数理解析研究所講究録 1238 巻 2001 年 20-29

Bohr-Mollerupの定理の一般化と局所関数等式のΓ-因子について

筑波大学数学研究科　藤上雅樹 (Masaki Fujigami)

1 はじめに

本稿ではBohr-Mollerupの定理として知られているガンマ関数の特徴付けを一般化することによって, ある条件の下で概均質ベクトル空間の局所関数等式のΓ-因子の明示的な表示を導く. なおこの結果は井草準一氏の結果 [4] の多変数化になっており, また異なる方法で天野勝利氏によっても同様の結果が得られている (本講究録の天野氏の稿を参照).

本稿を通じて以下の記号を用いる:

$$E_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \cdots, 0),$$
$$E = E_1 + \cdots + E_r = (1, \cdots, 1).$$

2 Bohr-Mollerupの定理の一般化

$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(s)$ が $s \gg 0$ に於いて次の三条件:

(i) $0 < f(s) < \infty$,

(ii) $\frac{d^2}{ds^2} \log f(s) \geq 0$,

(iii) $f(s+1) = sf(s)$

を満たせば $f(s)$ は $\Gamma(s)$ の定数倍であることが知られている (Bohr-Mollerupの定理). 即ち, 条件 (i),(ii),(iii) によって (定数倍を除き) ガンマ関数が特徴付けられるのである. 本節では変数 s を r 変数 $s = (s_1, \cdots, s_r)$ とし, これらの条件を

(I) $0 < f(s) < \infty$,

(II) $\frac{\partial^2}{\partial {s_i}^2} \log f(s) \geq 0 \qquad (i = 1, \cdots, r)$,

(III) 多項式の組 $h = (h_1, \cdots, h_r)$ が存在して,
$$f(s + E_i) = h_i(s) f(s) \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

と一般化したときにはどのような関数が特徴付けられるのかを説明する.

ここでまず注意すべきなのは多項式の組 $h=(h_1(s),\cdots,h_r(s))$ は任意に取ることはできないという事である. つまりこの関数方程式を満たす関数 $f(s)$ が存在すれば $f(s+E_i+E_j)$ が

$$f(s+E_i+E_j)=h_j(s+E_i)h_i(s)f(s)=h_i(s+E_j)h_j(s)f(s)$$

と二通りに書けるので多項式の組 h は

条件 (A) $\qquad h_i(s)h_j(s+E_i)=h_i(s+E_j)h_j(s) \qquad (i,j=1,\cdots,r)$

を満たさねばならない. そして, この条件 (A) から次の命題が示される ([3] 参照).

命題 2.1
$h=(h_1(s),\cdots,h_r(s))$ が条件 (A) を満たす多項式の組とする. このとき各多項式 $h_i(s)$ は次のように書ける.

$$h_i(s)=a_i\prod_{k=1}^{\deg h_i}(e_{i,k}(s)+\beta_{i,k}), \quad e_{i,k}(s):e_{i,k}(E)=1 \text{ となる } s_1,\cdots,s_r \text{の一次結合.}$$

□

各多項式 $h_i(s)$ は命題 1.1 のように既約因子分解し, $a_i>0$ $(i=1,\cdots,r)$ であるような条件 (A) を満たす多項式の組 $h=(h_1(s),\cdots,h_r(s))$ が与えられたとする. $\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数 $\Gamma_h(s)$ を

$$\Gamma_h(s):=\prod_{i=1}^{r}\left(a_i^{s_i}\prod_{k=1}^{\deg h_i}\Gamma\left(e_{i,k}(s+E_1+\cdots+E_{i-1})+\beta_{i,k}\right)\right)$$

と定めれば, この関数 $\Gamma_h(s)$ が条件 (I),(II),(III) によって (定数倍を除き) 特徴付けられる関数であることが示される ([3] 参照). 即ち Bohr-Mollerup の定理の一般化として次の定理が得られる.

