-2w))}{4}$$

で与えられる.

(iii) m が偶数または $\psi\neq\varphi_{(r)}$ のとき，関数 $\zeta_\epsilon(\phi_\psi;w,s)$ と$\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_\psi;w,s)$ は全 s 平面で正則である.

(iv) m が奇数でかつ $\psi=\varphi_{(r)}$ のとき，関数 $(s-1)(s+w-m/2-1)\zeta_\epsilon(\phi_{\varphi_{(r)}};w,s)$ と $\zeta^*_\eta(\hat{\phi}_{\varphi_{(r)}};w,s)$ は全 s 平面で正則であり，$\zeta_\epsilon(\phi_{\varphi_{(r)}};w,s)$ の留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta_\epsilon(\phi_{\varphi_{(r)}};w,s)=r^{m/2-w-1}\alpha\zeta(w-m+1),$$

$$\operatorname*{Res}_{s=m/2+1-w}\zeta_\epsilon(\phi_{\varphi_{(r)}};w,s)=\frac{2\alpha\Gamma\left(w-\frac{m}{2}\right)Z(0,w)}{|D|^{1/2}(2\pi)^{w-m/2}}\cos\frac{\pi(q-p+\eta(m-2w))}{4}$$

で与えられる. ここで，$\alpha=(r-1)\times\epsilon_r^{m+1}\varphi^{(2D)}(r)r^{-1/2}$ である.

この定理の関数等式は定理 1, 命題 5 および系7 から導かれる. 極と留数の計算には系8 を用いる.

$k>(m+\epsilon(q-p)-2)/4$ とし $w=c(\epsilon,k)+m/2$ とおく. ここで，定数 $c(\epsilon,k)=2k+1+\epsilon(p-q)/2$ であり，k に対する仮定により $w=c(\epsilon,k)+m/2>m$ となる.

---

[4]Peter [3] の結果を用いれば変数 w に関しても解析接続することができる.

このとき定理の γ-行列 $\gamma(w,s)$ は上半三角行列または下半三角行列になっており，特にゼータ関数について次の 1 対 1 の関数等式が得られる．この関数等式を基にして命題 10, 11 が得られる．それらの関数等式が Weil 型の逆定理の条件となっている関数等式である．指標をつけた場合も付けない場合も関数等式を統一的に記述できる点が概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いた一番の利点である:

$$\begin{aligned}&|D|^{1/2}(2\pi)^{-(c(\epsilon,k)+1-s)}\Gamma(c(\epsilon,k)+1-s)\zeta_\epsilon^*\left(\hat\phi; c(\epsilon,k)+\frac{m}{2}, 1-s\right)\\&=(-1)^{k+1}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta_\epsilon\left(\phi; c(\epsilon,k)+\frac{m}{2}, s-c(\epsilon,k)\right)\end{aligned}$$

次の Dirichlet 級数 $L_\epsilon(k;s)$ と $L_\epsilon^*(k;s)$ を考えよう．これらの Dirichlet 級数が保型形式の Mellin 変換になっているのである:

$$\begin{aligned}L_\epsilon(k;s)&:=\zeta_\epsilon\left(\phi_1; c(\epsilon,k)+\frac{m}{2}, s-c(\epsilon,k)\right)=\sum_{n=1}^\infty a_\epsilon(k;n)n^{-s},\\L_\epsilon^*(k;s)&:=(-1)^{k+1}|D|^{1/2}D(A)^{c(\epsilon,k)/2+1/2-s}\zeta_\epsilon^*\left(\hat\phi_1; c(\epsilon,k)+\frac{m}{2}, s-c(\epsilon,k)\right)\\&=\sum_{n=1}^\infty b_\epsilon(k;n)n^{-s}.\end{aligned}$$

ここで,

$$D(A)=\begin{cases}|D| & m \text{ が偶数かつ } |D|\not\equiv 2,\\ 4|D| & m \text{ が偶数かつ } |D|\equiv 2,\\ 2|D| & m \text{ が奇数},\end{cases}$$

$$a_\epsilon(k;n)=n^{c(\epsilon,k)}Z\left(\epsilon n, c(\epsilon,k)+\frac{m}{2}\right),$$

そして，更に m が奇数または m が偶数で $|D|\not\equiv 2$ のとき,

$$b_\epsilon(k;n)=(-1)^{k+1}D(A)^{1-c(\epsilon,k)/2}n^{c(\epsilon,k)}Z^*\left(\epsilon n, c(\epsilon,k)+\frac{m}{2}\right)$$

とおき，m が偶数かつ $|D|\equiv 2$ のときには

$$b_\epsilon(k;n)=\begin{cases}(-1)^{k+1}D(A)^{1-c(\epsilon,k)/2}n^{c(\epsilon,k)}Z^*\left(\frac{\epsilon n}{4}, c(\epsilon,k)+\frac{m}{2}\right) & 4\mid n \text{ のとき},\\ 0 & 4\nmid n \text{ のとき},\end{cases}$$

とおく．

正整数 N に対し,

$$\Lambda_N(s;k,L_\epsilon)=\left(\frac{2\pi}{\sqrt N}\right)^{-s}\Gamma(s)L_\epsilon(k;s),\quad \Lambda_N(s;k,L_\epsilon^*)=\left(\frac{2\pi}{\sqrt N}\right)^{-s}\Gamma(s)L_\epsilon^*(k;s)$$

とおくと，定理からただちに次の命題が得られる．

命題 10. 関数 $\Lambda_{D(A)}(s;k,L_\epsilon)$ と $\Lambda_{D(A)}(s;k,L^*_\epsilon)$ は全平面で有理型であり，次の関数等式を満たす:

$$\Lambda_{D(A)}(1+c(\epsilon,k)-s;k,L^*_\epsilon)=\Lambda_{D(A)}(s;k,L_\epsilon).$$

更に $\Lambda_{D(A)}(s;k,L_\epsilon)$ は $s=0$ と $s=c(\epsilon,k)+1$ に 1 位の極を持ち，その留数は

$$\frac{(-1)^{k+1}|D|^{1/2}\Gamma(c(\epsilon,k)+1)\zeta\left(c(\epsilon,k)-\frac{m}{2}+1\right)}{(2\pi)^{c(\epsilon,k)+1}}\quad(s=0),$$
$$\frac{D(A)^{1/2(c(\epsilon,k)+1)}\Gamma(c(\epsilon,k)+1)\zeta\left(c(\epsilon,k)-\frac{m}{2}+1\right)}{(2\pi)^{c(\epsilon,k)+1}}\quad(s=c(\epsilon,k)+1)$$

である.

r を $2|D|$ を割らない素数とする. r を法とする原始的 Dirichlet 指標 ψ に対して, Dirichlet 級数 $L_\epsilon(k;s,\psi)$ と $L^*_\epsilon(k;s,\psi)$ とを次で定義する:

$$L_\epsilon(k;s,\psi):=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)a_\epsilon(k;n)n^{-s},$$
$$L^*_\epsilon(k;s,\psi):=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)b_\epsilon(k;n)n^{-s} & \psi\neq\varphi_{(r)}\text{ のとき},\\ r\sum_{n=1}^{\infty}b_\epsilon(k;rn)(rn)^{-s}-\sum_{n=1}^{\infty}b_\epsilon(k;n)n^{-s} & \psi=\varphi_{(r)}\text{ のとき}.\end{cases}$$

特に，補題 4 および $a_\epsilon(k;n)$ と $b_\epsilon(k,n)$ の定義により m が偶数または m が奇数で $\psi\neq\varphi_{(r)}$ のとき

$$L_\epsilon(k;s,\psi)=\psi(\epsilon)\zeta_\epsilon\left(\phi_\psi;c(\epsilon,k)+\frac{m}{2},s-c(\epsilon,k)\right)$$
$$L^*_\epsilon(k;s,\bar\psi)=(-1)^{k+1}|D|^{1/2}(rD(A)^{1/2})^{c(\epsilon,k)+1-2s}C_\psi^{-1}\bar\psi(\epsilon)\zeta^*_\epsilon\left(\hat\phi_\psi;c(\epsilon,k)+\frac{m}{2},s-c(\epsilon,k)\right)$$

