



## 2.1 G(1,1,3)

微分方程式 (1) で特異点  $x = 0, 1, \lambda_1, \lambda_2, \infty$  を持ち、その Riemann scheme が

$$\left( \begin{array}{cccccc} 0 & & 1 & & \lambda_k & \infty \\ 0 & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0} & & & 0 & \nu \\ \alpha_0 & \eta t_1^2/2 & -\eta t_2 & \alpha_1 & 2 & \nu + \alpha_\infty \end{array} \right)$$

であるものを考える。但し、特異点  $\lambda_1, \lambda_2$  は見かけの特異点であるとする。Riemann scheme で、 $\nu$  は Fuchs-Hukuhara の関係式より

$$\nu = -\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 - 1 + \alpha_\infty)$$

と定まり、 $p_1(x, t), p_2(x, t)$  は次の形に決まる。

$$p_1(x, t) = \frac{1 - \alpha_0}{x} + \frac{\eta t_1^2}{(x-1)^3} - \frac{\eta t_2^2}{(x-1)^2} + \frac{3 - \alpha_1}{x-1} - \sum_k \frac{1}{x - \lambda_k}$$

$$p_2(x, t) = \frac{\nu(\nu + \alpha_\infty)}{x(x-1)} + \frac{t_1 K_1 - (t_1^2 - t_2) K_2}{x(x-1)^2} + \frac{t_1^2 K_2}{x(x-1)^3} - \sum_k \frac{\lambda_k(\lambda_k - 1)\mu_k}{x(x-1)(x - \lambda_k)}$$

$\lambda_1, \lambda_2$  が見かけの特異点であることより  $K_1, K_2$  は  $t, \lambda, \mu$  の有理関数として定まることが分かる。微分方程式 (1) において monodromy 保存変形を考える。以下、パラメータはまとめて  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\infty, \eta)$  で表す。

**Proposition 2.1 (H.Kimura)** (1) の解の基本形の monodromy や Stokes 係数が  $t$  に依存しないための必要十分条件は  $(\lambda(t), \mu(t))$  が次の Hamilton 系  $\mathcal{K}(\alpha)$  を満たすことである。

$$d\lambda_k = \sum_{i=1,2} \frac{\partial K_i}{\partial \mu_k} dt_i, \quad d\mu_k = - \sum_{i=1,2} \frac{\partial K_i}{\partial \lambda_k} dt_i$$

Hamiltonian  $K_i$  は  $\lambda_i, \mu_i$  の有理関数になっているが、次の変換によって多項式 Hamiltonian に移すことができる。 $K_i$  の具体的な形は [1] を参照。

変換  $F : (t, \lambda, \mu) \rightarrow (s, q, p)$  を

$$s_1 = \frac{1}{2}t_1^2 + t_2, \quad s_2 = t_1$$

$$q_1 = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{t_1^2}, \quad q_2 = -\frac{2 - \lambda_1 - \lambda_2}{t_1} - \frac{t_2(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{t_1^3}$$

及び条件

$$\sum_k p_k dq_k \equiv \sum_k \mu_k d\lambda_k \quad \text{mod } dt_1, dt_2$$

で定める。これは正準変換である。具体的には

$$p_1 = \frac{(t_1^2 + (1 - \lambda_1)t_2)\mu_1 + (t_1^2 + (1 - \lambda_2)t_2)\mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$p_2 = \frac{t_1\{(1 - \lambda_1)\mu_1 - (1 - \lambda_2)\mu_2\}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

**Theorem 2.2 (H.Kimura)** 上に定めた正準変換によって Hamilton 系  $\mathcal{K}(\alpha)$  は

$$dq_k = \sum_{i=1,2} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} dt_i, \quad dp_k = - \sum_{i=1,2} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} dt_i$$

にうつされる。ここで  $H_1, H_2$  は  $\mathbb{C}(s)[q, p]$  の元で

$$H_1 = q_1^3 p_1^2 + 2q_1^2 \left(q_2 + \frac{1}{s_2}\right) p_1 p_2 + q_1 \left\{ q_2 \left(q_2 + \frac{1}{s_2}\right) - \left(\frac{s_1}{s_2^2} + \frac{1}{2}\right) q_1 \right\} p_2^2$$

$$- \left\{ (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) q_1^2 + \eta \left(q_1 + \frac{q_2}{s_2}\right) \right\} p_1$$

$$- \left\{ (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) q_1 q_2 + \frac{\alpha_1}{s_2} q_1 - \eta \left(\frac{s_1}{s_2^2} - \frac{1}{2}\right) q_2 + \frac{\eta}{s_2} \right\} p_2$$

$$+ \nu(\nu + \alpha_\infty) q_1$$

$$H_2 = q_1^2 \left(q_2 + \frac{1}{s_2}\right) p_1^2 + 2q_1 \left\{ q_2 \left(q_2 + \frac{1}{s_2}\right) - q_1 \left(\frac{s_1}{s_2^2} + \frac{1}{2}\right) \right\} p_1 p_2$$