定理 2.2
$\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数 $f(s)$ が $s_1\gg 0,\cdots,s_r\gg 0$ に於いて

(I) $0<f(s)<\infty$

(II) $\frac{\partial^2}{\partial {s_i}^2}\log f(s)\geq 0, \qquad (i=1,\cdots,r)$

(III) 多項式の組 $h=(h_1,\cdots,h_r)$ が存在して,
$f(s+E_i)=h_i(s)f(s), \qquad (i=1,\cdots,r)$

を満たすならば

$$f(s)=(\text{定数})\cdot\Gamma_h(s).$$

3 $\mathbb{C}$ 上の局所関数等式の Γ-因子

本節では $\mathbb{C}$ 上の局所関数等式について説明し, 定理 2.2 を用いてその Γ-因子を計算する.

3.1 $\mathbb{C}$ 上の基本定理

(G,ρ,V) を次の条件を満たす概均質ベクトル空間とする.

(i) G は reductive 代数群である.

(ii) 特異集合 S は超曲面である.

(G,ρ,V) の基本相対不変式を $f_1,\cdots,f_r$ とし,(G,ρ^*,V^*) の基本相対不変式を $f_1^*,\cdots,f_r^*$ とする. ここで適当な V の基底とその双対基底をとり $V\cong\mathbb{C}^n\cong V^*$ ($n=\dim V$) という同型を与える. これによって V 及び V^* を $\mathbb{C}^n$ と同一視して考えるのだが, $\mathbb{C}^n$ の基底をうまくとることで $f_i^*(x)=\overline{f}_i(x)$ とできることが知られている ([1] § 2.3 参照). 以下この基底で考える.

$\mathbb{C}$ 上の Fourier 変換
$\mathbb{C}^n$ 上の急減少関数 $\Phi(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{\Phi}(x)$ を次で定める.

$$\widehat{\Phi}(x):=\int_{\mathbb{C}^n}\Phi(y)e^{4\pi i\,\mathrm{Re}({}^t xy)}dy.$$

ここで dy は $\mathbb{C}^n$ 上の self dual measure である. 即ち $\mathbb{C}^n$ 上の Haar measure であって $\widehat{\widehat{\Phi}}(x)=\Phi(-x)$ となるように正規化されたものとする. 具体的には $y=u+iv$ ($u,v\in\mathbb{R}^n$) とし du,dv を $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue measure として, $dy=2du\,dv$ とすれば良い.□

$\mathbb{C}^n$ 上の急減少関数 $\Phi(x)$ に対して

$$Z(\Phi;s)=\int_{\mathbb{C}^n}|f(x)|_{\mathbb{C}}^{s}\Phi(x)dx$$

とおく. ここで $|f(x)|_{\mathbb{C}}^{s}$ は $|f_1(x)|_{\mathbb{C}}^{s_1}\cdots|f_r(x)|_{\mathbb{C}}^{s_r}$ を略記したものであり, $|f_i(x)|_{\mathbb{C}}=f_i(x)\overline{f_i(x)}$ である. $Z(\Phi;s)$ は $\mathrm{Re}\,s_1>0,\cdots,\mathrm{Re}\,s_r>0$ で収束して正則関数を定める. このとき次の定理が知られている. ([2] 参照).

$\mathbb{C}$ 上の基本定理
勝手な急減少関数 $\Phi(x)$ に対して $Z(\Phi;s)$ は $\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数に解析接続される. そしてこの解析接続されたものも同じ記号で表すことにし, 次の等式が成り立つ.

$$Z(\widehat{\Phi};s-\kappa)=c(s)Z(\Phi;-s). \tag{3.1}$$

ここで $\kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_r)$ は $g\in G$ に対し

$$f_1(\rho(g)x)^{2\kappa_1}\cdots f_r(\rho(g)x)^{2\kappa_r}=\det g^2 f_1(x)^{2\kappa_1}\cdots f_r(x)^{2\kappa_r}$$

を満たすものであり, $c(s)$ は $\Phi(x)$ に依らない $\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数である. □

等式(3.1) が $\mathbb{C}$ 上の局所関数等式と呼ばれるものであり, $c(s)$ が (局所関数等式の)Γ-因子と呼ばれるものである.

3.2 $\mathbb{C}$ 上の Γ-因子

多項式 $b_i(s)$ を

$$f_i^*(\tfrac{\partial}{\partial x})f(x)^{s+E_i}=b_i(s)f(x)^s \qquad (i=1,\cdots,r)$$

を満たすものとする ($f(x)^s$ は $f_1(x)^{s_1}\cdots f_r(x)^{s_r}$ を略記したもの). また

$$\varphi(x)=e^{-2\pi {}^t x\overline{x}} \qquad (x\in\mathbb{C}^n)$$

とおく. $\varphi(x)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の急減少関数であり, $\widehat{\varphi}(x)=\varphi(x)$ を満たすことが知られている.

補題 3.1
$Z(\varphi;s)$ は $s_1>0,\cdots,s_r>0$ に於いて次の三条件を満たす:

(i) $0<Z(\varphi;s)<\infty$,

(ii) $\frac{\partial^2}{\partial s_i^2}\log Z(\varphi;s)\geq 0 \qquad (i=1,\cdots,r)$,

(iii) $Z(\varphi;s+E_i)=(2\pi)^{-\deg b_i}b_i(s)Z(\varphi;s) \qquad (i=1,\cdots,r)$.

□

[証明]
(i) は明らかである.
(ii) について.$Z(\varphi;s)$ を単に Z と書くことにする.

$$\frac{\partial}{\partial s_i}Z=\int_{\mathbb{C}^n}\log|f_i(x)|_{\mathbb{C}}\cdot|f(x)|_{\mathbb{C}}^s\varphi(x)dx$$
$$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2}Z=\int_{\mathbb{C}^n}(\log|f_i(x)|_{\mathbb{C}})^2\cdot|f(x)|_{\mathbb{C}}^s\varphi(x)dx$$

であることより

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{C}^n} \left(\log |f_i(x)|_{\mathbb{C}} - \frac{\frac{\partial}{\partial s_i} Z}{Z} \right)^2 \cdot |f(x)|_{\mathbb{C}}^s \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} (\log |f_i(x)|_{\mathbb{C}})^2 \cdot |f(x)|_{\mathbb{C}}^s \varphi(x) dx \\
&\quad - 2 \frac{\frac{\partial}{\partial s_i} Z}{Z} \int_{\mathbb{C}^n} \log |f_i(x)|_{\mathbb{C}} \cdot |f(x)|_{\mathbb{C}}^s \varphi(x) dx \\
&\quad + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial s_i} Z}{Z} \right)^2 \int_{\mathbb{C}^n} |f(x)|_{\mathbb{C}}^s \varphi(x) dx \\
&= Z \cdot \frac{Z \cdot \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} Z - (\frac{\partial}{\partial s_i} Z)^2}{Z^2} \\
&= Z \cdot \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} \log Z
\end{aligned}
$$

となり,$Z > 0$ であるので (ii) がいえる.
(iii) について.

$$
\begin{aligned}
b_i(s) Z(\varphi; s) &= \int_{\mathbb{C}^n} b_i(s) f(x)^s \overline{f(x)}^s e^{-2\pi {}^t x \overline{x}} dx \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} [f_i^*(\tfrac{\partial}{\partial x}) f(x)^{s+E_i}] \overline{f(x)}^s e^{-2\pi {}^t x \overline{x}} dx
\end{aligned}
$$

部分積分により

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{C}^n} f(x)^{s+E_i} \overline{f(x)}^s [f_i^*(-\tfrac{\partial}{\partial x}) e^{-2\pi {}^t x \overline{x}}] dx \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} f(x)^{s+E_i} \overline{f(x)}^s f_i^*(2\pi \overline{x}) e^{-2\pi {}^t x \overline{x}}] dx
\end{aligned}
$$