また m が奇数で $\psi=\varphi_{(r)}$ のときには,

$$L^*_\epsilon(k;s,\bar\psi)=(-1)^{k+1}|D|^{1/2}(rD(A)^{1/2})^{c(\epsilon,k)+1-2s}C_\psi^{-1}\zeta^*_\epsilon\left(\hat\phi_\psi;c(\epsilon,k)+\frac{m}{2},s-c(\epsilon,k)\right)$$

となる. ここで定数 C_ψ は

$$C_\psi=\begin{cases}\varphi^{((-1)^{m/2+1}D)}(r)\psi(-|D|)\tau(\psi)/\tau(\bar\psi) & m\text{ が偶数}, |D|\not\equiv 2,\\ \varphi^{((-1)^{m/2+1}4D)}(r)\psi(-4|D|)\tau(\psi)/\tau(\bar\psi) & m\text{ が偶数}, |D|\equiv 2,\\ \epsilon_r^{-2c(\epsilon,k)-2}\varphi^{(2|D|)}(r)\psi(-2|D|)\varphi_{(r)}(2|D|)\tau(\psi_{(r)})/\tau(\bar\psi) & m\text{ が奇数}, \psi\neq\varphi_{(r)},\\ \epsilon_r^{-2c(\epsilon,k)-1}\varphi^{(2|D|)}(r)r^{-1/2} & m\text{ が奇数}, \psi=\varphi_{(r)}\end{cases}$$

正整数 N に対して

$$\Lambda_N(s;k,L_\epsilon,\psi)=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{-s}\Gamma(s)L_\epsilon(k;s,\psi),$$
$$\Lambda_N(s;k,L_\epsilon^*,\bar{\psi})=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{-s}\Gamma(s)L_\epsilon^*(k;s,\bar{\psi})$$

とおくとき，次の命題を示すことができる．

命題 11. r は $2|D|$ を割らない素数とし，ψ は r を法とする原始的 *Dirichlet* 指標とする．そのとき関数$\Lambda_{D(A)r^2}(s;k,L_\epsilon,\psi)$ と$\Lambda_{D(A)r^2}(s;k,L_\epsilon^*,\bar{\psi})$ は s について有理型に解析接続され，次の関数等式を満たす:

$$\Lambda_{D(A)r^2}(s;k,L_\epsilon,\psi)=C_\psi\Lambda_{D(A)r^2}(c(\epsilon,k)+1-s;L_\epsilon^*,\bar{\psi}).$$

特に，関数 $\Lambda_{D(A)r^2}(s;k,L_\epsilon,\psi)$ は m が偶数または $\psi\neq\varphi_{(r)}$ のときは正則である．m が奇数のとき，関数 $\Lambda_{D(A)r^2}(s;k,L_\epsilon,\varphi_{(r)})$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で $s=c(\epsilon,k)+1$ に一位の極を持つ．その留数は

$$\frac{D(A)^{1/2(c(\epsilon,k)+1)}\Gamma(c(\epsilon,k)+1)\zeta\left(c(\epsilon,k)-\frac{m}{2}+1\right)}{(2\pi)^{c(\epsilon,k)+1}}r^{-1/2}(r-1)\epsilon_r^{-1-2c(\epsilon,k)}\varphi^{(2|D|)}(r)$$

である．

$\mathfrak{H}$ を複素上半平面とし，$\mathfrak{G}_k(N,\chi)$ で重さが整数 k, 指標 χ の $\Gamma_0(N)$ 正則保型形式の空間を，$G_k(N,\chi)$ で重さが半整数 k, 指標 χ の $\Gamma_0(N)$ 正則保型形式の空間を表すことにする．次の定理が本稿の主定理である[5]

定理 12. k を $c(\epsilon,k)>m/2$ となる正整数とする． $\{a_\epsilon(k;n)\}_{n\geq1}$, $\{b_\epsilon(k;n)\}_{n\geq1}$ を上のとおりとし，$a_\epsilon(k;0)$, $b_\epsilon(k;0)$ を次で定義する:

$$a_\epsilon(k;0)=\frac{(-1)^{k+1}|D|^{1/2}\Gamma(c(\epsilon,k)+1)\zeta\left(c(\epsilon,k)-\frac{m}{2}+1\right)}{(2\pi)^{c(\epsilon,k)+1}},$$
$$b_\epsilon(k;0)=\frac{D(A)^{1/2(c(\epsilon,k)+1)}\Gamma(c(\epsilon,k)+1)\zeta\left(c(\epsilon,k)-\frac{m}{2}+1\right)}{(2\pi)^{c(\epsilon,k)+1}}.$$