$$+ \left\{ q_2^2 \left(q_2 + \frac{1}{s_2}\right) + \left(\frac{s_1^2}{s_2^3} - \frac{s_2}{4}\right) q_1^2 - \left(\frac{s_1}{s_2^2} + \frac{3}{2}\right) q_1 q_2 - \frac{q_1}{s_2} \right\} p_2^2$$

$$- \left\{ (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) q_1 q_2 + \frac{\alpha_1}{s_2} q_1 - \eta \left(\frac{s_1}{s_2^2}\right) q_2 + \frac{\eta}{s_2} \right\} p_1$$

$$- \left\{ (\alpha_0 + \alpha_1 - 1) q_2^2 - \left\{ \alpha_0 - 1 + \alpha_1 \left(\frac{s_1}{s_2^2} + \frac{1}{2}\right) \right\} q_1 \right.$$

$$\left. + \left\{ \eta \left(\frac{s_1^2}{s_2^3} - \frac{s_2}{4}\right) + \frac{\alpha_1}{s_2} \right\} p_2 + \nu(\nu + \alpha_\infty) q_2 \right.$$

で与えられる。

Hamiltonian の形から、Hamilton 系  $G(1,1,3)(\alpha)$  は  $B_{113} \times T^*\mathbb{C}^2$ 、 $B_{113} = \mathbb{C}^2 \setminus \{s_2 = 0\}$ 、上で定義されているものとみなすことができる。

### 3 対称性

初期値空間の構成に用いる Garnier 系の対称性について述べる。たとえば、 $G(1,1,3)(\alpha)$  の対称性とは、双有理的正準変換  $(s, q, p) \rightarrow (s', q', p')$  で  $G(1,1,3)(\alpha)$  を別のパラ

メータ  $\alpha'$  に対する  $G(1, 1, 3)(\alpha')$  に移すものをいう。このような変換全体をつかまえることはできていないが、具体的に以下のものを作ることができる。パラメータ  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\infty, \eta)$  において  $\alpha_0$  と  $\alpha_\infty$  を入れ替える変換を  $\sigma$  とする。

**Proposition 3.1** 双有理変換  $T : (t, \lambda, \mu) \rightarrow (t', \lambda', \mu')$

$$(T) \quad \begin{cases} t'_1 = t_1, & t'_2 = -t_1^2 - t_2 \\ \lambda'_k = \frac{1}{\lambda_k}, & \mu'_k = -\lambda_k^2 \mu_k - \nu \lambda_k \end{cases}$$

変換  $T$  は正準変換で、Hamilton 系  $\mathcal{K}(\alpha)$  を  $\mathcal{K}(\sigma : \alpha)$  にうつす。

正準変換  $T$  は変換  $F$  により、 $G(1, 1, 3)(\alpha)$  たちの変換を誘導する。それを  $\tilde{T} : (s, q, p) \rightarrow (s', q', p')$  とする。

**Proposition 3.2** 双有理的正準変換  $\tilde{T}$  は次で与えられる。

$$(\tilde{T}) \quad \begin{cases} s'_1 = -s_1, & s'_2 = s_2 \\ q'_1 = \frac{q_1}{(\frac{1}{2}s_2^2 + s_1)q_1 + s_2q_2 + 1} \\ q'_2 = \frac{q_2 + s_2q_1}{(\frac{1}{2}s_2^2 + s_1)q_1 + s_2q_2 + 1} \\ p'_1 = \{(\frac{1}{2}s_2^2 + s_1)q_1 + s_2q_2 + 1\} \\ \quad \{(-\frac{1}{2}s_2^2 + s_1)q_1 + 1\}p_1 + \{(-\frac{1}{2}s_2^2 + s_1)q_2 - 2s_2\}p_2 \\ p'_2 = \{(\frac{1}{2}s_2^2 + s_1)q_1 + s_2q_2 + 1\}\{s_2q_1p_1 + (s_2q_2 + 1)p_2\} \end{cases}$$

## 4 初期値空間の構成

### 4.1 $(q, p)$ 空間の compact 化

$(s, q, p)$  の空間である  $B$  上の fiber 空間  $B \times \mathbb{C}^4 = B \times T^*\mathbb{C}^2$  の fiber の compact 化として  $B \times \mathbb{P}^2$  上の  $\mathbb{P}^2$ -bundle を以下のように構成する。 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$  を  $\mathbb{P}^2$  の斉次座標、 $U_i = \{\xi \in \mathbb{P}^2 | \xi_i \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^2$  を第  $i$  affain 座標近傍とする。 $q \in \mathbb{C}^2$  は  $U_0$  の affain 座標である。すなわち

$$q_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad q_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}$$

$X_i := B \times U_i \times \mathbb{P}^2 (i = 0, 1, 2)$  とおき、この第 3 成分の  $\mathbb{P}^2$  の斉次座標を  $\eta^{(i)}$  とする。このとき  $X_i$  たちを次の関係で貼り合わせた多様体を  $X$  で表す。

$$\eta^{(0)} = g_{i0} \cdot \eta^{(i)}$$

$$g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\nu q_1 & -q_1^2 & -q_1 q_2 \\ 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix}, \quad g_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ -\nu q_2 & -q_1 q_2 & -q_2^2 \end{pmatrix}$$

$$X^0 = \bigcup_{i=0}^2 X_i^0, \quad X_i^0 = \{(s, \xi, \eta^{(i)}) \in X_i \mid \eta_0^i \neq 0\}$$

とおけば、 $D = X \setminus X^0$  は  $B \times \mathbb{P}^2$  上の  $\mathbb{P}^1$ -bundle であり、次のことがわかる。

**Proposition 4.1** Hamilton 系  $G(1, 1, 3)(\alpha)$  は  $B_{113} \times X$  上の Pfaff 方程式系  $G(1, 1, 3)^{(0)}(\alpha)$  に延長され、その特異点は  $D$  である。この延長された Pfaff 方程式系は、各  $X_i^0$  上では  $X_i^0$  における fiber 方向の affain 座標の多項式を Hamiltonian とする Hamilton 系である。

Hamilton 系  $G(1, 1, 3)(\alpha)$  は Painlevé property をみたすとすると、その任意の解は、 $B$  の任意の曲線に沿って meromorphic に解析接続することができる。このことを用いて、 $D$  のどのような点が、Pfaff 方程式系の積分多様体の閉包に含まれるかを決定する。このような点集合を accessible singularity と呼ぶことにする。

#### 4.1.1 G(1,1,3)

**Proposition 4.2**  $G(1, 1, 3)^{(0)}(\alpha)$  の accessible singularity  $A$  は次の 3 つの連結成分  $A_i (i = 0, 1, 2)$  からなる  $D$  の余次元 2 の部分多様体である。

$$\begin{aligned} A_0 &= \{(s, \xi, \eta^{(1)}) \mid \xi_0 = 0, \eta_0^{(1)} = \eta_2^{(1)} = 0\} \cup \{(s, \xi, \eta^{(2)}) \mid \xi_0 = 0, \eta_0^{(2)} = \eta_1^{(2)} = 0\} \\ A_1 &= \{(s, \xi, \eta^{(0)}) \mid \xi_1 = 0, \eta_0^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0\} \cup \{(s, \xi, \eta^{(2)}) \mid \xi_1 = 0, \eta_0^{(2)} = \eta_2^{(2)} = 0\} \\ A_2 &= \{(s, \xi, \eta^{(0)}) \mid \xi_0 + (s_1 + \frac{s_2^2}{2})\xi_1 + s_2\xi_2 = 0, \eta_0^{(0)} = 0, 2s_2\eta_1^{(0)} = (2s_1 + s_2^2)\eta_2^{(0)}\} \\ &\quad \cup \{(s, \xi, \eta^{(1)}) \mid \xi_0 + (s_1 + \frac{s_2^2}{2})\xi_1 + s_2\xi_2 = 0, \eta_0^{(1)} = 0, s_2\eta_1^{(1)} = \eta_2^{(1)}\} \\ &\quad \cup \{(s, \xi, \eta^{(2)}) \mid \xi_0 + (s_1 + \frac{s_2^2}{2})\xi_1 + s_2\xi_2 = 0, \eta_0^{(2)} = 0, 2\eta_1^{(2)} = (2s_1 + s_2^2)\eta_2^{(2)}\} \end{aligned}$$

**Proposition 4.3**  $\tilde{T}$  は accessible singularity の集合  $\{A_0, A_2\}$  の変換を与える。

$$\begin{array}{c|c|c} & A_0 & A_2 \\ \hline \tilde{T} & A_2 & A_0 \end{array}$$

## 4.2 blow up

Hamilton 系  $G(1, 1, 3)(\alpha)$  を  $X$  に延長して得られる Pfaff 方程式系  $G(1, 1, 3)^{(0)}(\alpha)$  の accessible singularity には、 $G(1, 1, 3)(\alpha)$  の解で定義される積分多様体たち (foliation の leaf) が入ってきて交わっている可能性がある。そこで、これらの accessible singularity に沿った blow up を行うことにより、これらの交わっている leaf たちを分離することを考える。

### 4.2.1 $A_0, A_2$

多様体  $X$  を  $A_0$  に沿って blow up して得られる多様体を  $X^{(1)}$  で、 $D = D^{(0)}$  の proper transform を再び同じ記号  $D^{(0)}$  で、exceptional divisor を  $D_0^{(1)}$  で表す。 $G(1, 1, 3)^{(0)}(\alpha)$  から  $X^{(1)}$  に誘導される Pfaff 方程式系を  $G(1, 1, 3)^{(1)}(\alpha)$  とする。

$(z_0^{(1)}, w_{01}^{(1)}, w_{02}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (z_1^{(1)}, w_{10}^{(1)}, w_{12}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (z_1^{(2)}, w_{21}^{(1)}, w_{22}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3$  をとり次の変換を考える。

$$\xi_0 = z_0^{(1)}, \quad \eta_0^{(1)} = z_0^{(1)} w_{01}^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = z_0^{(1)} w_{02}^{(1)}$$

$$\xi_0 = z_1^{(1)} w_{10}^{(1)}, \quad \eta_0^{(1)} = z_1^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = z_1^{(1)} w_{12}^{(1)}$$

$$\xi_0 = z_2^{(1)} w_{20}^{(1)}, \quad \eta_0^{(1)} = z_2^{(1)} w_{21}^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = z_2^{(1)}$$

exceptional divisor は次で与えられる。

$$\begin{aligned} D_0^{(1)} &= \{(s, \xi_2, z_0^{(1)}, w_{01}^{(1)}, w_{02}^{(1)}) | z_0^{(1)} = 0\} \\ &\cup \{(s, \xi_2, z_1^{(1)}, w_{10}^{(1)}, w_{12}^{(1)}) | z_1^{(1)} = 0\} \\ &\cup \{(s, \xi_2, z_2^{(1)}, w_{20}^{(1)}, w_{21}^{(1)}) | z_2^{(1)} = 0\} \end{aligned}$$

$G(1, 1, 3)^{(1)}(\alpha)$  から

$$\begin{aligned} A_{00}^{(1)} &= \{(s, \xi_2, z_0^{(1)}, w_{01}^{(1)}, w_{02}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, \frac{1}{\alpha_\infty}, w_{02}^{(1)})\} \in D_0^{(1)} \\ A_{01}^{(1)} &= \{(s, \xi_2, z_1^{(1)}, w_{10}^{(1)}, w_{12}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, \alpha_\infty, w_{12}^{(1)})\} \in D_0^{(1)} \\ A_{02}^{(1)} &= \{(s, \xi_2, z_2^{(1)}, w_{20}^{(1)}, w_{21}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, \alpha_\infty w_{21}^{(1)}, w_{21}^{(1)})\} \in D_0^{(1)} \end{aligned}$$

が foliation の singularity で  $D_0^{(1)} \setminus \{A_{00}^{(1)}, A_{01}^{(1)}, A_{02}^{(1)}\}$  は vertical leaf であることがわかる。

次に  $X^{(1)}$  を  $A_{01}^{(1)}$  に沿って blow up して得られる多様体を  $X^{(2)}$  で、 $D^{(0)}, D_0^{(1)} \subset X^{(1)}$  の proper transform を再び同じ記号で、新たに現れる exceptional divisor を  $D_0^{(2)}$  で表す。

$(z_0^{(2)}, w_{01}^{(2)}) \in \mathbb{C}^2, (z_1^{(2)}, w_{10}^{(2)}) \in \mathbb{C}^2$  をとり次の変換を考える。

$$z_1^{(1)} = z_0^{(2)}, \quad w_{01}^{(1)} = \alpha_\infty + z_0^{(2)} w_{01}^{(2)}$$

$$z_1^{(1)} = z_1^{(2)} w_{10}^{(2)}, \quad w_{01}^{(1)} = \alpha_\infty + z_1^{(2)}$$

$$D_0^{(2)} = \{z_0^{(2)} = 0\} \cup \{z_1^{(2)} = 0\}$$

$G(1, 1, 3)^{(2)}(\alpha)$  は  $(\xi_2, w_{12}^{(1)}, z_0^{(2)}, w_{01}^{(2)}, s)$  の多項式になることがわかる。これは foliation が  $(\xi_2, w_{10}^{(1)}, z_0^{(2)}, w_{01}^{(2)}, t) \in \mathbb{C}^4 \times B_{113}$  空間で特異点をもたず、この部分多様体の点を通る leaf はファイバー空間  $\pi : X^{(2)} \rightarrow B_{113}$  のファイバーに transversal であることを意味する。

また、 $(\xi_2, w_{10}^{(1)}, z_1^{(2)}, w_{10}^{(2)}) \in \mathbb{C}^2$  は Painlevé property より  $G(1, 1, 3)(\alpha)$  を通る解がない特異点であることがわかる。このような特異点を inaccessible singularity と呼ぶことにする。

Accessible singularity  $A_2$  に対しても上と同様の操作を行い、得られる divisor を  $D_2^{(1)}, D_2^{(2)}$  とする。

#### 4.2.2 $A_1$

前の節と同様の process を accessible singularity  $A_1$  に沿って実行する。以下では、 $A_1$  の近傍だけで考えればよいので前の節と記号を重複させている。

$A_1 \subset X$  に沿って blow up を行い、得られる多様体を  $X^{(1)}$  とする。 $D^{(0)}$  の proper transform を同じ記号  $D^{(0)}$  で新しく現れる exceptional divisor を  $D_1^{(1)}$  で表す。

$(Z_0^{(1)}, W_{01}^{(1)}, W_{02}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_1^{(1)}, W_{10}^{(1)}, W_{12}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_2^{(1)}, W_{21}^{(1)}, W_{22}^{(1)}) \in \mathbb{C}^3$  をとり次の変換を考える。

$$\xi_1 = Z_0^{(1)}, \quad \eta_0^{(0)} = Z_0^{(1)} W_{01}^{(1)}, \quad \eta_0^{(2)} = Z_0^{(1)} W_{02}^{(1)}$$

$$\xi_1 = Z_1^{(1)} W_{10}^{(1)}, \quad \eta_0^{(0)} = Z_1^{(1)}, \quad \eta_2^{(0)} = Z_1^{(1)} W_{12}^{(1)}$$

$$\xi_1 = Z_2^{(1)} W_{20}^{(1)}, \quad \eta_0^{(0)} = Z_2^{(1)} W_{21}^{(1)}, \quad \eta_2^{(0)} = Z_2^{(1)}$$

exceptional divisor は次で与えられる。

$$D_1^{(1)} = \{Z_0^{(1)} = 0\} \cup \{Z_1^{(1)} = 0\} \cup \{Z_2^{(1)} = 0\}$$

$G(1, 1, 3)^{(1)}(\alpha)$  より

$$A_{00}^{(1)} = \{(s, \xi_2, Z_0^{(1)}, W_{01}^{(1)}, W_{02}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, 0, -\frac{1}{\xi_2})\} \subset D_1^{(1)} \cap D^{(0)}$$

$$A_{01}^{(1)} = \{(s, \xi_2, Z_1^{(1)}, W_{10}^{(1)}, W_{12}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, 0, 0)\} \subset D_1^{(1)}$$

$$A_{02}^{(1)} = \{(s, \xi_2, Z_2^{(1)}, W_{20}^{(1)}, W_{21}^{(1)}) = (s, \xi_2, 0, -\xi_2, 0)\} \subset D_1^{(1)} \cap D^{(0)}$$

が foliation の singularity で  $D_1^{(1)}$  の中に誘導された Pfaff 系は  $D_1^{(1)} \setminus (D^{(0)} \cap D_1^{(1)})$  に特異点を持たず、 $D_1^{(1)} \setminus \{A_{00}^{(1)}, A_{02}^{(1)}\}$  は vertical leaf であることがわかる。また  $A_{01}^{(1)}$  は inaccessible singularity である。

$D_1^{(1)}$  の部分多様体  $A_{02}^{(1)}$  に沿って 2 回目の blow up を行い、得られた多様体を  $X^{(2)}$  とする。 $D^{(0)}, D_1^{(1)}$  の proper transform を同じ記号で表し、新しく現れる exceptional divisor を  $D_1^{(2)}$  とする。

$(Z_0^{(2)}, W_{01}^{(2)}, W_{02}^{(2)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_1^{(2)}, W_{10}^{(2)}, W_{12}^{(2)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_2^{(2)}, W_{21}^{(2)}, W_{22}^{(2)}) \in \mathbb{C}^3$  をとり次の変換を考える。

$$Z_2^{(1)} = Z_0^{(2)}, \quad W_{20}^{(1)} = -\xi_2 + Z_0^{(2)}W_{01}^{(2)}, \quad W_{21}^{(1)} = Z_0^{(2)}W_{02}^{(2)}$$

$$Z_2^{(1)} = Z_1^{(2)}W_{10}^{(2)}, \quad W_{20}^{(1)} = -\xi_2 + Z_1^{(2)}, \quad W_{21}^{(1)} = Z_1^{(2)}W_{12}^{(2)}$$

$$Z_2^{(1)} = Z_2^{(2)}W_{20}^{(2)}, \quad W_{20}^{(1)} = -\xi_2 + Z_2^{(2)}W_{21}^{(2)}, \quad W_{21}^{(1)} = Z_2^{(2)}$$

$$D_1^{(2)} = \{Z_0^{(2)} = 0\} \cup \{Z_1^{(2)} = 0\} \cup \{Z_2^{(2)} = 0\}$$

$$A_{00}^{(2)} = \{(s, \xi_2, Z_0^{(2)}, W_{01}^{(2)}, W_{02}^{(2)}) = (s, \xi_2, 0, -1, 0)\} \subset D_1^{(2)}$$

$$A_{01}^{(2)} = \{(s, \xi_2, Z_1^{(2)}, W_{10}^{(2)}, W_{12}^{(2)}) = (s, \xi_2, 0, -1, 0)\} \subset D_1^{(2)}$$

$$A_{02}^{(2)} = \{(s, \xi_2, Z_2^{(2)}, W_{20}^{(2)}, W_{21}^{(2)}) = (s, \xi_2, 0, 0, 0)\} \subset D_1^{(2)} \cap D_1^{(1)}$$

このとき  $D_1^{(2)}$  は  $X^{(2)}$  に誘導された Pfaff 系の特異点であるが、 $G(1, 1, 3)(\alpha)$  の解の定める leaf の閉包に含まれる可能性のある点は、 $D_1^{(2)}$  の部分集合  $A_{00}^{(2)}, A_{01}^{(2)} \subset D_1^{(2)}$  となる。 $A_{02}^{(2)}$  は inaccessible singularity である。

$D_1^{(2)}$  の部分多様体  $A_{00}^{(2)}$  に沿って 3 回目の blow up を行い、得られた多様体を  $X^{(3)}$  とする。 $D^{(0)}, D_1^{(1)}, D_1^{(2)}$  の proper transform を同じ記号で表し、新しく現れる exceptional divisor を  $D_1^{(3)}$  とする。

$(Z_0^{(3)}, W_{01}^{(3)}, W_{02}^{(3)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_1^{(3)}, W_{10}^{(3)}, W_{12}^{(3)}) \in \mathbb{C}^3, (Z_2^{(3)}, W_{21}^{(3)}, W_{22}^{(3)}) \in \mathbb{C}^3$  をとり次の変換を考える。

$$Z_0^{(2)} = Z_0^{(3)}, \quad W_{01}^{(2)} = -1 + Z_0^{(3)}W_{01}^{(3)}, \quad W_{02}^{(2)} = Z_0^{(3)}W_{02}^{(3)}$$

$$Z_0^{(2)} = Z_1^{(3)}W_{10}^{(3)}, \quad W_{01}^{(2)} = -1 + Z_1^{(3)}, \quad W_{02}^{(2)} = Z_1^{(3)}W_{12}^{(3)}$$

$$Z_0^{(2)} = Z_2^{(3)}W_{20}^{(3)}, \quad W_{01}^{(2)} = -1 + Z_2^{(3)}W_{21}^{(3)}, \quad W_{02}^{(2)} = Z_2^{(3)}$$

$$D_1^{(3)} = \{Z_0^{(3)} = 0\} \cup \{Z_1^{(3)} = 0\} \cup \{Z_2^{(3)} = 0\}$$



$$\begin{aligned}
A_{00}^{(3)} &= \{(s, \xi_2, Z_0^{(3)}, W_{01}^{(3)}, W_{02}^{(3)}) = (s, \xi_2, 0, W_{01}^{(3)}, \frac{\xi_2}{\eta})\} \subset D_1^{(3)} \\
A_{01}^{(3)} &= \{(s, \xi_2, Z_1^{(3)}, W_{10}^{(3)}, W_{12}^{(3)}) = (s, \xi_2, 0, 0, 0)\} \subset D_1^{(3)} \cap D_1^{(2)} \\
A_{02}^{(3)} &= \{(s, \xi_2, Z_2^{(3)}, W_{20}^{(3)}, W_{21}^{(3)}) = (s, \xi_2, 0, \frac{\eta}{\xi_2}, W_{21}^{(3)})\} \subset D_1^{(3)}
\end{aligned}$$

このとき  $D_1^{(3)}$  は  $X^{(3)}$  に誘導された Pfaff 系の特異点であるが、 $G(1, 1, 3)(\alpha)$  の解の定める leaf の閉包に含まれる可能性のある点は、 $D_1^{(3)}$  の部分集合  $A_{00}^{(3)}, A_{02}^{(3)} \subset D_1^{(2)}$  となる。 $A_{01}^{(3)}$  は inaccessible singularity である。

ここで、 $\xi_2 = 0$  のときは  $A_{00}^{(3)}$  及び  $A_{02}^{(3)}$  は inaccessible singularity になってしまうので以下  $\xi_2 \neq 0$  とする。

$A_{00}^{(3)}$  に沿って 4 回目の blow up を行い多様体  $X^{(4)}$  を得る。現れる proper transform を  $D^{(0)}, D_1^{(k)} (k = 1..3)$ 、新しく現れる exceptional divisor を  $D_1^{(4)}$  とする。

$(Z_0^{(4)}, W_{01}^{(4)}) \in \mathbb{C}^2, (Z_1^{(4)}, W_{10}^{(4)}) \in \mathbb{C}^2$  をとり次の変換を考える。

$$Z_0^{(3)} = Z_0^{(4)}, \quad W_{02}^{(3)} = \frac{\xi_2}{\eta} + Z_0^{(4)} W_{01}^{(4)}$$

$$Z_0^{(3)} = Z_1^{(4)} W_{10}^{(4)}, \quad W_{02}^{(3)} = \frac{\xi_2}{\eta} + Z_1^{(4)}$$

$$D_1^{(4)} = \{Z_0^{(4)} = 0\} \cup \{Z_1^{(4)} = 0\}$$

$$A_{00}^{(4)} = \{(s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_0^{(4)}, W_{01}^{(4)}) = (s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, 0, \frac{2}{\eta})\} \subset D_1^{(3)}$$

$$A_{01}^{(4)} = \{(s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_1^{(4)}, W_{10}^{(4)}) = (s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, 0, \frac{\eta}{2})\} \subset D_1^{(3)}$$

$X^{(4)}$  に誘導された Pfaff 系の  $D_1^{(4)}$  に含まれる特異点は  $D_1^{(4)}$  の余次元 1 の部分多様体  $A_{00}^{(4)} \subset D_1^{(4)}$  である。。このとき、 $D_1^{(4)} \setminus \{A_{00}^{(4)}, A_{01}^{(4)}\}$  の点を通るすべての leaf はファイバー空間  $X^{(4)} \rightarrow B$  のファイバーに含まれる。

$X^{(4)}$  を  $A_{00}^{(4)}$  に沿って 5 回目の blow up を行い多様体  $X^{(5)}$  を得る。前と同様に、proper transform を  $D^{(0)}, D_1^{(k)} (k = 1..4)$  で表し、新しく現れる exceptional divisor を  $D_1^{(5)}$  とかく。

$(Z_0^{(5)}, W_{01}^{(5)}) \in \mathbb{C}^2, (Z_1^{(5)}, W_{10}^{(5)}) \in \mathbb{C}^2$  をとり次の変換を考える。

$$Z_0^{(4)} = Z_0^{(5)}, \quad W_{01}^{(4)} = \frac{2}{\eta} + Z_0^{(5)} W_{01}^{(5)}$$

$$Z_0^{(4)} = Z_1^{(5)} W_{10}^{(5)}, \quad W_{01}^{(4)} = \frac{2}{\eta} + Z_1^{(5)}$$

$$D_1^{(5)} = \{Z_0^{(5)} = 0\} \cup \{Z_1^{(5)} = 0\}$$

$$A_{00}^{(5)} = \{(s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_0^{(5)}, W_{01}^{(5)}) = (s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, 0, -\frac{3W_{01}^{(3)}\eta - \alpha_1\xi_2}{\eta^2})\} \subset D_1^{(3)}$$

$$A_{01}^{(5)} = \{(s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_1^{(5)}, W_{10}^{(5)}) = (s, \xi_2, W_{01}^{(3)}, 0, 0)\} \subset D_1^{(3)}$$

$X^{(5)}$  に誘導された Pfaff 系の  $D_1^{(5)}$  に含まれる特異点は  $D_1^{(5)}$  の部分多様体  $A_{00}^{(5)} \subset D_1^{(5)}$  である。。このとき、 $D_1^{(5)} \setminus A_{00}^{(5)}$  の点を通るすべての leaf はファイバー空間  $X^{(5)} \rightarrow B$  のファイバーに含まれる。 $A_{01}^{(5)}$  は inaccessible singularity である。

$X^{(5)}$  を  $A_{00}^{(5)}$  に沿って 6 回目の blow up を行い多様体  $X^{(6)}$  を得る。前と同様に、proper transform を  $D^{(0)}, D_1^{(k)}$  ( $k = 1..5$ ) で表し、新しく現れる exceptional divisor を  $D_1^{(6)}$  とかく。

$(Z_0^{(6)}, W_{01}^{(6)}) \in \mathbb{C}^2, (Z_1^{(6)}, W_{10}^{(6)}) \in \mathbb{C}^2$  をとり次の変換を考える。

$$Z_0^{(5)} = Z_0^{(6)}, \quad W_{01}^{(5)} = -\frac{3W_{01}^{(3)}\eta - \alpha_1\xi_2}{\eta^2} + Z_0^{(6)}W_{01}^{(6)}$$

$$Z_1^{(5)} = Z_1^{(6)}W_{10}^{(6)}, \quad W_{01}^{(5)} = -\frac{3W_{01}^{(3)}\eta - \alpha_1\xi_2}{\eta^2} + Z_1^{(6)}$$

$$D_1^{(6)} = \{Z_0^{(6)} = 0\} \cup \{Z_1^{(6)} = 0\}$$

$G(1, 1, 3)^{(6)}(\alpha)$  は  $(\xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_0^{(6)}, W_{01}^{(6)}, s)$  の多項式になることがわかる。これは foliation が  $(\xi_2, W_{01}^{(3)}, Z_0^{(6)}, W_{01}^{(6)}, s) \in \mathbb{C}^4 \times B_{1112}$  空間で特異点をもたず、この部分多様体の点を通る leaf はファイバー空間  $\pi : X^{(6)} \rightarrow B_{113}$  のファイバーに transversal であることを意味する。

## 5 定義多様体と初期値空間

各 accessible singularity に対して上の節で行った blow up の結果として得られる多様体を  $\bar{E}_{113}$  とする。この多様体  $\bar{E}_{113}$  から  $D_i^{(k)}$  を除いた多様体  $E_{113} := \bar{E}_{113} \setminus D_i^{(k)}$  を  $G(1, 1, 3)$  の定義多様体と呼ぶ。

### 5.1 $G(1, 1, 3)$

$G(1, 1, 3)(\alpha)$  のパラメータ  $\alpha \neq 0$  を満たすとする。このときファイバー空間  $\pi : E_{113} \rightarrow B_{113}$  は次の性質をもつ。

**Theorem 5.1**  $G(1, 1, 3)(\alpha)$  から  $E_{113}$  に誘導された Pfaff 系によって定義される  $E_{113}$  の foliation の leaf はファイバーに transversal に交わる。

**Theorem 5.2** (*painlevé property*)  $s_0 \in B_{113}$  を始点とする  $B_{113}$  内の任意の曲線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow B_{113}$  と  $p \in \pi^{-1}(s_0)$  が与えられたとき、 $\gamma$  は  $p$  を通る leaf に持ち上げる  
ことができる。

**Theorem 5.3**  $G(1,1,3)$  の定義多様体  $E_{113}$  は  $B_{(113)} \times \mathbb{C}^4$  の 10 枚の copy を貼り合わせることで与えられる。

$G(1,1,3)$  の divisor の配置図は次のようになる。

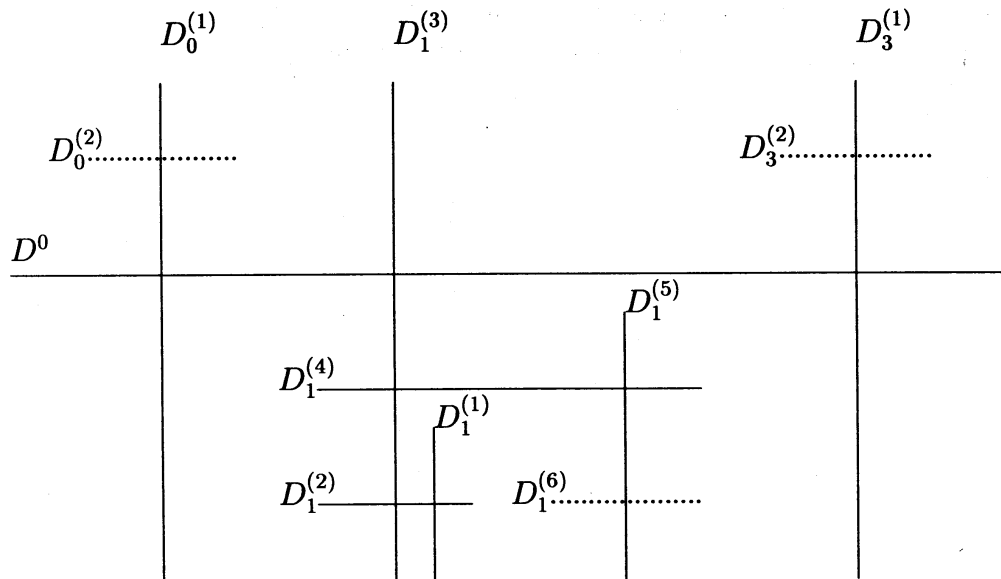


図 1  $G(1,1,3)$

## 参考文献

- [1] H.Kimura: The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamilton structure, Ann. Mat. Pura. Appl., 155(1989), 25-74
- [2] H.Kimura: Uniform foliation associated the Hamilton system  $\mathcal{H}_n$  Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4), 20(1993), 1-60
- [3] 木村弘信: Garnier 系の葉層構造, 数学, 41(1989), 223-236
- [4] 木村弘信: 退化 Garnier 系の初期値空間について, 数理解析研究所講究録 1133(2000)18-27
- [5] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura and M.yoshida: From Gauss to Painlevé, Vieweg., (1991)

- [6] K.Okamoto: Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P.Painlevé, *Espaces des conditions initiales*, *Japan.J.Math.*, 5(1979),1-79
- [7] 岡本和夫: Painlevé 方程式, *数学* 32(1980),30-43
- [8] T.Sioda and K.Takano: On some Hamilton Structures of Painlevé Systems I, *Funkcial.Ekvac.*,40(1997),271-291
- [9] T.Matano, A.Matumiya and K.Takano: On some Hamilton Structures of Painlevé Systems II, *J.Math.Soc.*,51(1998),843-866