$f_i^*(2\pi \overline{x}) = (2\pi)^{\deg f_i} f_i^*(\overline{x}) = (2\pi)^{\deg f_i} \overline{f_i(x)}$ より

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{\deg f_i} \int_{\mathbb{C}^n} f(x)^{s+E_i} \overline{f(x)}^{s+E_i} e^{2\pi {}^t x \overline{x}} dx \\
&= (2\pi)^{\deg f_i} Z(\varphi; s+E_i)
\end{aligned}
$$

であり,$\deg f_i = \deg b_i$ であるから (iii) がいえる. ■

補題 3.1 と定理 2.2 より多項式の組 $h = (h_1, \cdots, h_r)$ を $h_i(s) = (2\pi)^{-\deg b_i} b_i(s)$ ととると,$c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して

$$
Z(\varphi; s) = c\Gamma_h(s)
$$

であることがわかる.

そして $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ であることより, $\mathbb{C}$ 上の局所関数等式(3.1) で $\Phi(x)$ として $\varphi(x)$ をとれば

$$c(s) = \frac{Z(\varphi; s-\kappa)}{Z(\varphi; -s)}$$

となるので次の定理を得る.

定理 3.2
多項式の組 $h = (h_1, \cdots, h_r)$ を $h_i(s) = (2\pi)^{-\deg b_i} b_i(s)$ ととると,

$$c(s) = \frac{\Gamma_h(s-\kappa)}{\Gamma_h(-s)}.$$

□

4 $\mathbb{R}$ 上の局所関数等式の Γ-因子

本節では $\mathbb{R}$ 上の局所関数等式について説明し, 定理 2.2 を用いてその Γ-因子を計算する.

4.1 $\mathbb{R}$ 上の基本定理

(G, ρ, V) を次の条件を満たす $\mathbb{R}$ 上定義された概均質ベクトル空間とする.

(i) G は reductive 代数群である.

(ii) 特異集合 S は超曲面である.

(iii) 基本相対不変式は実数係数多項式に取れる.

一般にはこの仮定の下で $\mathbb{C}$ 上の場合に類似の $\mathbb{R}$ 上の基本定理が証明されているが本論文では Γ-因子を決定するために更に ([4] で課せられているものと同様の) 次の事を仮定する.

(iv) $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は単一の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道になっている ($S_{\mathbb{R}}, G_{\mathbb{R}}$ はそれぞれ S 及び G の $\mathbb{R}$ 有理点全体).

(v) 基本相対不変式 $f_i(x)$ は各変数について一次である. つまり $f_i(x)$ は次の形をしている:

$$f_i(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_{d_i}} c_{i_1 \ldots i_{d_i}} x_{i_1} \cdots x_{i_{d_i}} \qquad d_i = \deg f_i.$$

(G,ρ,V) の基本相対不変式を $f_1,\cdots,f_r$ とし,(G,ρ^*,V^*) の基本相対不変式を $f_1^*,\cdots,f_r^*$ とする. ここで適当な $V_{\mathbb{R}}$ の基底とその双対基底をとり $V_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n \cong V_{\mathbb{R}}^*$ $(n=\dim V_{\mathbb{R}})$ という同型を与える. これによって $V_{\mathbb{R}}$ 及び $V_{\mathbb{R}}^*$ を $\mathbb{R}^n$ と同一視して考えるのだが, $\mathbb{R}^n$ の基底をうまくとることで $f^*(x)=\overline{f}(x)$ とできることが知られている ([1] § 2.3 参照). 以下この基底で考える.

$\mathbb{R}$ 上の Fourier 変換
$\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数 $\Phi(x)$ の Fourier 変換 $\widehat{\Phi}(x)$ を次で定める.

$$\widehat{\Phi}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) e^{2\pi i {}^t x y} dy.$$

ここで dy は $\mathbb{R}^n$ 上の self dual measure である. 即ち $\mathbb{R}^n$ 上の Haar measure であって $\widehat{\widehat{\Phi}}(x)=\Phi(-x)$ となるように正規化されたものとする. 具体的には dy を $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue measure とすれば良い. □

急減少関数 $\Phi(x)$ に対して

$$Z(\Phi;s) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \Phi(x) dx$$

とおく. ここで $|f(x)|^s$ は $|f_1(x)|^{s_1}\cdots|f_r(x)|^{s_r}$ を略記したものであり, $|f_i(x)|$ は通常の絶対値である. $Z(\Phi;s)$ は全て $\mathrm{Re}\, s_1>0,\cdots,\mathrm{Re}\, s_r>0$ で収束して正則関数を定める. このとき次の定理が知られている ([2] 参照).

$\mathbb{R}$ 上の基本定理
勝手な急減少関数 $\Phi(x)$ に対して $Z(\Phi;s)$ は $\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数に解析接続される. そしてこの解析接続されたものも同じ記号で表すことにし, 次の等式が成り立つ.

$$Z(\widehat{\Phi}; s-\kappa) = c(s) Z(\Phi;-s). \tag{4.1}$$

ここで $\kappa=(\kappa_1,\cdots,\kappa_r)$ は $g\in G$ に対し

$$f_1(\rho(g)x)^{2\kappa_1}\cdots f_r(\rho(g)x)^{2\kappa_r} = \det g^2 f_1(x)^{2\kappa_1}\cdots f_r(x)^{2\kappa_r}$$

を満たすものであり, $c(s)$ は $\Phi(x)$ に依らない $\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数である. □

等式(4.1) が $\mathbb{R}$ 上の局所関数等式と呼ばれるものであり, $c(s)$ が (局所関数等式の)Γ-因子と呼ばれるものである.

4.2 $\mathbb{R}$ 上の Γ-因子

多項式 $b_i(s)$ を

$$f_i^*\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right) f(x)^{s+E_i} = b_i(s) f(x)^s \qquad (i=1,\cdots,r)$$

を満たすものとする ($f(x)^s$ は $f_1(x)^{s_1}\cdots f_r(x)^{s_r}$ を略記したもの). また

$$\varphi(x) = e^{-\pi {}^t x x} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

とおく. $\varphi(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数であり, $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ を満たすことが知られている.

補題 4.1
$Z(\varphi; 2s)$ は $s_1 > 0, \cdots, s_r > 0$ に於いて次の三条件を満たす:

(i) $0 < Z(\varphi; 2s) < \infty$,

(ii) $\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} \log Z(\varphi; 2s) \geq 0 \qquad (i = 1, \cdots, r)$,

(iii) $Z(\varphi; 2(s + E_i)) = (2\pi)^{-\deg b_i} b_i(2s) Z(\varphi; 2s) \qquad (i = 1, \cdots, r)$.

□

［証明］
(i) は明らかである.
(ii) について.
$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} \log Z(\varphi; s) \geq 0$ を示せば十分である.$Z(\varphi; s)$ を単に Z と書くことにする.

$$\frac{\partial}{\partial s_i} Z = \int_{\mathbb{R}^n} \log |f_i(x)| \cdot |f(x)|^s \varphi(x) dx$$
$$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} Z = \int_{\mathbb{R}^n} (\log |f_i(x)|)^2 \cdot |f(x)|^s \varphi(x) dx$$

であることより

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\log |f_i(x)| - \frac{\frac{\partial}{\partial s_i} Z}{Z} \right)^2 \cdot |f(x)|^s \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\log |f_i(x)|)^2 \cdot |f(x)|^s \varphi(x) dx \\
&\qquad - 2 \frac{\frac{\partial}{\partial s_i} Z}{Z} \int_{\mathbb{R}^n} \log |f_i(x)| \cdot |f(x)|^s \varphi(x) dx \\
&\qquad + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial s_i} Z}{Z} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s_{\varphi}(x) dx \\
&= Z \cdot \frac{Z \cdot \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} Z - (\frac{\partial}{\partial s_i} Z)^2}{Z^2} \\
&= Z \cdot \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} \log Z
\end{aligned}$$

となり,$Z>0$ であるので (ii) がいえる. (iii) について.
$f_i(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上で常に 0 以上であるかまたは 0 以下であることが概均質ベクトル空間に対する仮定 (iv) よりわかる.

$$\operatorname{sgn} f_i = \begin{cases} 1 & (f_i(x) \geq 0) \\ -1 & (f_i(x) \leq 0) \end{cases}$$

とおき, また f_i は実数係数なので $f_i^*(x) = \overline{f_i}(x) = f_i(x)$ であることに注意すれば

$$\operatorname{sgn} f_i \cdot f_i(\tfrac{\partial}{\partial x})|f(x)|^{s+E_i} = b_i(s)|f(x)|^s$$

となる.([2],P111. 参照) これを用いて

$$\begin{aligned} b_i(2s)Z(\varphi; 2s) &= \int_{\mathbb{R}^n} b_i(2s)|f(x)|^{2s} e^{-\pi {}^t x x} dx \\ &= \operatorname{sgn} f_i \int_{\mathbb{R}^n} [f_i(\tfrac{\partial}{\partial x})|f(x)|^{2s+E_i}] e^{-\pi {}^t x x} dx \end{aligned}$$

部分積分により

$$= \operatorname{sgn} f_i \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2s+E_i} [f_i(-\tfrac{\partial}{\partial x}) e^{-\pi {}^t x x}] dx$$

$f_i(x)$ は各変数について 1 次であるから $f_i(-\frac{\partial}{\partial x})e^{-\pi {}^t x x} = f_i(2\pi x)e^{-\pi {}^t x x}$ となるので

$$= \operatorname{sgn} f_i \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2s+E_i} f_i(2\pi x) e^{-\pi {}^t x x} dx$$

$f_i(2\pi x) = (2\pi)^{\deg f_i} f_i(x) = (2\pi)^{\deg f_i} \operatorname{sgn} f_i \cdot |f_i(x)|$ より

$$\begin{aligned} &= (2\pi)^{\deg f_i} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2s+2E_i} e^{-\pi {}^t x x} dx \\ &= (2\pi)^{\deg f_i} Z(\varphi; 2(s+E_i)) \end{aligned}$$

であり,$\deg f_i = \deg b_i$ であるから (iii) がいえる. ■

補題 4.1 と定理 2.2 より多項式の組 $h = (h_1, \cdots, h_r)$ を $h_i(s) = (2\pi)^{-\deg b_i} b_i(2s)$ ととると,$c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して

$$Z(\varphi; s) = c\Gamma_h(s/2)$$

であることがわかる.

そして $\widehat{\Phi}(x) = \varphi(x)$ であることより, $\mathbb{R}$ 上の局所関数等式(4.1) で $\Phi(x)$ として $\varphi(x)$ をとれば

$$c(s) = \frac{Z(\varphi; s-\kappa)}{Z(\varphi; -s)}$$

となるので次の定理を得る.

定理 4.2
多項式の組 $h=(h_1,\cdots,h_r)$ を $h_i(s)=(2\pi)^{-\deg b_i}b_i(2s)$ ととると，

$$c(s)=\frac{\Gamma_h((s-\kappa)/2)}{\Gamma_h(-s/2)}.$$

$\square$

参考文献

[1] 木村達雄，概均質ベクトル空間，岩波書店，1998.

[2] 佐藤幹夫述，新谷卓郎記，概均質ベクトル空間の理論，数学のあゆみ 15-1，85-157，1970.

[3] 藤上雅樹，概均質ベクトル空間における多変数局所関数等式の Γ-因子について，筑波大学修士論文，2001.

[4] J.Igusa，On functional equations of complex powers，Invent. Math. **85**(1986)，1-29.