(1) m が偶数のとき，

$$f_\epsilon(k;z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_\epsilon(k;n)e(nz),\quad g_\epsilon(k;z)=\sqrt{-1}^{-c(\epsilon,k)-1}\sum_{n=0}^{\infty}b_\epsilon(k;n)e(nz)\quad(z\in\mathfrak{H})$$

[5]この主定理と定理 9 はこれまでに得られているいくつかの結果を含んでいる．$m=1$, $A=(1)$ の場合の定理 9 は [?] において新谷により得られている．$m=2$, $(p,q)=(0,2)$ の場合定理 9 と主定理は [10] で得られている．また A が正定値という仮定の下で定理 9 の関数等式は Peter により得られ

とおくと，$f_\epsilon(k;z)$ と $g_\epsilon(k;z)$ は $|D|\not\equiv 2$ ならば共に $\mathfrak{G}_{c(\epsilon,k)+1}(|D|,\varphi^{((-1)^{m/2+1}D)})$ に属し $|D|\equiv 2$ ならば $\mathfrak{G}_{c(\epsilon,k)+1}(4|D|,\varphi^{((-1)^{m/2+1}4D)})$ に属す．更に，次の関係式を満たす:

$$g_\epsilon(k;z)=(D(A)^{1/2}z)^{-c(\epsilon,k)-1}f_\epsilon\left(k;\frac{-1}{D(A)z}\right).$$

(2) m が奇数のとき，

$$f_\epsilon(k;z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_\epsilon(k;n)e(nz),\quad g_\epsilon(k;z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_\epsilon(k;n)e(nz)\quad(z\in\mathfrak{H})$$

とおけば，$f_\epsilon(k;z)$ は $G_{c(\epsilon,k)+1}(2|D|,\varphi^{(2|D|)})$ に属し，$g_\epsilon(k;z)$ は $G_{c(\epsilon,k)+1}(2|D|,\mathrm{id}_{2|D|})$ に属する．更に次の関係式を満たす:

$$g_\epsilon(k;z)=(-\sqrt{-1}D(A)^{1/2}z)^{-c(\epsilon,k)-1}f_\epsilon\left(k;\frac{-1}{D(A)z}\right).$$

この主定理は関数 $\Lambda_{D(A)}(s;k,L_\epsilon)$ と $\Lambda_{D(A)r^2}(s;k,L_\epsilon,\psi)$ が Weil 型の逆定理の条件を満たすことから示される．

References

1. T. Miyake, Modular forms, Springer, 1989.
2. M. Muro, A note on the holonomic system of invariant hyperfunctions on a certain prehomogeneous vector space, Algebraic Analysis, vol. 2 (1988), 493–503.
3. M. Peter, Dirichlet series in two variables, J. reine angew. Math. 522 (2000), 27–50.
4. F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: functional equations, Tohoku Math. J. 34 (1982), 437–483.
5. F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II: a convergence criterion, Tohoku Math. J. 35 (1983), 77–99.
6. F. Sato, On functional equations of zeta distributions, Adv. Studies in pure Math. 15 (1989), 465–508.
7. G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. 97 (1973), 440–481.
8. T. Shintani, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 22 (1975), 25–65.
9. H.M. Stark, L-functions and character sums for quadratic forms (I), Acta Arithmetica XIV (1968), 35–50.
10. T. Ueno, Modular forms arising from zeta functions in two-variable attached to the space of binary hermitian forms, J. Number Theory, 86 (2001), 302–329
11. T. Ueno, Modular forms arising from zeta functions in two variables attached to prehomogeneous vector spaces acted on by maximal parabolic subgroups of orthogonal groups, *preprint*
12. T. Ueno, Cohen 型の保型形式と概均質ベクトル空間, 数理解析研究所講究録 **1103**(1999), 46–59