数理解析研究所講究録 1239 巻 2001 年 69-83

A study of Bimodal exceptional singularity with holonomic system (Bimodal 例外型特異点と holonomic 系)

Y. Nakamura, Ochanomizu univ.
(中村弥生, お茶の水女子大学)

本稿では, Bimodal 例外型特異点に台を持つ代数的局所コホモロジー類を考え, そのコホモロジー類を annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素により与えられるホロノミック系を構成し, その解空間について調べる.

$\mathbb{C}^n$ における原点 O の近傍 X で定義された正則関数 $f(z)\in\mathcal{O}_X$ が O で孤立特異点を持つとする. このとき, $f(z)$ の偏導関数により annihilate される原点に台をもつ代数的局所コホモロジー類 $\sigma\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ を考えることができる. このコホモロジー類 σ の微分作用素環の層 $\mathcal{D}_X$ 上の零化イデアルを用いることにより, σ の具体的表現や σ に関する留数値等を計算することができる ([8]). しかし, 特異点の構造が複雑な場合には, 零化イデアル $\mathcal{A}nn$ を計算することは容易ではない. そこで, 高々 1 階の線形偏微分作用素からなる annihilator のイデアルを構成し, その解空間を調べることによって, 高々 1 階の偏微分作用素によって σ をどこまで特徴付けることができるかを調べる.

1970 年代, 斎藤恭司氏により, 擬斉次孤立特異点の微分作用素を用いた特徴付けに関する結果が与えられた ([6]). : $f(z)$ は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍で定義された正則函数で, 原点に孤立特異点を持つとする. このとき, 次の条件は同値である.

(a) f は適当な正則座標変換によって, 擬斉次多項式となる.

(d) 関数 $a_j(z)\in\mathcal{O}_X$ $(j=1,\dots,n)$ が存在し,

$$f=a_1(z)\frac{\partial f}{\partial z_1}+\cdots+a_n(z)\frac{\partial f}{\partial z_n}$$

が成り立つ.

更に, 条件 (d) の関数 $a_j(z)$ $(j=1,\dots,n)$ に関し, 次が成り立つ.

- $\det\left.\dfrac{\partial(a_1,\dots,a_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\right|_{z=0}\neq 0.$

$f(z)$ の偏導関数から決まる代数的局所コホモロジー類 σ に対し, $\mathcal{A}nn_{\leq 1}$ を σ を annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素の生成する $\mathcal{D}_X$ 上のイデアルとする. このとき, 我々は, 条件

(e) $\mathcal{A}nn=\mathcal{A}nn_{\leq 1}$

(f) $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn_{\leq 1},\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X))=\mathrm{Span}\{\sigma\}$

も条件 (a), (d) と同値であるという結果を得た ([2],[4]).

さらに我々は, 擬斉次でない関数 $f(z)$ に対して代数的局所コホモロジー類 σ を考え, その annihilator のイデアル $\mathcal{A}nn_{\leq 1}$ について考える. 特に, $f(z)$ が半擬斉次 (semiquasihomogeneous) 関数の場合, その標準形や擬次数に関して詳しい研究がなされていることから ([1]), それらの標準形について具体的に計算を行なう. $f(z)$ が Unimodal 例外型特異点の場合の結果や関連した我々の研究に関しては, [2],[3],[4],[7] 等を参照されたい. これらは, 新潟大学工学部田島慎一氏との共同研究である.

本稿では, $f(z)$ が Bimodal 例外型特異点の場合を扱う. 次の結果を得る.

定理 $f(z)$ は Bimodal 例外型孤立特異点の標準形 (2.1) を与えるとする. $f(z)$ の偏導関数により annihilate される原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類全体を考え, その $\mathcal{O}_X$ 上の生成元を σ と置く. σ を

annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素の生成するイデアル $\mathcal{A}nn_{\leq 1}$ に対し, 次が成り立つ.

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn_{\leq}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\delta, \frac{\partial}{\partial y}\delta, \sigma\},$$

ここで, $\delta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ は原点に台を持つデルタ関数である.

1 代数的局所コホモロジー類とホロノミック系

X を $\mathbb{C}^n$ 上の原点 O の開近傍とし, $\mathcal{O}_X$ を X で定義された正則関数の層とする. X 上定義された正則関数 $f = f(z) \in \mathcal{O}_X$ が原点に孤立特異点を持つとする. f の変数 $z_1, \ldots, z_n$ による偏導関数をそれぞれ $f_1 = \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, f_n = \frac{\partial f}{\partial z_n}$ とおく. I を $f_1, \ldots, f_n$ の生成する $\mathcal{O}_X$ 上のイデアルとする：

$$I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_O.$$

Σ を, I に属する関数によって annihilate される原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類の集合とする：

$$\Sigma = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \mid g\eta = 0,\ g \in I\}.$$

Σ は $\mathcal{O}_X$ 上 1 つの元で生成することができる. その生成元を σ とおく：

$$\Sigma = \mathcal{O}_X \sigma.$$

$\mathcal{L}$ を σ を annihilate する高々 1 階の線形偏微分作用素の集合とする：

$$\mathcal{L} = \{P = \sum_{j=1}^{n} a_j(z)\frac{\partial}{\partial z_j} + a_0(z) \mid P\sigma = 0,\ a_j \in \mathcal{O}_X,\ j = 0, 1, \ldots, n\}.$$

$\mathcal{L}$ に属する作用素 $P \in \mathcal{L}$ は Σ に作用するという性質を持っている. ここで, $\mathcal{A}nn_{\leq 1} = \mathcal{D}_X\mathcal{L}$ とおく. $\mathcal{A}nn_{\leq 1}$ は代数的局所コホモロジー類 σ を annihilate する 高々 1 階の線形偏微分作用素の生成する微分作用素の層 $\mathcal{D}_X$ 上のイデアルである. このとき, ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn_{\leq 1}$ の解空間 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn_{\leq 1}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X))$ は Σ の部分空間となる.

さて, $\mathcal{V}$ を Σ に作用する 1 階の線形偏微分作用素 $v = a_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}$, $a_j(z) \in \mathcal{O}_X$ $(j = 1, \ldots, n)$ の集合とする. 作用素 $v \in \mathcal{V}$ が Σ に作用することは, v が I に作用することと同値である. つまり,

$$\mathcal{V} = \{v = a_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} \mid vg \in I,\ g \in I\}$$

とおくことができる. このとき, 次が成り立つ.

命題 1.1 $\mathcal{L}$ から $\mathcal{V}$ への全射を構成することができる.

$\mathcal{V}$ の元 v から $\mathcal{O}_X/I$ 上に作用する線形偏微分作用素を導くことができ, これを再び v で表すことにする. ここで,

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{O}_X/I \mid vh = 0,\ v \in \mathcal{V}\}$$

とおく. このとき次が成り立つ.

定理 1.1 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn_{\leq 1}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{h\sigma \mid h \in \mathcal{H}\}$.

この節で与えた記号の詳しい説明や結果の証明などについては [2],[4] を参照されたい.

2 Bimodal 例外型特異点について

Bimodal 例外型特異点の標準形は次の 14 個の多項式 f で与えられる (V.I.Arnold [1])：

$$
\begin{array}{llll}
E_{18} & f=x^3+y^{10}+(a+by)xy^7 & & \\
E_{19} & f=x^3+xy^7+(a+by)y^{11} & Q_{16} & f=x^3+yz^2+y^7+(a+by)xy^5 \\
E_{20} & f=x^3+y^{11}+(a+by)xy^8 & Q_{17} & f=x^3+yz^2+xy^5+(a+by)y^8 \\
Z_{17} & f=x^3y+y^8+(a+by)xy^6 & Q_{18} & f=x^3+yz^2+y^8+(a+by)xy^6 \\
Z_{18} & f=x^3y+xy^6+(a+by)y^9 & S_{16} & f=x^2z+yz^2+xy^4+(a+by)y^6 \\
Z_{19} & f=x^3y+y^9+(a+by)xy^7 & S_{17} & f=x^2z+yz^2+y^6+(a+by)x^2y^3 \\
W_{17} & f=x^4+xy^5+(a+by)y^7 & U_{16} & f=x^3+xz^2+y^5+(a+by)x^2y^2 \\
W_{18} & f=x^4+y^7+(a+by)x^2y^4 & &
\end{array}
\tag{2.1}
$$

半擬斉次多項式の半擬斉次項 (擬斉次でない部分) は, 擬斉次項に対する Milnor algebra の基底単項式で, 擬斉次部分の擬次数よりも高い擬次数を持つものによって与えられ, よって, その計算法により形が異なる. 本稿で扱う形は標準基底の計算に基づいたものであり, S_{17} の半擬斉次項 $(a+by)x^2y^3$ は [1] で与えられている S_{17} の標準形と異なっている. 擬次数は [1] で与えられた半擬斉次項と等しくなっていることに注意しておく.

これらの標準形 f に対し, 標準基底の計算に基づき Milnor algebra の基底単項式を取り, 擬次数の低い順に並べたものを

$$M=\{m_1,\dots,m_{\mu-1},m_\mu\}$$

と置く. なお, 項順序 $\succ$ は, z_i, z_j の擬次数が $d(z_i)\geq d(z_j)$ となるならば $z_i\succ z_j$ として定義する. ここで, μ はミルナー数 $\dim\mathbb{Q}[x,y]/I$ または $\dim\mathbb{Q}[x,y,z]/I$ である. また, $m_1=1$ である. 与えられた単項式 m の擬次数を $d(m)$ と置くと, $d(m_\mu)=nd_f-2\sum_{j=1}^n d(z_j)$ である. 但し, d_f は関数 f の擬次数である. 今, 上の標準形(2.1) において, 変数 y の擬次数が x, z の擬次数に対し, 最も小さくなっている. つまり $d(y)<d(x), d(z)$ である. よって, $d(m_{\mu-1})=nd_f-2\sum_{j=1}^n w_j-d(y)$ である. このとき, $d(m_\mu), d(m_{\mu-1})>d_f$ であり, 各 f の半擬斉次項は $am_{\mu-1}+bm_\mu$ で与えられる.

ここで, 代数的局所コホモロジー類の擬次数を定義し, Σ と M の間に成り立つ関係をみておく.

定義 2.1 重みベクトル $w=(d(z_1),\dots,d(z_n))$ に対し, 代数的局所コホモロジー類 $\left[\dfrac{1}{z^{\mathbf{k}}}\right]=\left[\dfrac{1}{z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}}\right]$ の擬次数が $-d$ であるとは,

$$\langle w,\mathbf{k}\rangle=d(z_1)k_1+\cdots+d(z_n)k_n=d$$

が成り立つことを言う.

さらに, 代数的局所コホモロジー類 $\eta=\left[\displaystyle\sum_{\mathbf{k}\in E_\eta}c_{\mathbf{k}}\frac{1}{z^{\mathbf{k}}}\right]$ に対し, η の擬次数 $d(\eta)$ を η の項 $\left[\dfrac{1}{z^{\mathbf{k}}}\right]$ の最小擬次数で定義する：

$$d(\eta)=\min\{-\langle w,\mathbf{k}\rangle \mid \mathbf{k}\in E_\eta\}.$$

ここで E_η は η の零でない全ての項 $c_{\mathbf{k}}\left[\dfrac{1}{z^{\mathbf{k}}}\right]$ の指数 $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n$ の集合である.

代数的局所コホモロジー類の集合 Σ は Milnor algebra M の双対基底となっている. Σ の基底を取り, 擬次数の小さい順に並べ, それを $\sigma_1,\dots,\sigma_\mu$ と置く. 今, $\sigma_\mu=\delta$ である. ここで, $\delta\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ は原点に台を持つデルタ関数である.

命題 2.1 次が成り立つ.

- $m_j\sigma_{\mu-j+1}=c_j\delta$, $j=1,\dots,\mu$. 但し, c_j は定数である.
- $d(m_j)+d(\sigma_{\mu-j+1})=-\sum_{j=1}^n d(z_j)$.

さて, Bimodal 例外型特異点の標準形 f に関して, Σ 上に作用する高々 1 階の偏微分作用素の集合 $\mathcal{V}$ を取り, その解空間 $\mathcal{H}$ を求める. すると, 次の結果を得る.

命題 2.2 $\mathcal{H}=\mathrm{Span}\{1,m_{\mu-1},m_\mu\}$.

今, y の擬次数が最も低いことから, この結果と定理 1.1 を組み合わせることにより, 次の結果を得る.

定理 2.1 関数 f は *Bimodal* 例外型特異点の標準形を与えるとする. Σ の $\mathcal{O}_X$ 上の生成元 σ に対し, 高々 1 階の線形偏微分作用素の生成する *annihilator* のイデアルを $\mathcal{A}nn_{\leq 1}$ とおく.

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn_{\leq 1}, \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\sigma, \frac{\partial}{\partial y}\delta, \delta\}$$

が成り立つ.

[2],[4] や本稿で取り上げた Unimodal 例外型特異点と Bimodal 例外型特異点に関する代数的局所コホモロジー類 σ は, 上の結果のように, 高々 1 階の線形偏微分作用素で特徴付けることはできない. よって, 任意の $v \in \mathcal{V}$ に対し, その擬次数 $d(v)$ が $d(v) \neq 0$ を満たすことも明らかである. 一方, これらの特異点は 2 階の線形偏微分作用素まで用いると特徴付けられることが分かっている ([3] 参照; また, コホモロジー類の具体的な表現や双対性等については [8] を参照されたい). この結果に関する詳しいことについては別の機会に述べることにする.

ここで, 次の 3 つのベクトル空間を導入する.

$$L = \{P = \sum_{j=1}^{n} a_j(z)\frac{\partial}{\partial z_j} + a_0(z) \mid P\sigma = 0,\, a_j(z) \in \mathcal{O}_X/I,\, j = 0, 1, \ldots, n\},$$

$$V = \{\mathrm{v} = \sum_{j=1}^{n} a_j(z)\frac{\partial}{\partial z_j} \mid \mathrm{v}g \in I,\, g \in I,\, a_j(z) \in \mathcal{O}_X/I,\, j = 1, \ldots, n\},$$

$$H = \{h \in \mathcal{O}_X/I \mid \mathrm{v}h = 0,\, \mathrm{v} \in V\}.$$

このとき, $L \cong V$ である.

以下に, (2.1) で与えた Bimodal 例外型特異点の標準形 f に対し,

- f の偏導関数,
- I の項順序 $x \succ y$ または $z \succ x \succ y$ に関する標準基底,
- $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式 M とその擬次数,
- M に対し, 命題 2.1 を満たす Σ の基底,
- V の基底,
- V の解空間 H

の計算結果を与えておく. これらの計算は, 数式処理システム Risa/Asir([5]) にプログラムを実装して行なった.

2.1 E_{18} 型特異点 : $x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$

$f(x,y) = x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$ (重みベクトル (10,3) 擬次数 30)
偏導関数 : $f_x = 3x^2 + ay^7 + by^8$, $f_y = 10y^9 + (7ay^6 + 8by^7)x$
標準基底 : $\{y^{12}, 490a^2y^9 + 343a^3y^6x - 560aby^{10} + 640b^2y^{11}, 3x^2 + ay^7 + by^8\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	y^2,	y^3,	x,	y^4,	yx,	y^5,	y^2x,	y^6,	y^3x,	y^7,	y^4x,	y^8,	y^5x,	y^6x,	y^7x,	y^8x
0,	3,	6,	9,	10,	12,	13,	15,	16,	18,	19,	21,	22,	24,	25,	28,	31,	34

Σ の基底

$$\left[3a^3\frac{1}{y^9x^2} + a^4(-\frac{21}{10}\frac{1}{y^{12}x} - \frac{1}{y^2x^4}) + \frac{7}{10}a^5\frac{1}{y^5x^3}\right.$$
$$\left.-3a^2b\frac{1}{y^8x^2} - \frac{3}{10}a^3b\frac{1}{y^{11}x} + \frac{4}{5}a^4b\frac{1}{y^4x^3} + 3ab^2\frac{1}{y^7x^2} + \frac{3}{10}a^2b^2\frac{1}{y^{10}x} - \frac{3}{10}ab^3\frac{1}{y^9x} + \frac{3}{10}b^4\frac{1}{y^8x}\right],$$

$$\left[3a^2\frac{1}{y^8x^2}+a^3(-\frac{1}{yx^4}-\frac{21}{10}\frac{1}{y^{11}x})+\frac{7}{10}a^4\frac{1}{y^4x^3}-\frac{45}{7}ab\frac{1}{y^7x^2}+\frac{21}{10}a^2b\frac{1}{y^{10}x}-\frac{21}{10}ab^2\frac{1}{y^9x}\frac{21}{10}+b^3\frac{1}{y^8x}\right],$$

$$\left[-\frac{30}{7}a\frac{1}{y^7x^2}+3a^2\frac{1}{y^{10}x}-a^3\frac{1}{y^3x^4}-3ab\frac{1}{y^9x}+3b^2\frac{1}{y^8x}\right],$$

$$\left[\frac{1}{y^6x^2}\right],\left[3a\frac{1}{y^9x}-a^2\frac{1}{y^2x^3}-3b\frac{1}{y^8x}\right],\left[\frac{1}{y^5x^2}\right],\left[3\frac{1}{xy^8}-a\frac{1}{x^3y}\right],\left[\frac{1}{y^4x^2}\right],\left[\frac{1}{y^7x}\right],$$

$$\left[\frac{1}{y^3x^2}\right],\left[\frac{1}{y^6x}\right],\left[\frac{1}{y^2x^2}\right],\left[\frac{1}{y^5x}\right],\left[\frac{1}{x^2y}\right],\left[\frac{1}{y^4x}\right],\left[\frac{1}{y^3x}\right],\left[\frac{1}{xy^2}\right],\left[\frac{1}{xy}\right]$$

V の基底：

$$(-26460a^2y^2x+3773a^4y^6+44940aby^3x-66060b^2y^4x)\frac{\partial}{\partial x}+2058a^3x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(343a^4y^6+4200aby^3x-6120b^2y^4x)\frac{\partial}{\partial x}+(630a^2y^3+147a^3x)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(-210ay^3x+49a^3y^7+450by^4x)\frac{\partial}{\partial x},\ (-49a^3y^7-240by^4x)\frac{\partial}{\partial x}+42a^2yx\frac{\partial}{\partial y},\ (49a^3y^7+480by^4x)\frac{\partial}{\partial x}+60ay^4\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(-30y^4x+7a^2y^8)\frac{\partial}{\partial x},\ -7ay^8\frac{\partial}{\partial x}+6y^2x\frac{\partial}{\partial y},\ 49a^2y^8\frac{\partial}{\partial x}+60y^5\frac{\partial}{\partial y},$$

$$y^5x\frac{\partial}{\partial x},\ y^6\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7\frac{\partial}{\partial y},\ y^6x\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7x\frac{\partial}{\partial x},\ y^8\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x\frac{\partial}{\partial y},\ y^8x\frac{\partial}{\partial x},\ y^6x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7x\frac{\partial}{\partial y},\ y^8x\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1,y^7x,y^8x\}$

2.2 E_{19} 型特異点： $x^3+xy^7+ay^{11}+by^{12}$

$f(x,y)=x^3+xy^7+ay^{11}+by^{12}$ (重みベクトル $(7,2)$ 擬次数 21)
偏導関数： $f_x=3x^2+y^7$, $f_y=7y^6x+12by^{11}+11ay^{10}$
標準基底： $\{y^{13},7y^6x+11ay^{10}+12by^{11},3x^2+y^7\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	y^2,	y^3,	x,	y^4,	yx,	y^5,	y^2x,	y^6,	y^3x,	y^7,	y^4x,	y^8,	y^5x,	y^9,	y^{10},	y^{11},	y^{12}
0,	2,	4,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	20,	22,	24

Σ の基底

$$\left[a(\frac{21}{11}\frac{1}{y^{13}x}-\frac{7}{11}\frac{1}{y^6x^3})+a^2\frac{1}{y^2x^4}-3a^2\frac{1}{y^9x^2}+b(\frac{84}{121}\frac{1}{y^5x^3}-\frac{252}{121}\frac{1}{y^{12}x})+\frac{432}{121}b^2\frac{1}{y^7x^2}\right],$$

$$\left[\frac{21}{11}\frac{1}{y^{12}x}-\frac{7}{11}\frac{1}{y^5x^3}+a(\frac{1}{yx^4}-3\frac{1}{y^5x^2})-\frac{36}{11}b\frac{1}{y^7x^2}\right],\left[-3\frac{1}{y^{11}x}+\frac{1}{y^4x^3}+\frac{33}{7}a\frac{1}{y^7x^2}\right],$$

$$\left[-3\frac{1}{y^{10}x}+\frac{1}{y^3x^3}\right],\left[\frac{1}{y^6x^2}\right],\left[-3\frac{1}{y^9x}+\frac{1}{y^2x^3}\right],\left[\frac{1}{y^5x^2}\right],\left[-3\frac{1}{y^8x}+\frac{1}{yx^3}\right],\left[\frac{1}{y^4x^2}\right],\left[\frac{1}{y^7x}\right],$$

$$\left[\frac{1}{y^3x^2}\right],\left[\frac{1}{y^6x}\right],\left[\frac{1}{y^2x^2}\right],\left[\frac{1}{y^5x}\right],\left[\frac{1}{yx^2}\right],\left[\frac{1}{y^4x}\right],\left[\frac{1}{y^3x}\right],\left[\frac{1}{y^2x}\right],\left[\frac{1}{yx}\right]$$

V の基底：

$$(343y^2x-77ay^6+363a^2y^3x+396aby^4x)\frac{\partial}{\partial x}+98y^3\frac{\partial}{\partial y},\ (28y^6-209ay^3x-228by^4x)\frac{\partial}{\partial x}+14x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$7y^3x\frac{\partial}{\partial x}+2y^4\frac{\partial}{\partial y},\ (-11ay^4x-12by^5x)\frac{\partial}{\partial x}+2yx\frac{\partial}{\partial y},$$

$$7y^4x\frac{\partial}{\partial x}+2y^5\frac{\partial}{\partial y},\ -11ay^5x\frac{\partial}{\partial x}+2y^2x\frac{\partial}{\partial y},\ (7y^7-33ay^4x-36by^5x)\frac{\partial}{\partial x},\ 7y^5x\frac{\partial}{\partial x}+2y^6\frac{\partial}{\partial y},\ (7y^8-33ay^5x)\frac{\partial}{\partial x},$$

$$y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^9\frac{\partial}{\partial x},\ y^7\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^{10}\frac{\partial}{\partial x},\ y^8\frac{\partial}{\partial y},$$

$$y^5x\frac{\partial}{\partial y},\ y^{11}\frac{\partial}{\partial x},\ y^9\frac{\partial}{\partial y},\ y^{12}\frac{\partial}{\partial x},\ y^{10}\frac{\partial}{\partial y},\ y^{11}\frac{\partial}{\partial y},\ y^{12}\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1,y^{11},y^{12}\}$

2.3　E_{20} 型特異点：$x^3+y^{11}+axy^8+bxy^9$

$f(x,y)=x^3+y^{11}+axy^8+bxy^9$ (重みベクトル $(11,3)$ 擬次数 33)
偏導関数：$f_x=3x^2+by^9+ay^8, f_y=(8ay^7+9by^8)x+11y^{10}$
標準基底：$\{y^{13}, 704a^2y^{10}+512a^3y^7x-792aby^{11}+891b^2y^{12}, 3x^2+ay^8+by^9\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1, & y, & y^2, & y^3, & x, & y^4, & yx, & y^5, & y^2x, & y^6, & y^3x, & y^7, & y^4x, & y^8, & y^5x, & y^9, & y^6x, & y^7x, & y^8x, & y^9 \\
0, & 3, & 6, & 9, & 11, & 12, & 14, & 15, & 17, & 18, & 20, & 21, & 23, & 24, & 26, & 27, & 29, & 32, & 35, & 38
\end{array}
$$

Σ の基底

$$
\Big[3a^3\frac{1}{y^{10}x^2}+a^4\Big(-\frac{24}{11}\frac{1}{y^{13}x}-\frac{1}{y^2x^4}\Big)+\frac{8}{11}a^5\frac{1}{y^5x^3}-3a^2b\frac{1}{y^9x^2}-\frac{3}{11}a^3b\frac{1}{y^{12}x}
$$
$$
+\frac{9}{11}a^4b\frac{1}{y^4x^3}+3ab^2\frac{1}{y^8x^2}+\frac{3}{11}a^2b^2\frac{1}{y^{11}x}-\frac{3}{11}ab^3\frac{1}{y^{10}x}+\frac{3}{11}b^4\frac{1}{y^9x}\Big],
$$
$$
\Big[3a^2\frac{1}{y^9x^2}+a^3\Big(-\frac{1}{yx^4}-\frac{24}{11}\frac{1}{y^{12}x}\Big)+\frac{8}{11}a^4\frac{1}{y^4x^3}-\frac{51}{8}ab\frac{1}{y^8x^2}+\frac{24}{11}a^2b\frac{1}{y^{11}x}-\frac{24}{11}ab^2\frac{1}{y^{10}x}\frac{24}{11}b^3\frac{1}{y^9x}\Big],
$$
$$
\Big[-\frac{33}{8}a\frac{1}{y^8x^2}3a^2\frac{1}{y^{11}x}-a^3\frac{1}{y^3x^3}-3ab\frac{1}{y^{10}x}+3b^2\frac{1}{y^9x}\Big], \Big[\frac{1}{y^7x^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^6x^2}\Big],
$$
$$
\Big[3a\frac{1}{y^{10}x}-a^2\frac{1}{y^2x^3}-3b\frac{1}{y^9x}\Big], \Big[3\frac{1}{y^9x}-a\frac{1}{yx^3}\Big], \Big[\frac{1}{y^5x^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^8x}\Big], \Big[\frac{1}{y^4x^2}\Big],
$$
$$
\Big[\frac{1}{y^7x}\Big], \Big[\frac{1}{y^3x^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^6x}\Big], \Big[\frac{1}{y^2x^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^5x}\Big], \Big[\frac{1}{yx^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^4x}\Big], \Big[\frac{1}{y^3x}\Big], \Big[\frac{1}{y^2x}\Big], \Big[\frac{1}{yx}\Big]
$$

V の基底：

$$
(-3520a^2y^2x+512a^4y^7+5896aby^3x-8569b^2y^4x)\frac{\partial}{\partial x}+256a^3x\frac{\partial}{\partial y},
$$
$$
(3584a^4y^7+40392aby^3x-59103b^2y^4x)\frac{\partial}{\partial x}+(5280a^2y^3+1152a^3x)\frac{\partial}{\partial y},
$$
$$
(-264ay^3x+64a^3y^8+561by^4x)\frac{\partial}{\partial x}, (-64a^3y^8-297by^4x)\frac{\partial}{\partial x}+48a^2yx\frac{\partial}{\partial y}, (32a^3y^8+297by^4x)\frac{\partial}{\partial x}+33ay^4\frac{\partial}{\partial y},
$$
$$
(-33y^4x+8a^2y^9)\frac{\partial}{\partial x}, -4ay^9\frac{\partial}{\partial x}+3y^2x\frac{\partial}{\partial y}, 32a^2y^9\frac{\partial}{\partial x}+33y^5\frac{\partial}{\partial y},
$$
$$
y^6\frac{\partial}{\partial y}, y^5x\frac{\partial}{\partial x}, y^3x\frac{\partial}{\partial y}, y^7\frac{\partial}{\partial y}, y^6x\frac{\partial}{\partial x}, y^4x\frac{\partial}{\partial y}, y^8\frac{\partial}{\partial y}, y^7x\frac{\partial}{\partial x},
$$
$$
y^5x\frac{\partial}{\partial y}, y^9\frac{\partial}{\partial y}, y^8x\frac{\partial}{\partial x}, y^6x\frac{\partial}{\partial y}, y^9x\frac{\partial}{\partial x}, y^7x\frac{\partial}{\partial y}, y^8x\frac{\partial}{\partial y}, y^9x\frac{\partial}{\partial y}
$$

V の解空間 H：$H=\{1, y^8x, y^9x\}$

2.4　Z_{17} 型特異点：$x^3y+y^8+(a+by)xy^6$

$f(x,y)=x^3y+y^8+(a+by)xy^6$ (重みベクトル $(7,3)$ 擬次数 24)
偏導関数：$f_x=3yx^2+ay^6+by^7, f_y=x^3+8y^7+(6ay^5+7by^6)x$
標準基底：$\{y^{10}, -408ay^8-289a^2y^6x+480by^9, 3yx^2+ay^6+by^7,$
$a^2(-289x^3-2312y^7)-1734a^3y^5x+2856aby^8-3360b^2y^9\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1, & y, & y^2, & x, & y^3, & yx, & y^4, & y^2x, & x^2, & y^5, & y^3x, & y^6, & y^4x, & y^7, & y^5x, & y^6x, & y^7x \\
0, & 3, & 6, & 7, & 9, & 10, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 18, & 19, & 21, & 22, & 25, & 28
\end{array}
$$

Σ の基底

$$\left[a^2(\frac{1}{8}\frac{1}{y^8x^2}-\frac{1}{yx^5})+a^3(-\frac{17}{192}\frac{1}{y^{10}x}-\frac{1}{24}\frac{1}{y^3x^4})+\frac{17}{576}a^4\frac{1}{y^5x^3}-\frac{1}{8}ab\frac{1}{y^7x^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{64}a^2b\frac{1}{y^9x}+\frac{5}{144}a^3b\frac{1}{y^4x^3}+\frac{1}{64}ab^2\frac{1}{y^8x}+\frac{1}{8}b^2\frac{1}{y^6x^2}-\frac{1}{64}b^3\frac{1}{y^7x}\right],$$
$$\left[3a\frac{1}{y^7x^2}+a^2(-\frac{1}{y^2x^4}-\frac{17}{8}\frac{1}{y^9x})+\frac{17}{24}a^3\frac{1}{y^4x^3}+\frac{17}{8}ab\frac{1}{y^8x}-\frac{19}{3}b\frac{1}{y^6x^2}-\frac{17}{8}b^2\frac{1}{y^7x}\right],$$
$$\left[\frac{1}{6}\frac{1}{y^6x^2}-a\frac{1}{yx^4}\right],\ \left[a(\frac{3}{4}\frac{1}{y^8x}-6\frac{1}{yx^4})-\frac{1}{4}a^2\frac{1}{y^3x^3}-\frac{3}{4}b\frac{1}{y^7x}\right],$$
$$\left[3a\frac{1}{y^8x}-4\frac{1}{y^6x^2}-a^2\frac{1}{y^3x^3}-3b\frac{1}{y^7x}\right],\ \left[\frac{1}{y^5x^2}\right],\ \left[3\frac{1}{y^7x}-a\frac{1}{y^2x^3}\right],$$
$$\left[\frac{1}{y^4x^2}\right],\left[\frac{1}{y^6x}\right],\left[\frac{1}{yx^3}\right],\left[\frac{1}{y^3x^2}\right],\left[\frac{1}{y^5x}\right],\left[\frac{1}{y^2x^2}\right],\left[\frac{1}{y^4x}\right],\left[\frac{1}{yx^2}\right],\left[\frac{1}{y^3x}\right],\left[\frac{1}{y^2x}\right],\left[\frac{1}{yx}\right]$$

V の基底：

$$(17051a^2bx^2-44064a^2yx+10404a^4y^4+141576aby^2x-206304b^2y^3x)\frac{\partial}{\partial x}+(7344a^2y^2+5202a^3x)\frac{\partial}{\partial y},$$
$$(-408ay^2x-85a^2x^2+68a^3y^5+768by^3x)\frac{\partial}{\partial x},\ (714a^2x^2-17a^3y^5-288by^3x)\frac{\partial}{\partial x}+306a^2yx\frac{\partial}{\partial y},$$
$$(1275a^3y^5+14880by^3x)\frac{\partial}{\partial x}+(2856ay^3+493a^2yx)\frac{\partial}{\partial y},\ (-72y^3x+17a^2y^6)\frac{\partial}{\partial x},$$
$$-5ay^6\frac{\partial}{\partial x}+6y^2x\frac{\partial}{\partial y},\ 85a^2y^6\frac{\partial}{\partial x}+144y^4\frac{\partial}{\partial y},\ y^5\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x\frac{\partial}{\partial x},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},$$
$$y^7\frac{\partial}{\partial x},\ y^5x\frac{\partial}{\partial x},\ y^6\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7\frac{\partial}{\partial y},\ y^6x\frac{\partial}{\partial x},\ y^5x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7x\frac{\partial}{\partial x},\ y^6x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7x\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1,y^6x,y^7x\}$

2.5 Z_{18} 型特異点： $x^3y+xy^6+(a+by)y^9$

$f(x,y)=x^3y+xy^6+(a+by)y^9$ (重みベクトル $(5,2)$ 擬次数 17)
偏導関数： $f_x=3yx^2+y^6, f_y=x^3+6y^5x+9ay^8+10by^9$
標準基底： $\{y^{11},17y^6x+27ay^9+30by^{10},3yx^2+y^6,x^3+6y^5x+9ay^8+10by^9\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	y^2,	x,	y^3,	yx,	y^4,	y^2x,	x^2,	y^5,	y^3x,	y^6,	y^4x,	y^7,	y^5x,	y^8,	y^9,	y^{10}
0,	2,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	18,	20

Σ の基底

$$\left[a(-\frac{1}{2}\frac{1}{y^{11}x}+\frac{1}{6}\frac{1}{y^6x^3}-\frac{1}{yx^5})+a^2(\frac{27}{34}\frac{1}{y^8x^2}-\frac{9}{34}\frac{1}{y^3x^4})+b(-\frac{5}{27}\frac{1}{y^5x^3}+\frac{5}{9}\frac{1}{y^{10}x})-\frac{25}{27}b^2\frac{1}{y^6x^2}\right],$$
$$\left[-\frac{17}{9}\frac{1}{y^{10}x}+\frac{17}{27}\frac{1}{y^5x^3}+a(3\frac{1}{y^7x^2}-\frac{1}{y^2x^4})+\frac{85}{27}b\frac{1}{y^6x^2}\right],\ \left[(3\frac{1}{y^9x}-\frac{1}{y^4x^3})-\frac{9}{2}a\frac{1}{y^6x^2}\right],$$
$$\left[\frac{1}{6}\frac{1}{y^6x^2}-\frac{1}{yx^4}\right],\ \left[3\frac{1}{y^8x}-\frac{1}{y^3x^3}\right],\ \left[\frac{1}{y^5x^2}\right],\ \left[3\frac{1}{y^7x}-\frac{1}{y^2x^3}\right],\ \left[\frac{1}{y^4x^2}\right],\ \left[\frac{1}{y^6x}\right],$$
$$\left[\frac{1}{yx^3}\right],\left[\frac{1}{y^3x^2}\right],\left[\frac{1}{y^5x}\right],\left[\frac{1}{y^2x^2}\right],\left[\frac{1}{y^4x}\right],\left[\frac{1}{yx^2}\right],\left[\frac{1}{y^3x}\right],\left[\frac{1}{y^2x}\right],\left[\frac{1}{yx}\right]$$

V の基底：

$$(4624y^4-31212ay^2x+4131a^2x^2+7290a^2by^4x+(-34680b+6561a^3)y^3x)\frac{\partial}{\partial x}+2312x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(340y^2x - 153ax^2 - 243a^2y^3x - 270aby^4x)\frac{\partial}{\partial x} + 136y^3\frac{\partial}{\partial y},$$

$$5x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2yx\frac{\partial}{\partial y},\ (4y^5 - 27ay^3x - 30by^4x)\frac{\partial}{\partial x} + 2yx\frac{\partial}{\partial y},$$

$$5y^3x\frac{\partial}{\partial x} + 2y^4\frac{\partial}{\partial y},\ -135ay^4x\frac{\partial}{\partial x} + 34y^2x\frac{\partial}{\partial y},\ (17y^6 - 81ay^4x)\frac{\partial}{\partial x},$$

$$2y^4x\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y},\ 5y^4x\frac{\partial}{\partial x} + 2y^5\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7\frac{\partial}{\partial x},$$

$$y^6\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x\frac{\partial}{\partial x},\ y^8\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x\frac{\partial}{\partial y},\ y^9\frac{\partial}{\partial x},\ y^8\frac{\partial}{\partial y},\ y^{10}\frac{\partial}{\partial x},\ y^9\frac{\partial}{\partial y},\ y^{10}\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H = \{1, y^9, y^{10}\}$

2.6 Z_{19} 型特異点 : $x^3y + y^9 + (a+by)xy^7$

$f(x,y) = x^3y + y^9 + (a+by)xy^7$ (重みベクトル $(8,3)$ 擬次数 27)
偏導関数 : $f_x = 3yx^2 + ay^7 + by^8$, $f_y = x^3 + 9y^8 + (7ay^6 + 8by^7)x$
標準基底 : $\{y^{11}, -540ay^9 - 400a^2y^7x + 621by^{10}, 3yx^2 + ay^7 + by^8,$
$a^2(-50x^3 - 450y^8) - 350a^3y^6x + 540aby^9 - 621b^2y^{10}\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	y^2,	x,	y^3,	yx,	y^4,	y^2x,	y^5,	x^2,	y^3x,	y^6,	y^4x,	y^7,	y^5x,	y^8,	y^6x,	y^7x,	y^8x
0,	3,	6,	8,	9,	11,	12,	14,	15,	16,	17,	18,	20,	21,	23,	24,	26,	29,	32

Σ の基底

$$\Big[a^2(\frac{1}{9}\frac{1}{y^9x^2} - \frac{1}{yx^5}) + a^3(-\frac{20}{243}\frac{1}{y^{11}x} - \frac{1}{27}\frac{1}{y^3x^4}) + \frac{20}{729}a^4\frac{1}{y^5x^3}$$
$$-\frac{1}{9}ab\frac{1}{y^8x^2} - \frac{1}{81}a^2b\frac{1}{y^{10}x} + \frac{23}{729}a^3b\frac{1}{y^4x^3} + \frac{1}{81}ab^2\frac{1}{y^9x} + \frac{1}{9}b^2\frac{1}{y^7x^2} - \frac{1}{81}b^3\frac{1}{y^8x}\Big],$$

$$\Big[3a\frac{1}{y^8x^2} + a^2(-\frac{20}{9}\frac{1}{y^{10}x} - \frac{1}{y^2x^4}) + \frac{20}{27}a^3\frac{1}{y^4x^3} + \frac{20}{9}ab\frac{1}{y^9x} - \frac{44}{7}b\frac{1}{y^7x^2} - \frac{20}{9}b^2\frac{1}{y^8x}\Big],$$

$$\Big[-\frac{27}{7}\frac{1}{y^7x^2} + 3a\frac{1}{y^9x} - a^2\frac{1}{y^3x^3} - 3b\frac{1}{y^8x}\Big],\ \Big[-\frac{1}{9}b\frac{1}{y^8x} + \frac{1}{9}a\frac{1}{y^9x} - \frac{1}{27}a^2\frac{1}{y^3x^3} - a\frac{1}{yx^4}\Big],\ \Big[3\frac{1}{y^8x} - a\frac{1}{y^2x^3}\Big],$$

$$\Big[\frac{1}{y^6x^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^5x^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^7x}\Big], \Big[\frac{1}{y^4x^2}\Big], \Big[\frac{1}{yx^3}\Big], \Big[\frac{1}{y^6x}\Big], \Big[\frac{1}{y^3x^2}\Big],$$

$$\Big[\frac{1}{y^5x}\Big], \Big[\frac{1}{y^2x^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^4x}\Big], \Big[\frac{1}{yx^2}\Big], \Big[\frac{1}{y^3x}\Big], \Big[\frac{1}{y^2x}\Big], \Big[\frac{1}{yx}\Big]$$

V の基底 :

$$(-79380a^2yx + 19600a^4y^5 + 255690aby^2x + 34000a^2bx^2 - 366903b^2y^3x)\frac{\partial}{\partial x} + (11340a^2y^2 + 8400a^3x)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(-1620ay^2x - 360a^2x^2 + 280a^3y^6 + 2997by^3x)\frac{\partial}{\partial x},\ (192a^2x^2 - 8a^3y^6 - 81by^3x)\frac{\partial}{\partial x} + 72a^2yx\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(31023by^3x - 2040a^2x^2 + 2920a^3y^6)\frac{\partial}{\partial x} + 4860ay^3\frac{\partial}{\partial y},\ (-81y^3x + 20a^2y^7)\frac{\partial}{\partial x},$$

$$9y^7\frac{\partial}{\partial x} + 2x^2\frac{\partial}{\partial y},\ -ay^7\frac{\partial}{\partial x} + y^2x\frac{\partial}{\partial y},\ 20a^2y^7\frac{\partial}{\partial x} + 27y^4\frac{\partial}{\partial y},\ 729y^3x\frac{\partial}{\partial x} + 40a^2x^2\frac{\partial}{\partial y},\ 3y^3x\frac{\partial}{\partial x} + y^4\frac{\partial}{\partial y},$$

$$y^4x\frac{\partial}{\partial x},\ y^5\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x\frac{\partial}{\partial x},\ y^6\frac{\partial}{\partial y},\ y^8\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^6x\frac{\partial}{\partial x},$$

$$y^7\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x\frac{\partial}{\partial y},\ y^7x\frac{\partial}{\partial x},\ y^8\frac{\partial}{\partial y},\ y^6x\frac{\partial}{\partial y},\ y^8x\frac{\partial}{\partial x},\ y^7x\frac{\partial}{\partial y},\ y^8x\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H = \{1, y^7x, y^8x\}$

2.7 W_{17} 型特異点：$x^4 + xy^5 + (a+by)y^7$

$f(x,y) = x^4 + xy^5 + (a+by)y^7$ (重みベクトル (5,3) 擬次数 20)
偏導関数：$f_x = 4x^3 + y^5, f_y = 5y^4x + 7ay^6 + 8by^7$
標準基底：$\{y^9, 5y^4x + 7ay^6 + 8by^7, 4x^3 + y^5\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	x,	y^2,	yx,	y^3,	x^2,	y^2x,	y^4,	yx^2,	y^3x,	y^5,	y^2x^2,	y^6,	y^3x^2,	y^7,	y^8
0,	3,	5,	6,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	18,	19,	21,	24

Σ の基底

$$\left[a(\frac{20}{7}\frac{1}{y^9x} - \frac{5}{7}\frac{1}{y^4x^4}) + a^2(\frac{1}{y^2x^5} - 4\frac{1}{y^7x^2}) + \frac{28}{5}a^3\frac{1}{y^5x^3} + b(\frac{40}{49}\frac{1}{y^3x^4} - \frac{160}{49}\frac{1}{y^{10}x}) + \frac{256}{49}b^2\frac{1}{y^5x^2}\right],$$

$$\left[\frac{20}{7}\frac{1}{y^8x} - \frac{5}{7}\frac{1}{y^3x^4} + a(\frac{1}{yx^5} - 4\frac{1}{y^6x^2}) - \frac{32}{7}b\frac{1}{y^5x^2}\right],$$

$$\left[\frac{1}{y^4x^3}\right], \left[-4\frac{1}{y^7x} + \frac{28}{5}a\frac{1}{y^5x^2} + \frac{1}{y^2x^4}\right], \left[\frac{1}{y^3x^3}\right], \left[-4\frac{1}{y^6x} + \frac{1}{yx^4}\right], \left[\frac{1}{y^4x^2}\right], \left[\frac{1}{y^2x^3}\right], \left[\frac{1}{y^5x}\right],$$

$$\left[\frac{1}{y^3x^2}\right], \left[\frac{1}{yx^3}\right], \left[\frac{1}{y^4x}\right], \left[\frac{1}{y^2x^2}\right], \left[\frac{1}{y^3x}\right], \left[\frac{1}{yx^2}\right], \left[\frac{1}{y^2x}\right], \left[\frac{1}{yx}\right]$$

V の基底：

$$(4375ax^2 + 1715a^3y^4 + (-5000b - 9604a^4)yx^2)\frac{\partial}{\partial x} - 3675a^2y^3\frac{\partial}{\partial y},$$

$$-200byx^2\frac{\partial}{\partial x} + (-105ayx - 147a^2y^3)\frac{\partial}{\partial y}, (-125y^2x + 35ay^4 - 196a^2yx^2)\frac{\partial}{\partial x} - 75y^3\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(-15y^4 + 119ayx^2)\frac{\partial}{\partial x} - 15x^2\frac{\partial}{\partial y}, 25yx^2\frac{\partial}{\partial x} - 21ay^4\frac{\partial}{\partial y},$$

$$-5y^3x\frac{\partial}{\partial x} - 3y^4\frac{\partial}{\partial y}, (-5y^2x - 7ay^4)\frac{\partial}{\partial y}, yx^2\frac{\partial}{\partial y}, y^5\frac{\partial}{\partial x}, y^2x^2\frac{\partial}{\partial x}, y^3x\frac{\partial}{\partial y}, y^5\frac{\partial}{\partial y},$$

$$y^6\frac{\partial}{\partial x}, y^2x^2\frac{\partial}{\partial y}, y^3x^2\frac{\partial}{\partial x}, y^6\frac{\partial}{\partial y}, y^3x^2\frac{\partial}{\partial y}, y^7\frac{\partial}{\partial x}, y^7\frac{\partial}{\partial y}, y^8\frac{\partial}{\partial x}, y^8\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H：$H = \{1, y^7, y^8\}$

2.8 W_{18} 型特異点：$x^4 + y^7 + (a+by)x^2y^4$

$f(x,y) = x^4 + y^7 + (a+by)x^2y^4$ (重みベクトル (7,4) 擬次数 28)
偏導関数：$f_x = 4x^3 + (2ay^4 + 2by^5)x, f_y = (4ay^3 + 5by^4)x^2 + 7y^6$
標準基底：$\{y^9, y^6x, -64a^3y^3x^2 - 112a^2y^6 + 140aby^7 - 175b^2y^8, 2x^3 + (ay^4 + by^5)x\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	x,	y^2,	yx,	y^3,	x^2,	y^2x,	y^4,	yx^2,	y^3x,	y^5,	y^2x^2,	y^4x,	y^3x^2,	y^5x,	y^4x^2,	y^5x^2
0,	4,	7,	8,	11,	12,	14,	15,	16,	18,	19,	20,	22,	23,	26,	27,	30,	34

Σ の基底

$$\left[-2a\frac{1}{y^6x^3} + a^2(\frac{1}{y^2x^5} + \frac{8}{7}\frac{1}{y^9x}) + \frac{2}{7}ab\frac{1}{y^8x} + 2b\frac{1}{y^5x^3} - \frac{10}{7}b^2\frac{1}{y^7x}\right],$$

$$\left[\frac{1}{y^5x^3} - \frac{4}{7}a\frac{1}{y^7x}\right], \left[-2\frac{1}{y^4x^3} + a(\frac{1}{yx^5} + \frac{8}{7}\frac{1}{y^8x}) + \frac{10}{7}b\frac{1}{y^7x}\right],$$

$$\left[-2a\frac{1}{y^6x^2} + a^2\frac{1}{y^2x^4} + 2b\frac{1}{y^5x^2}\right], \left[-2\frac{1}{y^5x^2} + a\frac{1}{yx^4}\right], \left[\frac{1}{y^3x^3}\right], \left[\frac{1}{y^6x}\right], \left[\frac{1}{y^4x^2}\right], \left[\frac{1}{y^2x^3}\right],$$

$$\left[\frac{1}{y^5x}\right], \left[\frac{1}{y^3x^2}\right], \left[\frac{1}{yx^3}\right], \left[\frac{1}{y^4x}\right], \left[\frac{1}{y^2x^2}\right], \left[\frac{1}{y^3x}\right], \left[\frac{1}{yx^2}\right], \left[\frac{1}{y^2x}\right], \left[\frac{1}{yx}\right]$$

$$(21ax^2+7a^2y^4+(-21b-2a^3)yx^2)\frac{\partial}{\partial x},\ (-28a^2y^4+(105b+8a^3)yx^2)\frac{\partial}{\partial x}+42ayx\frac{\partial}{\partial y},$$

$$-21y^2x\frac{\partial}{\partial x}+4ax^2\frac{\partial}{\partial y},\ (7y^3+2ax^2)\frac{\partial}{\partial y},\ (3yx^2+ay^5)\frac{\partial}{\partial x},\ -2ay^5\frac{\partial}{\partial x}+3y^2x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$y^3x\frac{\partial}{\partial x},\ y^4\frac{\partial}{\partial y},\ yx^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^2x^2\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x\frac{\partial}{\partial x},\ y^5\frac{\partial}{\partial y},\ y^2x^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x^2\frac{\partial}{\partial x},$$

$$y^5x\frac{\partial}{\partial x},\ y^3x^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x^2\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x^2\frac{\partial}{\partial x},\ y^5x^2\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1,y^4x^2,y^5x^2\}$

2.9 Q_{16} 型特異点 : $x^3+yz^2+y^7+(a+by)xy^5$

$f(x,y,z)=x^3+yz^2+y^7+(a+by)xy^5$ (重みベクトル $(7,3,9)$ 擬次数 21)
偏導関数 : $f_z=2zy$, $f_x=3x^2+ay^5+by^6$, $f_y=7y^6+z^2+(5ay^4+6by^5)x$
標準基底 :

$\{y^9,-35ay^7-25a^2y^5x+42by^8,3x^2+ay^5+by^6,zy,+a^2(-175y^6-25z^2)-125a^3y^4x+210aby^7-252b^2y^8\}$

Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	y^2,	x,	z,	y^3,	yx,	y^4,	y^2x,	y^5,	zx,	y^3x,	y^6,	y^4x,	y^5x,	y^6x
0,	3,	6,	7,	9,	9,	10,	12,	13,	15,	16,	16,	18,	19,	22,	25

Σ の基底

$$\left[a^2\left(\frac{1}{7}\frac{1}{zy^7x^2}-\frac{1}{z^3yx^2}\right)+a^3\left(-\frac{5}{49}\frac{1}{zy^9x}-\frac{1}{21}\frac{1}{zy^2x^4}\right)+\frac{5}{147}a^4\frac{1}{zy^4x^3}-\frac{1}{7}ab\frac{1}{zy^6x^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{49}a^2b\frac{1}{zy^8x}+\frac{2}{49}a^3b\frac{1}{zy^3x^3}+\frac{1}{49}ab^2\frac{1}{zy^7x}+\frac{1}{7}b^2\frac{1}{zy^5x^2}-\frac{1}{49}b^3\frac{1}{zy^6x}\right],$$

$$\left[3a\frac{1}{zy^6x^2}+a^2\left(-\frac{15}{7}\frac{1}{zy^8x}-\frac{1}{zyx^4}\right)+\frac{5}{7}a^3\frac{1}{zy^3x^3}+\frac{15}{7}ab\frac{1}{zy^7x}-\frac{33}{5}b\frac{1}{zy^5x^2}-\frac{15}{7}b^2\frac{1}{zy^6x}\right],$$

$$\left[\frac{1}{5}\frac{1}{zy^5x^2}-a\frac{1}{z^3yx}\right],\ \left[a\left(-21\frac{1}{z^3yx}+3\frac{1}{zy^7x}\right)-3b\frac{1}{zy^6x}-a^2\frac{1}{zyx^3}\right],\ \left[\frac{1}{zy^4x^2}\right],\ \left[\frac{1}{z^2yx^2}\right],$$

$$\left[3\frac{1}{zy^6x}-a\frac{1}{zyx^3}\right],\ \left[\frac{1}{zy^3x^2}\right],\ \left[\frac{1}{zy^5x}\right],\ \left[\frac{1}{zy^2x^2}\right],\ \left[\frac{1}{zy^4x}\right],\ \left[\frac{1}{z^2yx}\right],\ \left[\frac{1}{zyx^2}\right],\ \left[\frac{1}{zy^3x}\right],\ \left[\frac{1}{zy^2x}\right],\ \left[\frac{1}{zyx}\right]$$

V の基底 :

$$(-210ay^2x+50a^3y^5+462by^3x)\frac{\partial}{\partial x}-75a^2zx\frac{\partial}{\partial z},\ (-25a^3y^5-126by^3x)\frac{\partial}{\partial x}+30a^2yx\frac{\partial}{\partial y}+90a^2zx\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(25a^3y^5+252by^3x)\frac{\partial}{\partial x}+42ay^3\frac{\partial}{\partial y}-30a^2zx\frac{\partial}{\partial z},\ z\frac{\partial}{\partial y}+(7y^5+5ay^3x+6by^4x)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(-21y^3x+5a^2y^6)\frac{\partial}{\partial x},\ -5ay^6\frac{\partial}{\partial x}+6y^2x\frac{\partial}{\partial y},\ 25a^2y^6\frac{\partial}{\partial x}+42y^4\frac{\partial}{\partial y},\ (7y^6+5ay^4x+6by^5x)\frac{\partial}{\partial z},\ zx\frac{\partial}{\partial x},$$

$$y^5\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x\frac{\partial}{\partial x},\ zx\frac{\partial}{\partial y}+7y^5x\frac{\partial}{\partial z},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^6\frac{\partial}{\partial y},\ y^5x\frac{\partial}{\partial x},\ y^6x\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^6x\frac{\partial}{\partial z},\ y^5x\frac{\partial}{\partial y},\ y^6x\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1,y^5x,y^6x\}$

2.10 Q_{17} 型特異点：$x^3 + yz^2 + xy^5 + (a + by)y^8$

$f(x,y,z) = x^3 + yz^2 + xy^5 + (a + by)y^8$ (重みベクトル $(10, 4, 13)$ 擬次数 30)
偏導関数：$f_z = 2zy, f_x = 3x^2 + y^5, f_z = 5y^4x + z^2 + 8ay^7 + 9by^8$
標準基底：$\{y^{10}, 5y^5x + 8ay^8 + 9by^9, 3x^2 + y^5, zy, 5y^4x + z^2 + 8ay^7 + 9by^8\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1, & y, & y^2, & x, & y^3, & z, & yx, & y^4, & y^2x, & y^5, & y^3x, & zx, & y^6, & y^4x, & y^7, & y^8, & y^9 \\ 0, & 4, & 8, & 10, & 12, & 13, & 14, & 16, & 18, & 20, & 22, & 23, & 24, & 26, & 28, & 32, & 36 \end{array}$$

Σ の基底

$$\left[a(-\frac{3}{5}\frac{1}{zy^{10}x} - \frac{1}{z^3yx^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{zy^5x^3}) + a^2(\frac{24}{25}\frac{1}{zy^7x^2} - \frac{8}{25}\frac{1}{zy^2x^4}) + b(\frac{27}{40}\frac{1}{zy^9x} - \frac{9}{40}\frac{1}{zy^4x^3}) - \frac{243}{200}b^2\frac{1}{zy^5x^2}\right],$$

$$\left[-\frac{15}{8}\frac{1}{zy^9x} + \frac{5}{8}\frac{1}{zy^4x^3} + a(3\frac{1}{zy^6x^2} - \frac{1}{zyx^4}) + \frac{27}{8}b\frac{1}{zy^5x^2}\right],$$

$$\left[3\frac{1}{zy^8x} - \frac{1}{zy^3x^3} - \frac{24}{5}a\frac{1}{zy^5x^2}\right], \left[-\frac{1}{z^3yx} + \frac{1}{5}\frac{1}{zy^5x^2}\right], \left[3\frac{1}{zy^7x} - \frac{1}{zy^2x^3}\right],$$

$$\left[\frac{1}{z^2yx^2}\right], \left[\frac{1}{zy^4x^2}\right], \left[3\frac{1}{zy^6x} - \frac{1}{zyx^3}\right], \left[\frac{1}{zy^3x^2}\right], \left[\frac{1}{zy^5x}\right],$$

$$\left[\frac{1}{zy^2x^2}\right], \left[\frac{1}{z^2yx}\right], \left[\frac{1}{zy^4x}\right], \left[\frac{1}{zyx^2}\right], \left[\frac{1}{zy^3x}\right], \left[\frac{1}{zy^2x}\right], \left[\frac{1}{zyx}\right]$$

V の基底：

$$25y^2x\frac{\partial}{\partial x} + 10y^3\frac{\partial}{\partial y} - 12azx\frac{\partial}{\partial z}, (-8ay^3 - 9by^4)x\frac{\partial}{\partial x} + 2yx\frac{\partial}{\partial y} + 4zx\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(10y^5 - 48ay^3x - 54by^4x)\frac{\partial}{\partial x} - 15zx\frac{\partial}{\partial z}, 8az\frac{\partial}{\partial y} + (40ay^3x + 64a^2y^6 - 45by^4x - 81b^2y^8)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(5y^6 - 24ay^4x)\frac{\partial}{\partial x}, 5y^3x\frac{\partial}{\partial x} + 2y^4\frac{\partial}{\partial y}, -4ay^4x\frac{\partial}{\partial x} + y^2x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$(5y^4x + 8ay^7 + 9by^8)\frac{\partial}{\partial z}, zx\frac{\partial}{\partial x}, y^7\frac{\partial}{\partial x}, 5y^4x\frac{\partial}{\partial x} + 2y^5\frac{\partial}{\partial y},$$

$$y^3x\frac{\partial}{\partial y}, y^6\frac{\partial}{\partial y}, 3zx\frac{\partial}{\partial y} - 5y^8\frac{\partial}{\partial z}, y^7\frac{\partial}{\partial y}, y^4x\frac{\partial}{\partial y}, y^8\frac{\partial}{\partial x}, y^8\frac{\partial}{\partial y}, y^9\frac{\partial}{\partial y}, y^9\frac{\partial}{\partial x}, y^9\frac{\partial}{\partial z}$$

V の解空間 H：$H = \{1, y^8, y^9\}$

2.11 Q_{18} 型特異点：$x^3 + yz^2 + y^8 + (a + by)xy^6$

$f(x,y,z) = x^3 + yz^2 + y^8 + (a + by)xy^6$ (擬次数 $(16, 6, 21)$ 重みベクトル 48)
偏導関数：$f_z = 2zy, f_x = 3x^2 + ay^6 + by^7, f_y = (6ay^5 + 7by^6)x + 8y^7 + z^2$
標準基底：$\{y^{10}, -12ay^8 - 9a^2y^6x + 14by^9, 3x^2 + ay^6 + by^7, zy, a^2(-72y^7 - 9z^2) - 54a^3y^5x + 84aby^8 - 98b^2y^9\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1, & y, & y^2, & x, & y^3, & z, & yx, & y^4, & y^2x, & y^5, & y^3x, & y^6, & zx, & y^4x, & y^7, & y^5x, & y^6x, & y^7x \\ 0, & 6, & 12, & 16, & 18, & 21, & 22, & 24, & 28, & 30, & 34, & 36, & 37, & 40, & 42, & 46, & 52, & 58 \end{array}$$

Σ の基底

$$\left[a^2(\frac{1}{8}\frac{1}{zy^8x^2} - \frac{1}{z^3yx^2}) + a^3(-\frac{1}{24}\frac{1}{zy^2x^4} - \frac{3}{32}\frac{1}{zy^{10}x}) + \frac{1}{32}a^4\frac{1}{zy^4x^3} - \frac{1}{8}ab\frac{1}{zy^7x^2}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{64}a^2b\frac{1}{zy^9x} + \frac{7}{192}a^3b\frac{1}{zy^3x^3} + \frac{1}{64}ab^2\frac{zy^8x}{+}\frac{1}{8}b^2\frac{1}{zy^6x^2} - \frac{1}{64}b^3\frac{1}{zy^7x}\right],$$

$$\left[3a\frac{1}{zy^7x^2}+a^2(-\frac{1}{zyx^4}-\frac{9}{4}\frac{1}{zy^9x})+\frac{3}{4}a^3\frac{1}{zy^3x^3}+\frac{9}{4}ab\frac{1}{zy^8x}-\frac{13}{2}b\frac{1}{zy^6x^2}-\frac{9}{4}b^2\frac{1}{zy^7x}\right],$$
$$\left[\frac{1}{6}\frac{1}{zy^6x^2}-a\frac{1}{z^2yx}\right],\left[3a\frac{1}{zy^8x}-4\frac{1}{zy^6x^2}-a^2\frac{1}{zy^2x^3}-3b\frac{1}{zy^7x}\right],\left[\frac{1}{zy^5x^2}\right],$$
$$\left[\frac{1}{z^2yx^2}\right],\left[3\frac{1}{zy^7x}-a\frac{1}{zyx^3}\right],\left[\frac{1}{zy^4x^2}\right],\left[\frac{1}{zy^6x}\right],\left[\frac{1}{zy^3x^2}\right],\left[\frac{1}{zy^5x}\right],\left[\frac{1}{zy^2x^2}\right],$$
$$\left[\frac{1}{z^2yx}\right],\left[\frac{1}{zy^4x}\right],\left[\frac{1}{zyx^2}\right],\left[\frac{1}{zy^3x}\right],\left[\frac{1}{zy^2x}\right],\left[\frac{1}{zyx}\right]$$

V の基底：

$$(-24ay^2x+6a^3y^6+52by^3x)\frac{\partial}{\partial x}-9a^2zx\frac{\partial}{\partial z},(-28by^3x-6a^3y^6)\frac{\partial}{\partial x}+6a^2yx\frac{\partial}{\partial y}+21a^2zx\frac{\partial}{\partial z},$$
$$(3a^3y^6+28by^3x)\frac{\partial}{\partial x}+4ay^3\frac{\partial}{\partial y}-3a^2zx\frac{\partial}{\partial z},z\frac{\partial}{\partial y}+(8y^6+6ay^4x+7by^5x)\frac{\partial}{\partial z},(-4y^3x+a^2y^7)\frac{\partial}{\partial x},$$
$$-ay^7\frac{\partial}{\partial x}+y^2x\frac{\partial}{\partial y},3a^2y^7\frac{\partial}{\partial x}+4y^4\frac{\partial}{\partial y},(7y^6x+8y^7+6ay^5x)\frac{\partial}{\partial z},zx\frac{\partial}{\partial x},y^4x\frac{\partial}{\partial x},y^5\frac{\partial}{\partial y},$$
$$y^3x\frac{\partial}{\partial y},y^6\frac{\partial}{\partial y},y^5x\frac{\partial}{\partial x},zx\frac{\partial}{\partial y}+8y^6x\frac{\partial}{\partial z},y^4x\frac{\partial}{\partial y},y^7\frac{\partial}{\partial y},y^6x\frac{\partial}{\partial x},y^7x\frac{\partial}{\partial z},y^5x\frac{\partial}{\partial y},y^7x\frac{\partial}{\partial x},y^6x\frac{\partial}{\partial y},y^7x\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1,y^6x,y^7x\}$

2.12 S_{16} 型特異点 : $x^2z+yz^2+xy^4+(a+by)y^6$

$f(x,y,z)=x^2z+yz^2+xy^4+(a+by)y^6$ (重みベクトル $(5,3,7)$ 擬次数 17)
偏導関数 : $f_z=x^2+2zy, f_x=2zx+y^4, f_y=4y^3x+z^2+6ay^5+7by^6$
標準基底 : $\{y^8,17y^4x+24ay^6+28by^7,-576a^2y^7+289y^3x^2,-x^3+y^5,x^2+2zy,2zx+y^4,$
$4y^3x+z^2+6ay^5+7by^6\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	x,	y^2,	z,	yx,	y^3,	x^2,	y^2x,	y^4,	yx^2,	y^3x,	y^5,	y^2x^2,	y^6,	y^7
0,	3,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	18,	21

Σ の基底

$$\left[a(\frac{1}{2}\frac{1}{zy^8x}+\frac{1}{z^4yx}-\frac{1}{4}\frac{1}{z^2y^4x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{zy^3x^4})+a^2(-\frac{12}{17}\frac{1}{zy^6x^2}-\frac{3}{17}\frac{1}{z^3y^3x}+\frac{6}{17}\frac{1}{z^2y^2x^3}-\frac{12}{17}\frac{1}{zyx^5})\right.$$
$$\left.+a^3(-\frac{144}{289}\frac{1}{z^2y^5x}+\frac{72}{289}\frac{1}{z^3yx^2}+\frac{288}{289}\frac{1}{zy^4x^3})+b(\frac{7}{24}\frac{1}{z^2y^3x^2}-\frac{7}{12}\frac{1}{zy^7x}-\frac{7}{12}\frac{1}{zy^2x^4})+\frac{49}{48}b^2\frac{1}{zy^4x^2}\right],$$
$$\left[\frac{17}{12}\frac{1}{zy^7x}-\frac{17}{24}\frac{1}{z^2y^3x^2}+\frac{17}{12}\frac{1}{zy^2x^4}+a(-\frac{1}{2}\frac{1}{z^3y^2x}-2\frac{1}{zy^5x^2}+\frac{1}{z^2yx^3})-\frac{119}{48}b\frac{1}{zy^4x^2}\right],$$
$$\left[\frac{1}{zy^3x^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^4x}\right],\left[a(\frac{1}{zy^6x}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^2x^2}+\frac{1}{zyx^4})-\frac{3}{2}a^2\frac{1}{zy^4x^2}\right],$$
$$\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{zy^4x^2}+\frac{1}{z^3yx}\right],\left[\frac{1}{zy^2x^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^3x}\right],\left[-2\frac{1}{zy^5x}+\frac{1}{z^2yx^2}\right],\left[\frac{1}{zy^3x^2}\right],\left[\frac{1}{zyx^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^2x}\right],$$
$$\left[\frac{1}{zy^4x}\right],\left[\frac{1}{zy^2x^2}\right],\left[\frac{1}{z^2yx}\right],\left[\frac{1}{zy^3x}\right],\left[\frac{1}{zyx^2}\right],\left[\frac{1}{zy^2x}\right],\left[\frac{1}{zyx}\right]$$

V の基底：

$$(-9826y^3-19652ax^2)\frac{\partial}{\partial x}-4913z\frac{\partial}{\partial y}$$
$$+(-9826y^2x-9826ay^4+9792a^3y^3x+(-34391b+13824a^4)y^5-48552aby^2x^2+112896a^3by^6)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$24565x^2\frac{\partial}{\partial x}-20808ay^3\frac{\partial}{\partial y}+(-24565y^4-10404ayx^2-41616a^2y^3x-58752a^3y^5-60690by^2x^2+52416a^2by^6)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-170y^2x\frac{\partial}{\partial x}-102y^3\frac{\partial}{\partial y}+(119yx^2-204ay^3x-288a^2y^5-336aby^6)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(-9826yx-13872ay^3)\frac{\partial}{\partial y}+(-4913y^4-6936ayx^2+80640a^2by^6-40460by^2x^2)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-83521y^4\frac{\partial}{\partial x}+(-334084y^3x-589560ay^5-249696a^2y^2x^2+497664a^4y^6-687820by^6)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-83521x^2\frac{\partial}{\partial y}+(-1002252y^3x-1355988ay^5+416160a^2y^2x^2+(-1581986b-829440a^4)y^6)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-9826y^2x\frac{\partial}{\partial y}+(-4913y^5-34680ay^2x^2+69120a^3y^6)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-4913yx^2\frac{\partial}{\partial x}+(4913y^5+10404ay^2x^2-20736a^3y^6)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-289y^4\frac{\partial}{\partial y}+(578y^2x^2-1440a^2y^6)\frac{\partial}{\partial z},\ -17yx^2\frac{\partial}{\partial y}+12ay^6\frac{\partial}{\partial z},\ -17y^5\frac{\partial}{\partial x}-24ay^6\frac{\partial}{\partial z},$$

$$-2y^3x\frac{\partial}{\partial y}-y^6\frac{\partial}{\partial z},\ y^2x^2\frac{\partial}{\partial x}-y^6\frac{\partial}{\partial z},\ -578y^3x\frac{\partial}{\partial x}+(-289y^2x^2+1728a^2y^6)\frac{\partial}{\partial z},\ y^5\frac{\partial}{\partial y},$$

$$y^6\frac{\partial}{\partial x},\ y^2x^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^7\frac{\partial}{\partial z},\ y^7\frac{\partial}{\partial x},\ y^6\frac{\partial}{\partial y},\ y^7\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H：$H=\{1,y^6,y^7\}$

2.13 S_{17} 型特異点：$x^2z+yz^2+y^6+(a+by)x^2y^3$

$f(x,y,z)=x^2z+yz^2+y^6+(a+by)x^2y^3$ (重みベクトル $(7,4,10)$ 擬次数 24)
偏導関数：$f_z=x^2+2zy, f_x=(2by^4+2ay^3+2z)x, f_y=(4by^3+3ay^2)x^2+6y^5+z^2$
標準基底：$\{y^8, y^5x, -84ay^6-49a^2y^3x^2+108by^7, -x^3+2ay^4x, x^2+2zy, (z+ay^3+by^4)x,$
$a^2(-294y^5-49z^2)-147a^3y^2x^2+336aby^6-432b^2y^7\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	x,	y^2,	z,	yx,	y^3,	x^2,	y^2x,	y^4,	yx^2,	y^3x,	y^5,	y^2x^2,	y^4x,	y^3x^2,	y^4x^2
0,	4,	7,	8,	10,	11,	12,	14,	15,	16,	18,	19,	20,	22,	23,	26,	30

Σ の基底

$$\Big[a(\frac{1}{3}\frac{1}{zy^5x^3}+\frac{1}{z^4yx}-\frac{1}{6}\frac{1}{z^2y^6x})+a^2(\frac{1}{6}\frac{1}{z^3y^3x}-\frac{7}{36}\frac{1}{zy^8x}-\frac{1}{3}\frac{1}{z^2y^2x^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{zyx^5})$$

$$-\frac{1}{18}ab\frac{1}{zy^7x}+b(\frac{1}{6}\frac{1}{z^2y^5x}-\frac{1}{3}\frac{1}{zy^4x^3})+\frac{2}{9}b^2\frac{1}{zy^6x}\Big],$$

$$\Big[a(-\frac{1}{zy^4x^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^5x})+a(-\frac{1}{2}\frac{1}{z^3y^2x}+\frac{7}{12}\frac{1}{zy^7x}+\frac{1}{z^2yx^3})+\frac{2}{3}b\frac{1}{zy^6x}\Big],$$

$$\Big[\frac{1}{2}a\frac{1}{zy^5x^2}+a^2(\frac{1}{zyx^4}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^2x^2})-\frac{1}{2}b\frac{1}{zy^4x^2}\Big],$$

$$\Big[\frac{1}{zy^3x^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^4x}-\frac{1}{2}a\frac{1}{zy^6x}\Big],\ \Big[-\frac{1}{6}\frac{1}{zy^6x}+\frac{1}{z^3yx}\Big],\ \Big[-\frac{1}{zy^4x^2}+a\frac{1}{z^2yx^2}\Big],$$

$$\Big[\frac{1}{zy^2x^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^3x}\Big],\ \Big[\frac{1}{zy^5x}\Big],\ \Big[\frac{1}{zy^3x^2}\Big],\ \Big[\frac{1}{zyx^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2y^2x}\Big],$$

$$\Big[\frac{1}{zy^4x}\Big],\ \Big[\frac{1}{zy^2x^2}\Big],\ \Big[\frac{1}{z^2yx}\Big],\ \Big[\frac{1}{zy^3x}\Big],\ \Big[\frac{1}{zyx^2}\Big],\ \Big[\frac{1}{zy^2x}\Big],\ \Big[\frac{1}{zyx}\Big]$$

V の基底：

$$36yx\frac{\partial}{\partial x}+(-24y^2+28az)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$+(-48x^2+168ay^4+84a^2yx^2+(636b-336a^3)y^5+(483ab-196a^4)y^2x^2+(477b^2-252a^3b)y^3x^2)\frac{\partial}{\partial z}$$
$$(9x^2-12ay^4)\frac{\partial}{\partial x}+(-6ay^3x-7a^3y^4x)\frac{\partial}{\partial z},\ -24ay^4\frac{\partial}{\partial x}-9yx\frac{\partial}{\partial y}+(15ay^3+(36b-14a^3)y^4)x\frac{\partial}{\partial z},$$
$$-24y^3\frac{\partial}{\partial y}+(-12yx^2+300ay^5+175a^2y^2x^2+225aby^3x^2)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$-3y^2x\frac{\partial}{\partial x}+(a(3yx^2-24y^5)-14a^2y^2x^2-18aby^3x^2)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$-2x^2\frac{\partial}{\partial y}+(-60y^5-37ay^2x^2-47by^3x^2)\frac{\partial}{\partial z},\ y^2x\frac{\partial}{\partial y}-3ay^4x\frac{\partial}{\partial z},$$
$$yx^2\frac{\partial}{\partial x},\ -y^3x\frac{\partial}{\partial x}+y^2x^2\frac{\partial}{\partial z},\ 2y^4\frac{\partial}{\partial y}+y^2x^2\frac{\partial}{\partial z},$$
$$-2y^5\frac{\partial}{\partial x}-y^4x\frac{\partial}{\partial z},\ yx^2\frac{\partial}{\partial y}+ay^3x^2\frac{\partial}{\partial z},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^2x^2\frac{\partial}{\partial x},\ -y^4x\frac{\partial}{\partial x}+y^3x^2\frac{\partial}{\partial z},\ 2y^5\frac{\partial}{\partial y}+y^3x^2\frac{\partial}{\partial z},$$
$$y^2x^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x^2\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x^2\frac{\partial}{\partial z},\ y^3x^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^4x^2\frac{\partial}{\partial x},\ y^4x^2\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1, y^3x^2, y^4x^2\}$

2.14 U_{16} 型特異点 : $x^3+xz^2+y^5+(a+by)x^2y^2$

$f(x,y,z)=x^3+xz^2+y^5+(a+by)x^2y^2$ (重みベクトル (5,3,5) 擬次数 15)
偏導関数: $f_z=2zx, f_x=3x^2+z^2+(2ay^2+2by^3)x, f_y=5y^4+(2ay+3by^2)x^2$
標準基底: $\{y^7, 3y^4x+2ay^6, 20a^2y^4+8a^3yx^2-30aby^5+45b^2y^6, a(6x^3-10y^5)+5by^6, zy^4, zx,$
$3x^2+z^2+(2ay^2+2by^3)x\}$
Milnor algebra $\mathcal{O}_X/I$ の基底単項式とその擬次数

1,	y,	z,	x,	y^2,	zy,	yx,	y^3,	x^2,	zy^2,	y^2x,	yx^2,	zy^3,	y^3x,	y^2x^2,	y^3x^2
0,	3,	5,	5,	6,	8,	8,	9,	10,	11,	11,	13,	14,	14,	16,	19

Σ の基底

$$\left[a^2(\frac{15}{8}\frac{1}{zy^4x^3}-\frac{45}{8}\frac{1}{z^3y^4x})+a^3(-\frac{5}{4}\frac{1}{zy^2x^4}-\frac{3}{4}\frac{1}{zy^7x})+\frac{1}{2}a^4\frac{1}{zy^5x^2}\right.$$
$$\left.-\frac{15}{8}ab\frac{1}{zy^3x^3}+(\frac{45}{8}ab-a^5)\frac{1}{z^3y^3x}-\frac{3}{8}a^2b\frac{1}{zy^6x}-\frac{1}{2}a^3b\frac{1}{zy^4x^2}+\frac{9}{8}ab^2\frac{1}{zy^5x}+a^3b^2\frac{1}{z^3yx}\right],$$
$$\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{zy^3x^3}+a(\frac{9}{2}\frac{1}{z^3y^3x}+\frac{1}{zyx^4}+\frac{1}{zyx^4}+\frac{3}{5}\frac{1}{zy^6x}+\frac{1}{zyx^4})+\frac{9}{10}ab\frac{1}{zy^5x}\right],$$
$$\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{zy^4x^2}+a\frac{1}{zy^2x^3}-\frac{2}{5}a^2\frac{1}{zy^5x}+3b\frac{1}{z^3yx}\right],$$
$$\left[\frac{1}{z^2y^4x}\right],\ \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{zy^2x^3}+\frac{1}{z^3y^2x}+\frac{2}{15}a\frac{1}{zy^5x}\right],\ \left[\frac{1}{zy^3x^2}-2a\frac{1}{z^3yx}\right],$$
$$\left[\frac{1}{z^2y^3x}\right],\ \left[\frac{1}{zyx^3}-3\frac{1}{z^3yx}\right],\ \left[\frac{1}{zy^4x}\right],\ \left[\frac{1}{zy^2x^2}\right],\ \left[\frac{1}{z^2y^2x}\right],\ \left[\frac{1}{zy^3x}\right],$$
$$\left[\frac{1}{zyx^2}\right],\ \left[\frac{1}{z^2yx}\right],\ \left[\frac{1}{zy^2x}\right],\ \left[\frac{1}{zyx}\right]$$

V の基底：

$$-15x^2\frac{\partial}{\partial x}-2a^2x^2\frac{\partial}{\partial y}+(5azy^2+5bzy^3)\frac{\partial}{\partial z},\ 5y^2x\frac{\partial}{\partial x}-ax^2\frac{\partial}{\partial y}+5zy^2\frac{\partial}{\partial z},\ (-90y^3-27ax^2)\frac{\partial}{\partial y}-4a^3zy^3\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(-135yx-90ay^3)\frac{\partial}{\partial y}+(-90azy^2-135bzy^3)\frac{\partial}{\partial z},\ zy\frac{\partial}{\partial y},\ (3ax^2+2a^2y^2x-3byx^2)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$2azy^3\frac{\partial}{\partial x}-9yx^2\frac{\partial}{\partial z},\ (3yx^2+2ay^3x)\frac{\partial}{\partial z},\ 10a^2zy^2\frac{\partial}{\partial x}+(-45ax^2+(45b-8a^4)yx^2)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$3yx^2\frac{\partial}{\partial x}-azy^3\frac{\partial}{\partial z},\ zy^2\frac{\partial}{\partial y},\ 3y^2x\frac{\partial}{\partial y}+2azy^3\frac{\partial}{\partial z},\ yx^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x\frac{\partial}{\partial x}+zy^3\frac{\partial}{\partial z},$$
$$y^2x^2\frac{\partial}{\partial x},\ zy^3\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x\frac{\partial}{\partial y},\ y^2x^2\frac{\partial}{\partial z},\ y^2x^2\frac{\partial}{\partial y},\ y^3x^2\frac{\partial}{\partial x},\ y^3x^2\frac{\partial}{\partial z},\ y^3x^2\frac{\partial}{\partial y}$$

V の解空間 H : $H=\{1,y^2x^2,y^3x^2\}$

References

[1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps Volume *I*, Monographs in Mathematics Vol. 82, Birkhäuser, