数理解析研究所講究録 1238 巻 2001 年 143-157

On the Finite Orbits Condition for the A_r-type representations

筑波大学 数学研究科　名倉 誠　(Makoto NAGURA)
筑波大学 数学研究科　二井谷 剛　(Tsuyoshi NIITANI)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

序

A_r 型の Dynkin 図形 $\bullet\!-\!\!-\!\bullet\!-\!\!-\!\cdots\!-\!\!-\!\bullet$ の各頂点に左から順に番号をつけ，各辺に向きをつけたクイバー

$$(Q)\qquad \overset{1}{\cdot}\longrightarrow\overset{2}{\cdot}\longleftarrow\overset{3}{\cdot}\longleftarrow\overset{4}{\cdot}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\overset{r}{\cdot}$$

を考える．$d=(d_1,\cdots,d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$V_1,\cdots,V_r$ を $\dim V_i=d_i$ となるような複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．$G=G_1\times\cdots\times G_r$ ただし $G_i=GL(V_i)$ または $SL(V_i)$ とする．このとき G はベクトル空間 $\mathcal{L}_d(Q)=\bigoplus_{i\to j \text{ in } Q}\mathrm{Hom}(V_i,V_j)$ に自然に作用する：$g\cdot f_{ij}=g_jf_{ij}{g_i}^{-1}$ $(g=(g_i)_{i=1}^r\in G,$ $f_{ij}\in\mathrm{Hom}(V_i,V_j))$．我々は，この A_r 型のクイバー Q から得られる G の $\mathcal{L}_d(Q)$ 上の表現に注目する．

もしすべての番号 i について $G_i=GL(V_i)$ ならば $\mathcal{L}_d(Q)$ は有限個の G 軌道に分解される (P. Gabriel [1]) が，一般にはそうではない．そこで $\mathcal{L}_d(Q)$ が有限個の G 軌道に分解されるための G と $\mathcal{L}_d(Q)$ の条件を与えた（定理 4.2）．

以下，各 V_i の基底を固定し，$\mathrm{Hom}(V_i,V_j)$ を $\mathbb{C}$ 上の $d_j\times d_i$ 行列全体 $M(d_j,d_i)$ と同一視し，$GL(V_i)=GL(d_i)$ とみなす：$\mathcal{L}_d(Q)=\bigoplus_{i\to j \text{ in } Q}M(d_j,d_i)$．注意 3.2 より，$G$ の $\mathcal{L}_d(Q)$ への作用が有限個の軌道を持つことと，矢の向きが同じ A_r 型のクイバー

$$(Q_0)\qquad \overset{1}{\cdot}\longrightarrow\overset{2}{\cdot}\longrightarrow\overset{3}{\cdot}\longrightarrow\overset{4}{\cdot}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\overset{r}{\cdot}$$

に対して G の $\mathcal{L}_d(Q_0)$ への作用が有限個の軌道を持つこととは同値である．そこで，主に $(G,\mathcal{L}_d(Q_0))$ について考えていくことにする．以下，$\mathcal{L}_d=\mathcal{L}_d(Q_0)$ と略記する．

一般に，有限次元ベクトル空間 V に，線型代数群 G が有理的に作用しているとする．もし V が有限個の G 軌道を持つとき (G,V) は**finite prehomogeneous vector space** (以下 F.P. と略す) と呼ばれる．G が半単純代数群で各既約成分にスカラー倍が独立に作用しているような複素数体 $\mathbb{C}$ 上の F.P. の分類は既になされている ([2], [3] 参照)．そのとき最も基本的なものは A_r 型の (G,V)，つまり $G=GL(V_1)\times\cdots\times GL(V_r)$ の $V=\mathcal{L}_d(Q)$ への作用であった．そこで我々は次を目標にしたい：G が半単純代数群で，既約成分にスカラー倍の独立な作用があるとは限らない F.P. を分類せよ．

1　準備

m と n を正の整数とし，$M(m,n)$ で複素数体 $\mathbb{C}$ 上の $m\times n$ 行列全体を表すことにする．$M(m,m)$ を $M(m)$ と略記する．$\Omega(r)=\{1,2,\cdots,r\}$ とする．$N=(e_1,e_2,\cdots,e_r)$ を n の分割，つまり e_i たちは正の

整数で $n=\sum_{i\in\Omega(r)} e_i$ とする．分割 N に対応する $GL(n)$ の標準的放物型部分群を $P(N)=P(e_1,\cdots,e_r)$ で表すことにする．$\Phi_1,\cdots,\Phi_p$ を空でない $\Omega(r)$ の部分集合で $\Phi_i\cap\Phi_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ とする．このとき $P(N)$ の部分群 $P(N;\Phi_1,\cdots,\Phi_p)$ を次のように定義する：

$$P(N;\Phi_1,\cdots,\Phi_p)=\left\{[A_{i,j}]_{1\leqq i,j\leqq r};\ \begin{array}{l} A_{i,j}\in M(e_i,e_j),\ A_{i,j}=0\ (i>j),\\ \prod_{i\in\Phi_\lambda}\det A_{i,i}=1 \text{ for } \lambda\in\Omega(p)\end{array}\right\}$$

$P(N;\Phi_1,\cdots,\Phi_p)$ が $SL(n)$ に含まれるための必要十分条件は，$\Phi_1\sqcup\cdots\sqcup\Phi_p=\Omega(r)$ となることである．以下，$P_0(N)=P(N;\{1\},\{2\},\cdots,\{r\})$ と略記する．

r 個の整数の組 $(f_1,\cdots,f_r)$ で $0\leqq f_i\leqq e_i$ $(i\in\Omega(r))$ かつ $\sum_{i\in\Omega(r)} f_i\leqq m$ をみたすもの全体を $\mathcal{F}(m,N)$ と書く．$\Gamma=(f_1,\cdots,f_r)\in\mathcal{F}(m,N)$ に対して，$\Omega(r)$ の部分集合 I，J を次のように定義する：$I=I(\Gamma,N)=\{i\in\Omega(r);\ f_i=e_i\}$；$J=J(\Gamma,N)=\{i\in\Omega(r);\ 0<f_i<e_i\}$．したがって $I\cap J=\varnothing$ であり，$i\in\Omega(r)\setminus(I\cup J)$ に対しては $f_i=0$ である．

$\Gamma=(f_1,\cdots,f_r)\in\mathcal{F}(m,N)$ とする．$I\cup J\neq\varnothing$ のとき，$X_m^N(\Gamma)\in M(m,n)$ を次のようなブロック分割 $X_m^N(\Gamma)=[X_1|\cdots|X_r]$ で定める．

$${}^tX_i=\begin{cases}[O_{e_i,f_1+\cdots+f_{i-1}}|I_{f_i}|O_{e_i,m-f_1-\cdots-f_i}]\in M(e_i,m) & (i\in I\text{ のとき}),\\ [O_{e_i,f_1+\cdots+f_{i-1}}|{}^tZ_{f_i,e_i}|O_{e_i,m-f_1-\cdots-f_i}]\in M(e_i,m) & (i\in J\text{ のとき})\end{cases}$$

とし，$i\in\Omega(r)\setminus(I\cup J)$ となる番号 i に対しては $X_i=O_{m,e_i}\in M(m,e_i)$ とする．ただし $Z_{f_i,e_i}=[I_{f_i}|O_{f_i,e_i-f_i}]\in M(f_i,e_i)$ であり，$O_{u,v}$ は $u\times v$ 零行列，I_u は u 次の単位行列とする．$I\cup J=\varnothing$ のときは $X_m^N(\Gamma)=O_{m,n}\in M(m,n)$ とおく．$\operatorname{rank}X_i=f_i$ だから，$\operatorname{rank}X_m^N(\Gamma)=\sum_{i\in\Omega(r)} f_i$ となっていることに注意．例えば $r=4$，$I=\{3\}$，$J=\{1,4\}$，$m=\sum_{i\in\Omega(4)} f_i$ に対して $X_m^N(\Gamma)$ は次のようになる：

$$X_m^N(\Gamma)=\left[\begin{array}{c|c|c|c} I_{f_1}\mid O_{f_1,e_1-f_1} & O_{f_1,e_2} & O_{f_1,e_3} & O_{f_1,e_4}\\ \hline O_{f_3,e_1} & O_{f_3,e_2} & I_{f_3} & O_{f_3,e_4}\\ \hline O_{f_4,e_1} & O_{f_4,e_2} & O_{f_4,e_3} & I_{f_4}\mid O_{f_4,e_4-f_4}\end{array}\right]\in M(m,n).$$

一般に，$G=G_1\times G_2\subsetneqq GL(d_1)\times GL(d_2)$ は $V=M(d_2,d_1)\curvearrowleft g\cdot v=g_2vg_1^{-1}$ $(g=(g_1,g_2)\in G,\ v\in V)$ で作用する．以下，この (G,V) を簡単のため $\mathcal{L}(G_1,G_2)$ と書くことにする．

次の補題 1.1 と 1.2 は直接の計算で確かめられる：

補題 1.1. $m\leqq n$ とし，$j_1<j_2<\cdots<j_m$ となるような m 個の元 $j_1,j_2,\cdots,j_m\in\Omega(n)$ を決めておく．このとき $\varphi_1:M(m,n)\to M(m)$ を $[x_1|\cdots|x_n]\in M(m,n)$ に対し $[x_1|\cdots|x_n]\mapsto[x_{j_1}|\cdots|x_{j_m}]$ で，写像 $\varphi_2:M(n)\to M(m)$ を $[y_{i,j}]\in M(n)$ に対し $[y_{i,j}]\mapsto[y_{j_k,j_l}]_{1\leqq k\leqq m,\ 1\leqq l\leqq m}$ で定める．このとき，次が成り立つ:

(1) $A\in M(m)$ と $X\in M(m,n)$ に対して $\varphi_1(AX)=A\varphi_1(X)$ となる．

(2) $B\in M(n)$ と，$x_j=O_{m,1}$ $(j\neq j_1,\cdots,j_m)$ であるような $X=[x_1|\cdots|x_n]\in M(m,n)$ に対して，$\varphi_1(XB)=\varphi_1(X)\varphi_2(B)$ となる．

補題 1.2. 零でない任意の $X' \in M(m,n)$ に対して，

$$AX'B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_u & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \tag{1.1}$$

となるような $A \in GL(m)$ と $B \in SL(n)$ が存在する．ただし $u = \operatorname{rank} X'$ である．つまり，$\mathcal{L}(SL(n), GL(m))$ の零でない各軌道は(1.1) のような形の元を含む．したがってそれはF.P.であり，もちろん $\mathcal{L}(GL(n), GL(m))$ も F.P. である．

補題 1.3. m と n を正の整数とし，$N = (e_1, \cdots, e_r)$ を n の分割とする．このとき $\mathcal{L}(P_0(N), GL(m))$ の各軌道は $X_m^N(\Gamma)$ の形の元を含む．

証明. まず，$O_{m,n}$ を含む軌道は $\{O_{m,n}\}$ であり，$O_{m,n}$ は $\Gamma = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{r})$ を用いて $O_{m,n} = X_m^N(\Gamma)$ と書けることに注意する．n についての帰納法で証明する．$n = 1$ のとき，零でない $X \in M(m,1)$ は $\operatorname{rank} X = 1$ の列ベクトルだから，$GL(m)$ の作用により，X は ${}^t[1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m-1}] = X_m^N(\Gamma)$ ($N = \Gamma = (1)$) に移される．そこで $1 \leqq k < n$ に対して主張が成り立つとする．$X \in M(m,n)$ を $X = [X'|X'']$ ($X' \in M(m, e_1)$, $X'' \in M(m, n - e_1)$) と表しておく．

$X' = 0$ のとき．帰納法の仮定により $A \in GL(m)$，$B \in P_0(N')$，$\Gamma' = (f_2, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N')$ があって $AX''B^{-1} = X_m^{N'}(\Gamma')$ となる．ただし $N' = (e_2, \cdots, e_r)$ である．このとき $B_1 = \operatorname{diag}(I_{e_1}, B) \in P_0(N)$ であり，$A[0|X'']{B_1}^{-1} = [0|X_m^{N'}(\Gamma')] = X_m^N(\Gamma)$ ($\Gamma = (0, f_2, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$) となる．

次に $\operatorname{rank} X' = m$ の場合を考える．補題1.2 により，$AX'B^{-1} = [I_m|0]$ となるような $A \in GL(m)$ と $B \in SL(e_1)$ が存在する．$\operatorname{rank}[\overbrace{I_m|0}^{e_1}] = m$ だから，$[I_m|0]B_0 + AX'' = O_{m, n-e_1}$ となるような $B_0 \in M(e_1, n - e_1)$ を選ぶことができる．このとき

$$B_1 = \left[\begin{array}{c|c} B & -B_0 \\ \hline O_{n-e_1, e_1} & I_{n-e_1} \end{array}\right]$$

は $P_0(N)$ の元であり，$A[X'|X'']{B_1}^{-1} = [\overbrace{I_m|0}^{e_1}|0] = X_m^N(\Gamma)$ ($\Gamma = (m, \overbrace{0, \cdots, 0}^{r-1}) \in \mathcal{F}(m, N)$) となる．

$0 < \operatorname{rank} X' = u < m$ のとき．補題1.2 より X' に対して，(1.1) をみたす $A \in GL(m)$ と $B \in SL(e_1)$ が存在する．$AX'' = {}^t[{}^tX_1|{}^tX_2]$ ($X_1 \in M(u, n - e_1)$，$X_2 \in M(m - u, n - e_1)$) と表しておく．$\operatorname{rank}[\overbrace{I_u|0}^{e_1}] = u$ だから，$[I_u|0]B_0 + X_1 = O_{u, n-e_1}$ となるような $B_0 \in M(e_1, n - e_1)$ が選べる．一方，帰納法の仮定により $A_1X_2{B_1}^{-1} = X_{m-u}^{N'}(\Gamma')$，$N' = (e_2, \cdots, e_r)$ となるような $A_1 \in GL(m - u)$，$B_1 \in P_0(N')$，$\Gamma' = (f_2, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m - u, N')$ が存在する．そこで

$$A_2 = \left[\begin{array}{c|c} I_u & O_{u, m-u} \\ \hline O_{m-u, u} & A_1 \end{array}\right] A \in GL(m), \quad B_2 = \left[\begin{array}{c|c} B & -B_0 \\ \hline O_{n-e_1, e_1} & B_1 \end{array}\right] \in P_0(N),$$

とおくと

$$A_2[X'|X'']{B_2}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_u \mid 0 & O_{u, n-e_1} \\ \hline O_{m-u, e_1} & X_{m-u}^{N'}(\Gamma') \end{array}\right] = X_m^N(\Gamma)$$

$(\Gamma = (u, f_2, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N))$ となる. ■

以下, $D_u(\alpha) = \mathrm{diag}(\alpha, 1, \cdots, 1) \in GL(u)$ と略記する.

注意 1.4. (1) 任意の空でない $\Omega(r)$ の部分集合 $\Phi_1, \cdots, \Phi_p$ で, $\Phi_i \cap \Phi_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ となるものに対して $P_0(N) \subsetneqq P = P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ だから, $\mathcal{L}(P, GL(m))$ の各軌道は $X_m^N(\Gamma)$ という形の元を含む. また $\mathcal{F}(m, N)$ は有限集合だから $\mathcal{L}(P, GL(m))$ は有限個の軌道を持つ；つまり F.P. である. したがって $\mathcal{L}(P(N), GL(m))$ も F.P. である.

(2) 各 $A \in GL(m)$ に対して $A = A \cdot D_m(\det A)^{-1} \cdot D_m(\det A)$ と表せるから, $\mathcal{L}(P, SL(m))$ の各軌道は $D_m(\alpha)X_m^N(\Gamma)$ $(\alpha \in K^\times)$ という形の元を含むことがわかる.

(3) 適当な対角行列 $D \in P(N)$ を選び $D_m(\alpha)X_m^N(\Gamma) = X_m^N(\Gamma) \cdot D$ とできるので $\mathcal{L}(P(N), SL(m))$ は F.P. である. とくに $N = (n)$ の場合を考えれば $\mathcal{L}(GL(n), SL(m))$ は F.P. であることがわかる. □

$N = (e_1, \cdots, e_r)$ と $P = P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ に対して

$$\mathcal{S}(P) = \left\{ u;\ \text{空でない} \Lambda \subsetneqq \Omega(p) \text{ で } u = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i \text{ と表せる} \right\}$$

と定義する. $P = P(N)$ のときは $\mathcal{S}(P) = \varnothing$ とする. この定義から次の補題は明らかである：

補題 1.5. $N = (e_1, \cdots, e_r)$ を n の分割とし, $P = P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ とする. $\Phi_{p+1} = \Omega(r) \setminus \bigcup_{\lambda \in \Omega(p)} \Phi_\lambda$ が空でないときは $P' = P \cap SL(n) = P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p, \Phi_{p+1})$ とおき, $\Phi_{p+1} = \varnothing$ のとき, つまり $P \subsetneqq SL(n)$ のときは $P' = P$ とする. このとき $\mathcal{S}(P') = \mathcal{S}(P) \cup \{n - u;\ u \in \mathcal{S}(P) \text{ かつ } u < n\} \cup \{n\}$ となる.

命題 1.6. $N = (e_1, \cdots, e_r)$ とし, $P = P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ とする. このとき $\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. でないための必要十分条件は, $m \in \mathcal{S}(P)$ となることである.

証明. まず $\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. でないと仮定する. 注意 1.4 (2) により, 各 $X \in M(m, n)$ は適当な $\Gamma' \in \mathcal{F}(m, N)$ と $\alpha' \in K^\times$ を用いて $D_m(\alpha')X_m^N(\Gamma')$ と表せる. $\mathcal{F}(m, N)$ は有限集合ゆえ, $X_\alpha = D_m(\alpha)X_m^N(\Gamma)$ と $X_m^N(\Gamma)$ が同じ軌道上にないような $\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)$ と $\alpha \in K^\times$ が存在する. このとき, 次が成り立っている：

(a) $m = \mathrm{rank}\, X_m^N(\Gamma)$,

(b) $J = J(\Gamma, N) = \varnothing$,

(c) もし $\Phi_\lambda \cap I \neq \varnothing$ ならば, $\Phi_\lambda \cap C = \varnothing$ である. ここで $I = I(\Gamma, N)$, $C = \Omega(r) \setminus (I \cup J) = \Omega(r) \setminus I$ とする.

(d) さらに $I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$, $\Lambda = \{\lambda \in \Omega(p);\ \Phi_\lambda \cap I \neq \varnothing\}$ である.

実際, $SL(m)$ の作用を考えると $m = \sum_{i \in \Omega(r)} f_i = \mathrm{rank}\, X_m^N(\Gamma)$ でなければいけない. もし $J \neq \varnothing$ で, $i \in J$ とすると, $SL(m)$ の作用, つまり $\mathrm{diag}(\overbrace{\alpha^{-1}, 1, \cdots, 1}^{f_1 + \cdots + f_{i-1}}, \overbrace{\alpha, 1, \cdots, 1}^{f_i + \cdots + f_r})$ の作用により, X_α は

$$\mathrm{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{f_1 + \cdots + f_{i-1}}, \overbrace{\alpha, 1, \cdots, 1}^{f_i + \cdots + f_r}) \cdot X_m^N(\Gamma) = X_m^N(\Gamma) \cdot R_i, \qquad R_i = \mathrm{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{e_1 + \cdots + e_{i-1}}, \overbrace{\alpha, 1, \cdots, 1}^{e_i + \cdots + e_r}) \tag{1.2}$$

に移される．いま $i \in J$ だから，P の作用で(1.2) が $X_m^N(\Gamma)$ に移されることになるがこれは矛盾である．したがって (b) が成り立ち，$m = \sum_{i \in I} f_i$ となる．もし，ある $\lambda \in \Omega(p)$ に対して $\Phi_\lambda \cap I \neq \varnothing$ かつ $\Phi_\lambda \cap C \neq \varnothing$ だったとしよう．$i \in \Phi_\lambda \cap I$ を選び，X_α を(1.2)へ移す．$X_\alpha = [\overbrace{y_1}^{e_1} | \cdots | \overbrace{y_r}^{e_r}]$ と表しておく．$\Phi_\lambda \cap C \neq \varnothing$ だから，$y_j = O_{m,e_j}$ となる番号 $j \in \Phi_\lambda \cap C$ がある．したがって，P の作用により(1.2) と $X_m^N(\Gamma)$ は同じ軌道に属していることになるが，それは矛盾である．したがって (c) が成り立ち，$I \supseteqq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ であることがわかる．もし $i \in I \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ のときは，同様に，X_α を(1.2) に移してみる．このとき $R_i \in P$ だから，仮定に矛盾する．したがって $m = \sum_{i \in I} f_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i$，つまり $m \in \mathcal{S}(P)$ であることがわかった．

逆に，$\varnothing \subsetneqq \Lambda \subseteqq \Omega(p)$ に対して $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i \ (\leqq n)$ となっているとしよう．このとき $\Gamma = (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ を次のように定義する：$i \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda$ のときは $f_i = e_i$ とし，それ以外の番号については $f_i = 0$ とする．$\alpha \in K^\times$ に対し $X_\alpha = D_m(\alpha) X_m^N(\Gamma)$ とおき，$X_\alpha = [x_1 | \cdots | x_n]$ と表す．ここで x_j は j 番めの列ベクトルである．$\operatorname{rank} X_\alpha = m$ だから，$\operatorname{rank}[x_{j_1} | \cdots | x_{j_m}] = m$ となるような m 個の列ベクトル $x_{j_1}, \cdots, x_{j_m}$ $(j_1 < \cdots < j_m)$ が存在する．もし X_α と X_β が同じ軌道にあったとする，つまり $X_\beta = A X_\alpha B^{-1}$ となるような $A \in SL(m)$ と $B \in P$ が存在したとする．補題 1.1 をこれに適用すると

$$\varphi_1(X_\beta) = \varphi_1(A X_\alpha B^{-1}) = A \varphi_1(X_\alpha B^{-1}) = A \varphi_1(X_\alpha) \varphi_2(B^{-1}) \tag{1.3}$$

となる．$m = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in \Phi_\lambda} e_i$ だから，$\varphi_2(B^{-1}) \in SL(m)$ となっていることに注意する．(1.3) の行列式をとれば $\alpha = \beta$ となる．したがって $\mathcal{L}(P, SL(m))$ は無限個の軌道を持ち，F.P. ではない． ■

注意 1.7. (1) $N = (n)$ の場合を考えれば，次のことがわかる：$\mathcal{L}(SL(n), SL(m))$ が F.P. でないための必要十分条件は，$n = m$ となることである．

(2) 命題 1.6 の証明から次のことがわかる：$\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. であるための必要十分条件は，任意の $\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)$ と $\alpha \in K^\times$ に対して，$D_m(\alpha) X_m^N(\Gamma)$ と $X_m^N(\Gamma)$ が同じ軌道に属すことである．つまり，もし $\mathcal{L}(P, SL(m))$ が F.P. ならば各軌道は $X_m^N(\Gamma)$ という形の元を含む．

命題 1.8. m と n を正の整数とし，$N = (e_1, \cdots, e_r)$ を n の分割とする．$P = P(N)$ または $P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ とし，$G = GL(m)$ または $SL(m)$ とする．もし $m \notin \mathcal{S}(P)$ または $G = GL(m)$ ならば，$\mathcal{L}(P, G)$ は F.P. であり，集合 $\{X_m^N(\Gamma)\}_{\Gamma \in \mathcal{F}(m,N)}$ がその軌道の完全代表系である．

証明. 命題 1.6，注意 1.4，1.7 により $m \notin \mathcal{S}(P)$ または $G = GL(m)$ のとき，$\mathcal{L}(P, G)$ は F.P. であり各軌道が $X_m^N(\Gamma)$ という形の元を含んでいることがわかっている．そこで，$\Gamma' \neq \Gamma$ ならば $X_m^N(\Gamma')$ は $X_m^N(\Gamma)$ と同じ軌道上にはないことを示す．$\Gamma' = (f_1', \cdots, f_r')$，$\Gamma = (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ とする．$X' = X_m^N(\Gamma')$ と $X = X_m^N(\Gamma)$ が同じ軌道上にあったとする，つまり $X' = A X B^{-1}$ となるような $A \in G$ と $B \in P$ が存在したとする．$X' = [X_1' | \cdots | X_r']$，$X = [X_1 | \cdots | X_r]$ $(X_i', X_i \in M(m, e_i)\,;\, i \in \Omega(r))$ と表すと，各 $k \in \Omega(r)$ に対して $[X_1' | \cdots | X_k'] = A [X_1 | \cdots | X_k] B_k{}^{-1}$ となる．ただし $B = [B_{i,j}]_{1 \leqq i,j \leqq r}$ $(B_{i,j} \in M(e_i, e_j))$ と表し，$B_k = [B_{i,j}]_{1 \leqq i,j \leqq k} \in P(e_1, \cdots, e_k)$ $(k \in \Omega(r))$ とおいた．$B \in P$ だから各 B_k は正則行列である．したがって各 $k \in \Omega(r)$ に対して $\operatorname{rank}[X_1' | \cdots | X_k'] = \operatorname{rank}[X_1 | \cdots | X_k]$ であり，$\sum_{i=1}^k f_i' = \sum_{i=1}^k f_i$ である．つまり $\Gamma' = \Gamma$ となる． ■

2 固定部分群の考察

一般に，群 G が V へ作用しているとき $\{g \in G;\ g \cdot v = v\}$ を，(G, V) の $v \in V$ における G の固定部分群と呼ぶ．また，部分群 $H \subsetneqq G_1 \times \cdots \times G_r$ のG_i**-part** とは，自然な全射 $\pi_i : G_1 \times \cdots \times G_r \to G_i$ による H の像 $\pi_i(H)$ のことである．

r 個の非負整数の組 $\Gamma = (f_1, \cdots, f_r)$ に対して $\mathrm{supp}\,\Gamma = \{i \in \Omega(r);\ f_i \neq 0\}$ とおく．$\mathrm{supp}\,\Gamma \neq \varnothing$ のとき，つまり $\Gamma \neq (\overbrace{0, \cdots, 0}^{r})$ のとき，写像 $\sigma = \sigma_\Gamma : \Omega(l) \to \Omega(r)$ を $k \mapsto i_k$ で定める．ただし $l = \sharp\,\mathrm{supp}\,\Gamma$ であり，$\mathrm{supp}\,\Gamma = \{i_1, \cdots, i_l\}$ $(i_1 < \cdots < i_l)$ とする．これは単射である．Γ の正の成分を同じ順番でならべた l 個の正整数の組を Γ^σ で表す：$\Gamma^\sigma = (f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(l)})$.

$N = (n_1, \cdots, n_r)$ と $M = (m_1, \cdots, m_l)$ に対して準同型 $\psi^{N,M} : P(N) \times P(M) \to (K^\times)^r \times (K^\times)^l$ を

$$\left([A_{i,j}]_{1 \leqq i,j \leqq r}, [B_{i,j}]_{1 \leqq i,j \leqq l}\right) \longmapsto (\det A_{1,1}, \cdots, \det A_{r,r}, \det B_{1,1}, \cdots, \det B_{l,l}),$$

で定義する．ただし $A_{i,j} \in M(n_i, n_j)$ であり，$B_{i,j} \in M(m_i, m_j)$ とする．$\psi^{N,M}$ は全射であり，核は $P_0(N) \times P_0(M)$ である．

命題 2.1. n と m を正の整数とし，$N = (e_1, \cdots, e_r)$ を n の分割，$\Gamma = (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ とする．$\widetilde{H}|_{GL(m)}$ を $\mathcal{L}(P(N), GL(m))$ の $X = X_m^N(\Gamma)$ における固定部分群 $\widetilde{H}$ の $GL(m)$-part とする．このとき $\widetilde{H}|_{GL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^\sigma)$ であり，$\psi(\widetilde{H}) = \{(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_l);\ x_i = y_{\sigma^{-1}(i)} \text{ for } i \in I(\Gamma, N)\}$ となる．ただし $\widetilde{\Gamma} = \left(f_1, \cdots, f_r, m - \sum_{i \in \Omega(r)} f_i\right)$，$l = \sharp\,\mathrm{supp}\,\widetilde{\Gamma}$，$\sigma = \sigma_{\widetilde{\Gamma}}$，$\psi = \psi^{N, \widetilde{\Gamma}^\sigma}$ とする．

証明. もし $X = O_{m,n}$ ならば $\widetilde{H} = P(N) \times GL(m)$，$\psi(\widetilde{H}) = (K^\times)^r \times K^\times$ であり $\Gamma = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{r})$，$\widetilde{\Gamma} = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{r}, m)$，$l = \sharp\,\mathrm{supp}\,\widetilde{\Gamma} = 1$，$\widetilde{\Gamma}^\sigma = (m)$，$I(\Gamma, N) = \varnothing$ だから主張は成り立つ．そこで $X \neq O_{m,n}$ のときを考える．n についての帰納法で証明する．$n = 1$ のとき $N = \Gamma = (1)$ である．$I = \{1\}$ ゆえ $X = {}^t[1, 0, \cdots, 0] \in M(m, 1)$，したがって明らかに主張が成り立つ．そこで n より小さい正整数に対して主張が成り立つと仮定する．

まず $m > \mathrm{rank}\,X$ の場合は $m = \mathrm{rank}\,X$ の場合に帰着されることを示そう：$m > \mathrm{rank}\,X$ とすると $X = {}^t[{}^tX'|0]$ $(X' = X_{m-f_0}^N(\Gamma) \in M(m - f_0, n)$，$f_0 = m - \mathrm{rank}\,X)$ と書けるので，固定部分群は

$$\widetilde{H} = \left\{ \left(A, \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline O_{f_0, m-f_0} & B_3 \end{array} \right] \right);\ \begin{array}{l} (A, B_1) \in H',\ B_3 \in GL(f_0), \\ B_2 \in M(m - f_0, f_0) \end{array} \right\},$$

で与えられる．ただし H' は $\mathcal{L}(P(N), GL(m - f_0))$ の X' における固定部分群である．$\mathrm{rank}\,X' = m - f_0$ だから，$m = \mathrm{rank}\,X$ の場合が示されれば十分である．そこで $X = X_m^N(\Gamma)$ の階数が m，つまり $m = \sum_{i \in \Omega(r)} f_i$ と仮定する．このとき $\mathrm{supp}\,\Gamma = \mathrm{supp}\,\widetilde{\Gamma}$ だから，$k \in \Omega(\sharp\,\mathrm{supp}\,\Gamma)$ に対し $\sigma_\Gamma(k) = \sigma_{\widetilde{\Gamma}}(k)$ で $\Gamma^{\sigma_\Gamma} = \widetilde{\Gamma}^{\sigma_{\widetilde{\Gamma}}}$ となっていることに注意.

まず $f_r > 0$ かつ $l = \sharp\operatorname{supp}\Gamma \geqq 2$ の場合.

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & O_{m-f_r,e_r} \\ \hline O_{f_r,n-e_r} & X_2 \end{array}\right], \quad \left(\begin{array}{l} X_1 = X^{N'}_{m-f_r}(\Gamma') \in M(m-f_r, n-e_r), \\ X_2 = X^{(e_r)}_{f_r}((f_r)) \in M(f_r, e_r) \end{array}\right)$$

$(N' = (e_1, \cdots, e_{r-1})$, $\Gamma' = (f_1, \cdots, f_{r-1}) \in \mathcal{F}(m - f_r, N'))$ と表すと

$$\widetilde{H} = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O_{e_r,n-e_r} & A_3 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline O_{f_r,m-f_r} & B_3 \end{array}\right] \right); \begin{array}{l} (A_1, B_1) \in H_1,\ A_2 \in M(n-e_r, e_r), \\ (A_3, B_3) \in H_2,\ B_2 \in M(m-f_r, f_r), \\ -X_1A_2 + B_2X_2 = O_{m-f_r,e_r} \end{array} \right\}$$

である．ここで H_1 (resp. H_2) は $\mathcal{L}(P(N'), GL(m-f_r))$ の X_1 における (resp. $\mathcal{L}(P(e_r), GL(f_r))$ の X_2 における) 固定部分群である．$\operatorname{rank} X_1 = m - f_r$ と帰納法の仮定により，$H_1|_{GL(m-f_r)} = P(\Gamma'^{\rho})$ であり

$$\psi^{N',\Gamma'^{\rho}}(H_1) = \{(x_1, \cdots, x_{r-1}, y_1, \cdots, y_{l-1});\ x_i = y_{\rho^{-1}(i)} \text{ for } i \in I(\Gamma, N),\ \text{かつ } i < r\}$$

であることがわかる．ここで $l = \sharp\operatorname{supp}\Gamma = \sharp\operatorname{supp}\Gamma' + 1$，$\rho = \sigma_{\Gamma'}$ である．一方，$H_2|_{GL(f_r)} = P(f_r) = GL(f_r)$ であり，$f_r = e_r$ のとき $\psi^{(e_r),(f_r)}(H_2) = \{(x_r, y_l);\ x_r = y_l\}$，$f_r < e_r$ のときは $\psi^{(e_r),(f_r)}(H_2) = \{(x_r, y_l);\ x_r, y_l \in K^{\times}\}$ である．$\operatorname{rank} X_1 = m - f_r$ だから，任意の $B_2 \in M(m - f_r, f_r)$ に対して，$A_2 \in M(n - e_r, e_r)$ を $-X_1A_2 + B_2X_2 = O_{m-f_r,e_r}$ をみたすように選べる．各 $k \in \Omega(l-1)$ に対し $\sigma(k) = \rho(k)$ で $\sigma(l) = r$ だから，主張が成り立つ．

$f_r > 0$ かつ $l = \sharp\operatorname{supp}\Gamma = 1$ の場合．このとき $m = f_r$ であり $X = [0|X']$ $(X' = X^{(e_r)}_m((f_r)) \in M(m, e_r))$ である．したがって

$$\widetilde{H} = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O_{e_r,n-e_r} & A_3 \end{array}\right], B \right); \begin{array}{l} (A_3, B) \in H',\ A_1 \in P(N'), \\ A_2 \in M(n-e_r, e_r) \end{array} \right\}$$

である．ここで $N' = (e_1, \cdots, e_{r-1})$ であり，H' は $\mathcal{L}(P(e_r), GL(m))$ の X' における固定部分群である．したがって $\widetilde{H}|_{GL(m)} = H'|_{GL(m)} = GL(m) = P(f_r)$ であり，$f_r = e_r$ のときは $\psi^{(e_r),(f_r)}(H') = \{(x_r, y_1);\ x_r = y_1\}$，$f_r < e_r$ のときは $\psi^{(e_r),(f_r)}(H') = \{(x_r, y_1);\ x_r, y_1 \in K^{\times}\}$ である．$\sigma(1) = r$ だからこの場合も主張が成り立つことがわかる．

$f_r = 0$ のときは $X = [X'|0]$ $(X' = X^{N'}_m(\Gamma')$，$N' = (e_1, \cdots, e_{r-1})$，$\Gamma' = (f_1, \cdots, f_{r-1}) \in \mathcal{F}(m, N'))$ と表せる．このとき H' を $\mathcal{L}(P(N'), GL(m))$ の X' における固定部分群とすると

$$\widetilde{H} = \left\{ \left(\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O_{e_r,n-e_r} & A_3 \end{array}\right], B \right); \begin{array}{l} (A_1, B) \in H',\ A_3 \in GL(e_r), \\ A_2 \in M(n-e_r, e_r),\ X'A_2 = 0 \end{array} \right\}$$

となる．$\widetilde{H}|_{GL(m)} = H'|_{GL(m)}$ だから，帰納法の仮定により n のときも主張が成り立つことがわかる． ■

命題 2.2. n, m, N, Γ, $\widetilde{\Gamma}$, σ, ψ は命題2.1 と同じとする．$P = P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ とし，$S = \{d \in \Omega(p);\ \Phi_d \subsetneqq I(\Gamma, N)\}$ とおく．このとき，$\mathcal{L}(P, GL(m))$ の $X = X^N_m(\Gamma)$ における固定部分群 H の $GL(m)$-part $H|_{GL(m)}$ は，次で与えられる：$S = \varnothing$ のとき $H|_{GL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^{\sigma})$．$S \neq \varnothing$ のときは $H|_{GL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^{\sigma}; \Psi_1, \cdots, \Psi_q)$ である．ここで $S = \{d_1, \cdots, d_q\}$ $(d_1 < \cdots < d_q)$ とし，$\mu \in \Omega(q)$ に対し $\Psi_\mu = \sigma^{-1}(\Phi_{d_\mu})$

証明. $\widetilde{H}$ を $\mathcal{L}(P(N), GL(m))$ の X における固定部分群とすると $H = \widetilde{H} \cap (P \times P(\widetilde{\Gamma}^\sigma))$ かつ $\psi(H) = \psi(\widetilde{H}) \cap \psi(P \times P(\widetilde{\Gamma}^\sigma))$ である．実際，命題 2.1 より

$$\psi(\widetilde{H}) \cap \psi(P \times P(\widetilde{\Gamma}^\sigma)) = \left\{ (x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_l);\ \begin{array}{l} x_i = y_{\sigma^{-1}(i)} \text{ for } i \in I(\Gamma, N), \\ \prod_{i \in \Phi_\lambda} x_i = 1 \text{ for } \lambda \in \Omega(p) \end{array} \right\}$$

である．そして $x = (x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_l) \in \psi(\widetilde{H}) \cap \psi(P \times P(\widetilde{\Gamma}^\sigma))$ に対して

$$B = \operatorname{diag}(D_{f_{\sigma(1)}}(y_1), D_{f_{\sigma(2)}}(y_2), \cdots, D_{f_{\sigma(l)}}(y_l)) \in P(\widetilde{\Gamma}^\sigma)$$

とし $A = \operatorname{diag}(A_1, \cdots, A_r) \in P$ と定める．ここで $i \in J(\Gamma, N)$ に対して

$$A_i = \operatorname{diag}(y_{\sigma^{-1}(i)}, 1, \cdots, 1, x_i y_{\sigma^{-1}(i)}{}^{-1}) \in GL(e_i)$$

とし，その他の i については $A_i = D_{e_i}(x_i) \in GL(e_i)$ とおく．すると $(A, B) \in H$ で $\psi(A, B) = x$ がわかる．$\tau : P(N) \times P(\widetilde{\Gamma}^\sigma) \to P(\widetilde{\Gamma}^\sigma)$ と $\pi : (K^\times)^r \times (K^\times)^l \to (K^\times)^l$ を標準的な全射とし，$\psi' : P(\widetilde{\Gamma}^\sigma) \to (K^\times)^l$ を $\psi' \circ \tau = \pi \circ \psi$ をみたすような全射準同型とする．各 $\lambda \in \Omega(p)$ に対して $\prod_{i \in \Phi_\lambda \cap I} y_{\sigma^{-1}(i)} \times \prod_{i \in \Phi_\lambda \cap (\Omega(r) \setminus I)} x_i = \prod_{i \in \Phi_\lambda} x_i = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} \psi'(H|_{GL(m)}) &= \psi' \circ \tau(H) \\ &= \pi \circ \psi(H) = \left\{ (y_1, \cdots, y_l);\ \prod_{i \in \Phi_d} y_{\sigma^{-1}(i)} = 1 \text{ for } d \in S \right\} \end{aligned}$$

となる．ただし添数集合 Δ が空のときは $\prod_{\delta \in \Delta}$ は 1 を表すとする．$1 \to P_0(\widetilde{\Gamma}^\sigma) \hookrightarrow P(\widetilde{\Gamma}^\sigma) \xrightarrow{\psi'} (K^\times)^l \to 1$ は完全列だから，ψ' は $P(\widetilde{\Gamma}^\sigma)$ の $P_0(\widetilde{\Gamma}^\sigma)$ を含む部分群と $(K^\times)^l$ の部分群との間の標準的な全単射を誘導する．条件 $\prod_{i \in \Phi_d} y_{\sigma^{-1}(i)} = 1$ $(d \in S)$ は $\prod_{i \in \Psi_\mu} y_i = 1$ $(\mu \in \Omega(q))$ と書き直せることに注意する．$H|_{GL(m)}$ は $P(\widetilde{\Gamma}^\sigma)$ の $P_0(\widetilde{\Gamma}^\sigma)$ を含む部分群だから，主張が成り立つことがわかる．■

系 2.3. n, m, N, Γ, $\widetilde{\Gamma}$, σ, ψ, P, S, Ψ_μ は命題2.1, 2.2 と同じとする．$\widetilde{H}'|_{SL(m)}$ (resp. $H'|_{SL(m)}$) を $\mathcal{L}(P(N), SL(m))$ (resp. $\mathcal{L}(P, SL(m))$) の $X^N_m(\Gamma)$ における固定部分群 $\widetilde{H}'$ (resp. H') の $SL(m)$-part とする．このとき次が成り立つ：

(1) $\widetilde{H}'|_{SL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^\sigma) \cap SL(m) = P(\widetilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1)$，ただし $\Psi_1 = \Omega(l)$.

(2) $S = \varnothing$ のとき $H'|_{SL(m)} = \widetilde{H}'|_{SL(m)}$；$S \neq \varnothing$ かつ $\Psi_{q+1} = \Omega(l) \setminus \bigcup_{\mu \in \Omega(q)} \Psi_\mu$ が空でないとき $H'|_{SL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \cdots, \Psi_q) \cap SL(m) = P(\widetilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \cdots, \Psi_q, \Psi_{q+1})$；そして $S \neq \varnothing$ かつ $\Psi_{q+1} = \varnothing$ のとき $H'|_{SL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^\sigma; \Psi_1, \cdots, \Psi_q)$ となる．

証明. $\widetilde{H}'|_{SL(m)} = \widetilde{H}|_{GL(m)} \cap SL(m)$，そして $H'|_{SL(m)} = H|_{GL(m)} \cap SL(m)$ だから主張が成り立つことが

系 2.4. 記号は命題 2.2, 系 2.3 と同様とする．このとき $\mathcal{S}(H|_{GL(m)}) \subsetneqq \{u \in \mathcal{S}(P);\ u \leqq m\}$ であり，$\mathcal{S}(H'|_{SL(m)}) \subsetneqq \{u \in \mathcal{S}(P);\ u \leqq m\} \cup \{m-u;\ u \in \mathcal{S}(P),\ u < m\} \cup \{m\}$ である．

証明. もし $S = \emptyset$ なら，$H|_{GL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^{\sigma})$ だから定義より $\mathcal{S}(H|_{GL(m)}) = \emptyset$ となる．$S \neq \emptyset$ のとき，$u \in \mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ とし，空でない $\Delta \subsetneqq \Omega(q)$ に対して $u = \sum_{\mu\in\Delta}\sum_{t\in\Psi_\mu} f_{\sigma(t)}$ とする．$\Psi_\mu = \sigma^{-1}(\Phi_{d_\mu})$ であり，$\Phi_{d_\mu} \subsetneqq I(\Gamma, N)$ だから，このとき $u = \sum_{\mu\in\Delta}\sum_{i\in\Phi_{d_\mu}} f_i = \sum_{\mu\in\Delta}\sum_{i\in\Phi_{d_\mu}} e_i$ となる．こうして $\mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ についての主張が得られる．$H'|_{SL(m)} = H|_{GL(m)} \cap SL(m)$ については，補題 1.5 より，$\mathcal{S}(H'|_{SL(m)})$ についての主張から得られる． ■

注意 2.5. 記号は命題2.1, 系2.3 と同様とする．このとき $\mathcal{S}(\widetilde{H}|_{GL(m)}) = \emptyset$ であり，$\mathcal{S}(\widetilde{H}'|_{SL(m)}) = \{m\}$ である．

補題 2.6. $N = (e_1, \cdots, e_r)$ とし，$P = P(N; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ とする．$u \in \mathcal{S}(P)$ かつ $u < m$ と仮定する．このとき $\mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ (resp. $\mathcal{S}(H'|_{SL(m)})$) が u (resp. u と $m-u$) を含むような $\Gamma \in \mathcal{F}(m, N)$ が存在する．ただし $H|_{GL(m)}$ (resp. $H'|_{SL(m)}$) は $\mathcal{L}(P, GL(m))$ (resp. $\mathcal{L}(P, SL(m))$) の $X_m^N(\Gamma)$ における固定部分群 H (resp. H') の $GL(m)$-part (resp. $SL(m)$-part) とする．

証明. $u < m$ であるような $\Lambda \subsetneqq \Omega(p)$ に対して $u = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in\Phi_\lambda} e_i$ とおく．次のように $\Gamma = (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$ を定義する：$i \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$ のときは $f_i = e_i$ とし，それ以外の番号は $f_i = 0$ とする．$q = \sharp\Lambda$ とおく．このとき $I(\Gamma, N) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$ で $S = \Lambda$ だから，命題 2.2 より $H|_{GL(m)} = P(\widetilde{\Gamma}^{\sigma}; \Psi_1, \cdots, \Psi_q)$ となる．したがって $u = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i\in\Phi_\lambda} e_i = \sum_{\mu\in\Omega(q)}\sum_{t\in\Psi_\mu} f_{\sigma(t)}$ となるので $u \in \mathcal{S}(H|_{GL(m)})$ がわかる．また，$u < m$ で $H'|_{SL(m)} = H|_{GL(m)} \cap SL(m)$ だから，補題 1.5 より $u, m-u \in \mathcal{S}(H'|_{SL(m)})$ であることもわかる． ■

3　軌道分解

補題 3.1. 群 $\rho_i : G \to GL(V_i)$ を群 G の表現とする$(i = 1, 2)$．ベクトル空間の同型 $\tau : V_1 \simeq V_2$ と群の同型 $\sigma : \rho_1(G) \simeq \rho_2(G)$ があって，任意の $g \in G$ に対して $\tau \circ \rho_1(g) = \sigma(\rho_1(g)) \circ \tau$ となるとする．このとき，$\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が (G, ρ_1, V_1) の G 軌道の完全代表系ならば，$\{\tau(v_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が (G, ρ_2, V_2) の G 軌道の完全代表系である．

証明. とくに τ は単射だから，$\lambda, \mu \in \Lambda\ (\lambda \neq \mu)$ に対して $\tau(\rho_1(G)v_\lambda) \cap \tau(\rho_1(G)v_\mu) = \tau(\rho_1(G)v_\lambda \cap \rho_1(G)v_\mu) = \emptyset$ である．したがって $V_2 = \tau(V_1) = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \tau(\rho_1(G)v_\lambda)$ となる．また条件より，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\tau(\rho_1(G)v_\lambda) = \rho_2(G)\tau(v_\lambda)$ となるので，$V_2 = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \rho_2(G)\tau(v_\lambda)$ である． ■

補題 3.1 の条件をみたす (G, ρ_1, V_1) と (G, ρ_2, V_2) は**3 つ組として同値**と呼ばれる．

注意 3.2. 次の事実が知られている (V. Pyasetskii [5])：H を代数群とする．$\rho^* : H \to GL(V^*)$ を $\rho : H \to GL(V)$ の双対表現とする．このとき (H, ρ, V) がF.P. であることと，(H, ρ^*, V^*) がF.P. であることとは同値である．したがって $(H,\ \rho_1^{(*)} \oplus \cdots \oplus \rho_l^{(*)},\ V_1^{(*)} \oplus \cdots \oplus V_l^{(*)})$ がF.P. であることと $(H,\ \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l,\ V_1 \oplus \cdots \oplus V_l)$

が F.P. であることとは同値である．ここで $\rho_i^{(*)}$ (resp. $V_i^{(*)}$) は ρ_i (resp. V_i) またはその双対 ρ_i^* (resp. V_i^*) を表すものとする．

G の $\mathcal{L}_d(Q) = \bigoplus_{i\to j \text{ in } Q} M(d_j, d_i)$ への作用は，G の $M(d_j, d_i)$ ($\overset{i}{\cdot} \longrightarrow \overset{j}{\cdot}$ in Q) 上の表現 $\rho_Q{}^{i,j}$ の直和として与えられている．そこで G の $\mathcal{L}_d(Q)$ 上の表現 $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{r-1}$ を次のように定義する：$\rho_i = \rho_Q{}^{i,j}$ ($i < j$ のとき)；$\rho_i = (\rho_Q{}^{j,i})^*$ ($j > i$ のとき)．上述のことより $(G, \mathcal{L}_d(Q)) = (G, \bigoplus_{i\to j \text{ in } Q} \rho_Q{}^{i,j}, \mathcal{L}_d(Q))$ が F.P. であることと $(G, \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{r-1}, \mathcal{L}_d(Q))$ が F.P. であることとは同値である，ただし双対基底により表現空間とその双対空間を同一視した．$(G, \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{r-1}, \mathcal{L}_d(Q))$ と $(G, \mathcal{L}_d(Q_0)) = (G, \bigoplus_{i=1}^{r-1} \rho_{Q_0}{}^{i,i+1}, \mathcal{L}_d(Q_0))$ は 3 つ組として同値だから，補題 3.1 よりそれらの F.P. 性は同じである．つまり F.P. かどうかはクイバー Q の矢の向きにはよらない． $\square$

次の補題は，具体的な計算の方法を与える：

補題 3.3. $\rho_i : G \to GL(V_i)$ を群 G の表現とする($i = 1, 2$)．$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を (G, ρ_1, V_1) の G 軌道の完全代表系とし，H_λ を $x_\lambda \in V_1$ における固定部分群とする．このとき $\{y_\mu{}^{(\lambda)}\}_{\mu\in\Delta}$ を $(H_\lambda, \rho_2|_{H_\lambda}, V_2)$ の H_λ 軌道の完全代表系とすると，$\{(x_\lambda, y_\mu{}^{(\lambda)})_{\mu\in\Delta};\ \lambda \in \Lambda\}$ が $(G, \rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ の G 軌道の完全代表系である．とくに $\rho_1 \oplus \rho_2$ が有限個の軌道を持つための必要十分条件は，ρ_1 と各 $\rho_2|_{H_\lambda}$ ($\lambda \in \Lambda$) がいずれも有限個の軌道を持つことである．

証明. $(x_1, x_2) \in V_1 \oplus V_2$ とすると，ある $g_1 \in G$ と $\lambda \in \Lambda$ に対して $\rho_1(g_1)x_1 = x_\lambda$ となる．また $g_2 \in H_\lambda$ と $\mu \in \Delta$ があって $\rho_1(g_2)x_\lambda = x_\lambda$ かつ $\rho_2(g_2)(\rho_2(g_1)x_2) = y_\mu{}^{(\lambda)}$ とできる．このとき $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g_2 g_1)(x_1, x_2) = (\rho_1(g_2)x_\lambda, \rho_2(g_2)(\rho_2(g_1)x_2)) = (x_\lambda, y_\mu{}^{(\lambda)})$ となる．一方，$\lambda, \lambda' \in \Lambda$ と $\mu, \mu' \in \Delta$ に対して $(x_\lambda, y_\mu{}^{(\lambda)})$ と $(x_{\lambda'}, y_{\mu'}{}^{(\lambda)})$ が同じ軌道上にあったとすると，ある $g \in G$ に対して $\rho_1(g)x_\lambda = x_{\lambda'}$ となるので $\lambda = \lambda'$．このとき $g \in H_\lambda$ で $\rho_2(g)y_\mu{}^{(\lambda)} = y_{\mu'}{}^{(\lambda)}$ だから $\mu = \mu'$ でもある． ■

m と n を正の整数とし，$N = (e_1, \cdots, e_r)$ を $n = \sum_{i\in\Omega(r)} e_i$ となるような r 個の非負整数の組とする．$\Gamma = (f_1, \cdots, f_r) \in \mathcal{F}(m, N)$，すなわち各 f_i は非負整数で $\sum_{i\in\Omega(r)} f_i \leqq m$ かつ $f_i \leqq e_i$ ($i \in \Omega(r)$) をみたすとする．$l = \sharp\operatorname{supp} N$，$\sigma = \sigma_N$ とし，$N^\sigma = (e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(l)})$，$\Gamma^\sigma = (f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(l)})$ とおく．以下そのような N と Γ に対して $X_m^{N^\sigma}(\Gamma^\sigma)$ を $X_m^N(\Gamma)$ と略記する．すると命題 1.8 は次のように言い換えられる：N を r 個の非負整数の組とし，$G = GL(m)$ または $SL(m)$ とおく．$P = P(N^\sigma; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ または $P = P(N^\sigma)$ とおく．ただし $\Phi_1, \cdots, \Phi_p$ は空でない $\Omega(\sharp\operatorname{supp} N)$ の部分集合である．もし $m \notin \mathcal{S}(P)$ または $G = GL(m)$ ならば，$\mathcal{L}(P, G)$ の軌道の完全代表系として $\{X_m^N(\Gamma)\}_{\Gamma\in\mathcal{F}(m,N)}$ をとることができる．

$d = (d_1, \cdots, d_r)$ を r 個の正整数の組とする．次の条件をみたす $r(r+1)/2$ 個の非負整数の組 $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1\leqq i\leqq j\leqq r}$ を **d-sequence** と呼ぶことにする：各 $i \in \Omega(r)$ に対して $0 \leqq \gamma_{i,r} \leqq \gamma_{i,r-1} \leqq \cdots \leqq \gamma_{i,i}$ であり，各 $s \in \Omega(r)$ に対して $\sum_{i=1}^{s} \gamma_{i,s} = d_s$．

$(\gamma_{i,j})_{1\leqq i\leqq j\leqq r}$ を d-sequence とする．各 $s \in \Omega(r-1)$ に対して $\Gamma_s = (\gamma_{1,s}, \gamma_{2,s}, \cdots, \gamma_{s,s})$，$\Gamma'_{s+1} = (\gamma_{1,s+1}, \gamma_{2,s+1}, \cdots, \gamma_{s,s+1})$ とおく．d-sequence の条件から，各 $s \in \Omega(r-1)$ に対して $\Gamma'_{s+1} \in \mathcal{F}(d_{s+1}, \Gamma_s)$ であることがわかる．したがって $M(d_{s+1}, d_s)$ の元 $X_{d_{s+1}}^{\Gamma_s}(\Gamma'_{s+1})$ が定義でき，それを並べて $\mathcal{L}_d = M(d_2, d_1) \oplus$

$M(d_3,d_2)\oplus\cdots\oplus M(d_r,d_{r-1})$ の元 $X(\Gamma)=(X_{d_2}^{\Gamma_1}(\Gamma_2'),X_{d_3}^{\Gamma_2}(\Gamma_3'),\cdots,X_{d_r}^{\Gamma_{r-1}}(\Gamma_r'))$ が得られる．$G=G_1\times\cdots\times G_r$，ただし $G_i=GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とおく．$(G,\mathcal{L}_d)$ の $X(\Gamma)$ における固定部分群の G_r-part を $H_G(\Gamma)$ と書くことにする．

例 3.4. $d=(d_1,d_2)$ に対し，$T_1=GL(d_1)\times GL(d_2)$，$T_2=GL(d_1)\times SL(d_2)$，$T_3=SL(d_1)\times GL(d_2)$，$T_4=SL(d_1)\times SL(d_2)$ とおく．d-sequence $\Gamma=(\gamma_{i,j})_{1\leqq j\leqq j\leqq 2}$ に対して $\Gamma_2=(\gamma_{12},\gamma_{22})$，$\sigma=\sigma_{\Gamma_2}$ とおく．命題 2.1, 2.2 と系 2.3 を $N=(d_1)$ に適用すると，次のことがわかる：まず $d_1\leqq d_2$ の場合．$0\leqq\gamma_{12}<d_1$ のときは $H_{T_1}(\Gamma)=H_{T_3}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma)$ で，$H_{T_2}(\Gamma)=H_{T_4}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma)\cap SL(d_2)$ となる．$\gamma_{12}=d_1$ のときは $H_{T_1}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma)$ で $H_{T_2}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma)\cap SL(d_2)$ となり，$H_{T_3}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma;\Psi_1)$，$H_{T_4}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma;\Psi_1)\cap SL(d_2)$ である．だたし $\Psi_1=\{1\}$ とする．$d_1>d_2$ の場合には $H_{T_1}(\Gamma)=H_{T_3}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma)$ で，$H_{T_2}(\Gamma)=H_{T_4}(\Gamma)=P({\Gamma_2}^\sigma)\cap SL(d_2)$ となる．

命題 3.5. $d=(d_1,\cdots,d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$G=G_1\times\cdots\times G_r$，ただし $G_i=GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする．このとき各 d-sequence $\Gamma=(\gamma_{i,j})_{1\leqq i\leqq j\leqq r}$ に対し $H_G(\Gamma)=P({\Gamma_r}^\sigma)$ または $P({\Gamma_r}^\sigma;\Phi_1,\cdots,\Phi_p)$ と表すことができる．ここで $\Gamma_r=(\gamma_{1,r},\cdots,\gamma_{r,r})$，$\sigma=\sigma_{\Gamma_r}$ であり，$\Phi_1,\cdots,\Phi_p$ は $\Omega(\sharp\operatorname{supp}\Gamma_r)$ の空でない部分集合である．

証明. r についての帰納法で示す．例 3.4 により $r=2$ の場合は正しいことがわかる．そこで $r\geqq 2$ で主張の成立を仮定する．$d'=(d_1,\cdots,d_r,d_{r+1})$，$d=(d_1,\cdots,d_r)$，$G'=G_1\times\cdots\times G_r\times G_{r+1}$，$G=G_1\times\cdots\times G_r$ とおく．各 d'-sequence $\Gamma'=(\gamma_{i,j})_{1\leqq i\leqq j\leqq r+1}$ に対して，r 番めまでの成分を並べることで d-sequence $\Gamma=(\gamma_{i,j})_{1\leqq i\leqq j\leqq r}$ を得る．帰納法の仮定より，$H_G(\Gamma)=P({\Gamma_r}^\sigma)$ または $P({\Gamma_r}^\sigma;\Phi_1,\cdots,\Phi_p)$ と表すことができる．$H_{G'}(\Gamma')$ は $\mathcal{L}(H_G(\Gamma),G_{r+1})$ の $X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma_{r+1}')$ における固定部分群の G_{r+1}-part だから，命題 2.1，2.2 と系 2.3 より，$H_{G'}(\Gamma')=P({\Gamma_{r+1}}^{\sigma'})$ または $P({\Gamma_{r+1}}^{\sigma'};\Psi_1,\cdots,\Psi_q)$ あるいは $P({\Gamma_{r+1}}^{\sigma'};\Psi_1,\cdots,\Psi_q,\Psi_{q+1})$ と表せる．ここで $\Gamma_{r+1}=(\gamma_{1,r+1},\cdots,\gamma_{r,r+1},\gamma_{r+1,r+1})$，$\sigma'=\sigma_{\Gamma_{r+1}}$ であり，$\Psi_1,\cdots,\Psi_q,\Psi_{q+1}$ は $\Omega(\sharp\operatorname{supp}\Gamma_{r+1})$ の空でない部分集合である． ■

定理 3.6. $d=(d_1,\cdots,d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$G=G_1\times\cdots\times G_r$，ただし $G_i=GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする．もし $(G,\mathcal{L}_d)$ が F.P. ならば，$\{X(\Gamma)\}_{\Gamma\in\mathcal{D}}$ が G 軌道の完全代表系である．ここで $\mathcal{D}$ は d-sequences 全体とする．

証明. r についての帰納法で示す．命題 1.8 を $N=(d_1)$ に適用することで，$r=2$ についての主張が得られる．そこで $r\geqq 2$ で主張が成り立つと仮定する．$d'=(d_1,\cdots,d_r,d_{r+1})$，$d=(d_1,\cdots,d_r)$，$G'=G_1\times\cdots\times G_r\times G_{r+1}$，$G=G_1\times\cdots\times G_r$ とする．各 d-sequence Γ に対し，命題 3.5 より $H_G(\Gamma)=P({\Gamma_r}^\sigma)$ または $P({\Gamma_r}^\sigma;\Phi_1,\cdots,\Phi_p)$ と表せる．したがって命題 1.8 が $\mathcal{L}(H_G(\Gamma),G_{r+1})$ に適用できる．$\{X(\Gamma)\}_{\Gamma\in\mathcal{D}}$ は帰納法の仮定により $(G,\mathcal{L}_d)$ の完全代表系で，$\left\{X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma_{r+1}');\ \Gamma_{r+1}'\in\mathcal{F}(d_{r+1},\Gamma_r)\right\}$ は命題 1.8 より $\mathcal{L}(H_G(\Gamma),G_{r+1})$ の完全代表系だから，補題 3.3 より

$$\left\{\left(X(\Gamma),\,X_{d_{r+1}}^{\Gamma_r}(\Gamma_{r+1}')\right)_{\Gamma_{r+1}'\in\mathcal{F}(d_{r+1},\Gamma_r)};\ \Gamma\in\mathcal{D}\right\}$$

が $(G', \mathcal{L}_{d'})$ の軌道の完全代表系である．$(\gamma_{i,j})_{1 \leqq i \leqq j \leqq r+1}$ が d'-sequence であることと $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leqq i \leqq j \leqq r} \in \mathcal{D}$ かつ $(\gamma_{1,r+1}, \cdots, \gamma_{r,r+1}) \in \mathcal{F}(d_{r+1}, \Gamma_r)$ かつ $\gamma_{r+1,r+1} = d_{r+1} - \sum_{i \in \Omega(r)} \gamma_{i,r+1}$ は同値であるから，$r+1$ についての主張が成り立つことがわかる． ■

4 有限個の軌道を持つための条件

$d = (d_1, \cdots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$G = G_1 \times \cdots \times G_r$，ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする．このとき集合 $\mathcal{N}_G(d)_1, \cdots, \mathcal{N}_G(d)_r$ を次のように定義する：まず $G_1 = GL(d_1)$ のとき $\mathcal{N}_G(d)_1 = \varnothing$ とし，$G_1 = SL(d_1)$ のときは $\mathcal{N}_G(d)_1 = \{d_1\}$ とおく．各 $s \in \Omega(r-1)$ については帰納的に定義する：$G_{s+1} = GL(d_{s+1})$ のとき $\mathcal{N}_G(d)_{s+1} = \{u \in \mathcal{N}_G(d)_s;\ u \leqq d_{s+1}\}$ とし，$G_{s+1} = SL(d_{s+1})$ のときは $\mathcal{N}_G(d)_{s+1} = \{u \in \mathcal{N}_G(d)_s;\ u \leqq d_{s+1}\} \cup \{d_{s+1} - u;\ u \in \mathcal{N}_G(d)_s,\ u < d_{s+1}\} \cup \{d_{s+1}\}$ とおく．

命題 4.1. $d = (d_1, \cdots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$G = G_1 \times \cdots \times G_r$，ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする．$\mathcal{D}$ を d-sequences 全体の集合とする．このとき $\bigcup_{\Gamma \in \mathcal{D}} \mathcal{S}(H_G(\Gamma)) = \mathcal{N}_G(d)_r$ が成り立つ．

証明. r についての帰納法で示す．$r = 2$ のとき，例 3.4 で求めた各 $H_{T_i}(\Gamma)$ を見ると主張の成り立つことがわかる．そこで $r \geqq 2$ で主張の成立を仮定する．$d' = (d_1, \cdots, d_r, d_{r+1})$，$d = (d_1, \cdots, d_r)$，$G' = G_1 \times \cdots \times G_r \times G_{r+1}$，$G = G_1 \times \cdots \times G_r$ とおく．$\Gamma' = (\gamma_{i,j})_{1 \leqq i \leqq j \leqq r+1}$ を任意の d'-sequence とする．この d' から d-sequence $\Gamma = (\Gamma_{i,j})_{1 \leqq i \leqq j \leqq r}$ が得られる．$H_{G'}(\Gamma')$ は $\mathcal{L}(H_G(\Gamma), G_{r+1})$ の $X^{\Gamma_r}_{d_{r+1}}(\Gamma'_{r+1})$ における固定部分群の G_{r+1}-part だから，命題 3.5 により，$H_G(\Gamma) = P(\Gamma_r{}^{\sigma})$ または $P(\Gamma_r{}^{\sigma}; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ と表せる．したがって，系 2.4 と注意 2.5 より，$G_{r+1} = GL(d_{r+1})$ のとき $\mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma')) \subseteqq \{u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma));\ u \leqq d_{r+1}\}$;$G_{r+1} = SL(d_{r+1})$ のときは $\mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma')) \subseteqq \{u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma));\ u \leqq d_{r+1}\} \cup \{d_{r+1} - u;\ u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma)),\ u < d_{r+1}\} \cup \{d_{r+1}\}$ となる．帰納法の仮定より $\mathcal{S}(H_G(\Gamma)) \subseteqq \mathcal{N}_G(d)_r$ であり，$\mathcal{N}_{G'}(d')_r = \mathcal{N}_G(d)_r$ だから，$\bigcup_{\Gamma' \in \mathcal{D}'} \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma')) \subseteqq \mathcal{N}_{G'}(d')_{r+1}$ となる．ここで $\mathcal{D}'$ は d'-sequences 全体の集合である．

逆に，$u \in \mathcal{N}_{G'}(d')_{r+1}$ とする．もし $G_{r+1} = GL(d_{r+1})$ ならば，定義から $u \in \mathcal{N}_{G'}(d')_r$ かつ $u \leqq d_{r+1}$ である．$\mathcal{N}_{G'}(d')_r = \mathcal{N}_G(d)_r$ だから，帰納法の仮定により，$u \in \mathcal{S}(H_G(\Gamma))$ となる d-sequence $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leqq i \leqq j \leqq r}$ が存在する．命題 3.5 より $H_G(\Gamma) = P(\Gamma_r{}^{\sigma}; \Phi_1, \cdots, \Phi_p)$ と表せるので，補題 2.6 より，$u \in \mathcal{S}(H|_{G_{r+1}})$ となるような $\Gamma'_{r+1} = (\gamma_{1,r+1}, \cdots, \gamma_{r,r+1}) \in \mathcal{F}(d_{r+1}, \Gamma_r)$ が存在する．ただし $\Gamma_r = (\gamma_{1,r}, \cdots, \gamma_{r,r})$ であり，$H|_{G_{r+1}}$ は $\mathcal{L}(H_G(\Gamma), G_{r+1})$ の $X^{\Gamma_r}_{d_{r+1}}(\Gamma'_{r+1})$ における固定部分群 H の G_{r+1}-part である．この Γ，Γ'_{r+1}，$\gamma_{r+1,r+1} = d_{r+1} - \sum_{i \in \Omega(r)} \gamma_{i,r+1}$ を用いて，$H|_{G_{r+1}} = H_{G'}(\Gamma')$ となるような d'-sequence Γ' を作れる．つまり $u \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ である．

次に $G_{r+1} = SL(d_{r+1})$ の場合を考えよう．$u \in \mathcal{N}_{G'}(d')_{r+1}$ とする．任意の d'-sequence Γ' に対して $d_{r+1} \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ となっていることに注意しよう．そこで $u < d_{r+1}$ と仮定する．このとき適当な $v \in \mathcal{N}_{G'}(d')_r$ を用いて $u = v$ または $u = d_{r+1} - v$ と表せる．したがって上と全く同様の議論により，適当な d'-sequence Γ' に対して $v \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ がわかる．このとき $H_{G'}(\Gamma') \subseteqq G_{r+1} = SL(d_{r+1})$ だから，$d_{r+1} - v \in \mathcal{S}(H_{G'}(\Gamma'))$ でもあることがわかる．したがって $r+1$ のときも主張が成り立つ． ■

定理 4.2. $d=(d_1,\cdots,d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$G=G_1\times\cdots\times G_r$，ただし $G_i=GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とおく．このとき，$(G,\mathcal{L}_d)$ がF.P. でないための必要十分条件は，$d_s\in\mathcal{N}_G(d)_{s-1}$ かつ $G_s=SL(d_s)$ となるような番号 s が存在することである．

証明. まず補題1.2，注意1.4，1.7より $\mathcal{L}(G_1,G_2)$ がF.P. でないための必要十分条件は，$G_1=SL(d_1)$ かつ $G_2=SL(d_2)$ かつ $d_1=d_2$ である．これは $d_2\in\mathcal{N}_{G'}(d')_1=\mathcal{N}_G(d)_1$ かつ $G_2=SL(d_2)$ と同値である．ただし $d'=(d_1,d_2)$，$G'=G_1\times G_2$ とする．

次に $\mathcal{L}(G_1,G_2)$ がF.P. の場合を考える．$(G,\mathcal{L}_d)$ がF.P. でないとする．このとき「$(G_1\times\cdots\times G_s,\mathcal{L}_{(d_1,\cdots,d_s)})$ がF.P. でなく，かつ $(G'',\mathcal{L}_{d''})$ はF.P.」となるような番号 $s\geqq 3$ が存在する．ただし $d''=(d_1,\cdots,d_{s-1})$，$G''=G_1\times\cdots\times G_{s-1}$ とする．このとき

(4.1) ある d''-sequence Γ'' に対して $\mathcal{L}(H_{G''}(\Gamma''),G_s)$ はF.P. でない．

逆に，(4.1) がある番号 $s\geqq 3$ に対して成り立つすると $(G_1\times\cdots\times G_s,\mathcal{L}_{(d_1,\cdots,d_s)})$ はF.P. ではなく，したがって $(G,\mathcal{L}_d)$ もF.P. ではない．

一方，(4.1) がある番号 $s\geqq 3$ に対して成り立つための必要十分条件は，注意1.4と命題1.6により $G_s=SL(d_s)$ かつ，ある Γ'' に対して $d_s\in\mathcal{S}(H_{G''}(\Gamma''))$ となることである．これは，命題4.1より，$d_s\in\mathcal{N}_{G''}(d'')_{s-1}$ かつ $G_s=SL(d_s)$ と同値である．$\mathcal{N}_{G''}(d'')_{s-1}=\mathcal{N}_G(d)_{s-1}$ であるから，定理が証明された． ■

注意 4.3. 定理4.2より，$G=GL(d_1)\times\cdots\times GL(d_r)$ に対し $(G,\mathcal{L}_d)$ は，したがって $(G,\mathcal{L}_d(Q))$ はF.P. である．つまり，よく知られている事実の直接の証明が得られたことになる．

例 4.4. $d_1<d_2<d_3<d_4$ とする．$(SL(d_1)\times\cdots\times SL(d_5),\mathcal{L}_{(d_1,\cdots,d_5)})$ がF.P. でないための必要十分条件は，次の条件のうちどれか一つが成り立つことである：

$$
\begin{array}{lll}
d_5=d_1, & d_5=d_3-d_1, & d_5=d_3-d_2+d_1,\\
d_5=d_2, & d_5=d_3-d_2, & d_5=d_4-d_2+d_1,\\
d_5=d_3, & d_5=d_4-d_1, & d_5=d_4-d_3+d_1,\\
d_5=d_4, & d_5=d_4-d_2, & d_5=d_4-d_3+d_2,\\
d_5=d_2-d_1, & d_5=d_4-d_3, & d_5=d_4-d_3+d_2-d_1.
\end{array}
$$

5 絶対不変式による特徴づけ

$d=(d_1,\cdots,d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$G=G_1\times\cdots\times G_r$，ただし $G_i=GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする．もし $(G,\mathcal{L}_d)$ が定数でない絶対不変式を持つなら（つまり $f(g\cdot v)=f(v)$ $(g\in G,\ v\in\mathcal{L}_d)$ をみたす $\mathcal{L}_d$ 上の有理関数 f が存在するなら），$(G,\mathcal{L}_d)$ は概均質ベクトル空間にはならない ([6] § 2 のPROPOSITION 3参照)．したがってF.P. にはなり得ない．しかしこの逆は一般には言えない：例えば $(SL(1)\times SL(3)\times SL(2),\mathcal{L}_{(1,3,2)})$ はF.P. ではなく，しかも絶対不変式を持たないことがわかる．この節では，有限個の軌道を持つための条

件 (定理 4.2) が，適当に向きを変えたクイバーを考えることにより，絶対不変式の存在で特徴づけられることを示す．

$(G, \mathcal{L}_d(Q))$ が F.P. でないとすると，注意 3.2 から $(G, \mathcal{L}_d)$ も F.P. ではない．したがって定理 4.2 から，次の条件をみたす $\{u_1, u_2, \cdots, u_l\} \subseteq \Omega(r)$ $(u_1 < u_2 < \cdots < u_l)$ が存在する：

$$
\begin{gathered}
d_{u_1} - d_{u_2} + d_{u_3} - d_{u_4} + d_{u_5} - d_{u_6} + \cdots + (-1)^{l+1} d_{u_l} = 0, \\
G_{u_i} = SL(d_{u_i}) \text{ for } i \in \Omega(l)
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
d_{u_1} &\leqq d_{u_1+1}, d_{u_1+2}, \cdots, d_{u_2}, \\
d_{u_2} - d_{u_1} &\leqq d_{u_2+1}, d_{u_2+2}, \cdots, d_{u_3}, \\
d_{u_3} - d_{u_2} + d_{u_1} &\leqq d_{u_3+1}, d_{u_3+2}, \cdots, d_{u_4}, \\
&\vdots \\
d_{u_{l-1}} - d_{u_{l-2}} + \cdots + (-1)^l d_{u_1} &\leqq d_{u_{l-1}+1}, d_{u_{l-1}+2}, \cdots, d_{u_l}.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

このとき頂点 $u_1, u_3, u_5, \cdots$ が sources に，頂点 $u_2, u_4, u_6, \cdots$ が sinks になるような，そして各 u_i と u_{i+1} の間には source も sink も無いようなクイバーを考える：

$$
(Q') \quad
\begin{cases}
\overset{1}{\bullet} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{u_1}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{u_2}{\bullet} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{u_l}{\bullet} \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{r}{\bullet} & (l\text{ が奇数のとき}), \\
\overset{1}{\bullet} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{u_1}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{u_2}{\bullet} \longleftarrow \cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \overset{u_l}{\bullet} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{r}{\bullet} & (l\text{ が偶数のとき}).
\end{cases}
$$

小池和彦氏 [4] によると，次のように $(G, \mathcal{L}_d(Q'))$ の絶対不変式が構成できる：l が奇数のときは

$$
f(X) = \det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
Y_{u_2,u_1} & Y_{u_2,u_3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & Y_{u_4,u_3} & Y_{u_4,u_5} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & 0 & Y_{u_6,u_5} & Y_{u_6,u_7} & \ddots & \vdots \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & Y_{u_{l-1},u_{l-2}} & Y_{u_{l-1},u_l}
\end{array} \right]
$$

とし，l が偶数のときは

$$
f(X) = \det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
Y_{u_2,u_1} & Y_{u_2,u_3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & Y_{u_4,u_3} & Y_{u_4,u_5} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & 0 & Y_{u_6,u_5} & Y_{u_6,u_7} & \ddots & \vdots \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & Y_{u_{l-2},u_{l-3}} & Y_{u_{l-2},u_{l-1}} \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & Y_{u_l,u_{l-1}}
\end{array} \right]
$$

とおく．ここで $X_{i+1,i} \in M(d_{i+1}, d_i)$，$X_{i,i+1} \in M(d_i, d_{i+1})$ に対し

$$\begin{cases} Y_{v,u} = X_{v,v-1}X_{v-1,v-2}\cdots X_{u+1,u} \in M(d_v, d_u) & (v > u \text{ のとき}), \\ Y_{v,u} = X_{v,v+1}X_{v+1,v+2}\cdots X_{u-1,u} \in M(d_v, d_u) & (v < u \text{ のとき}) \end{cases}$$

と略記した．条件(5.1) より，この $f(X)$ は $(G, \mathcal{L}_d(Q'))$ の絶対不変式である．また条件(5.2) によって $f(X)$ は定数ではないことがわかる ([4] の 251 ページ参照)．したがって次の系が得られた：

系 5.1. $d = (d_1, \cdots, d_r)$ を r 個の正整数の組とし，$G = G_1 \times \cdots \times G_r$，ただし $G_i = GL(d_i)$ または $SL(d_i)$ とする．このとき $(G, \mathcal{L}_d(Q))$ がF.P. でないための必要十分条件は，Q の矢の向きを適当に変えたクイバーQ' に対し $(G, \mathcal{L}_d(Q'))$ が定数でない絶対不変式を持つことである．

参考文献

[1] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscripta Math.* **6** (1972), 71–103

[2] V. G. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.* **56** (1980), 57–92

[3] T. Kimura, S. Kasai and O. Yasukura, A classification of the representations of reductive algebraic groups which admit only a finite number of orbits, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 643–691

[4] K. Koike, Relative invariants of the polynomial rings over type A_r, $\widetilde{A}_r$ quivers, *Adv. Math.* **86** (1991), 235–262

[5] V. Pyasetskii, Linear Lie group actions with finitely many orbits, *Functional Anal. Appl.* **9** (1975), 351–353

[6] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1–155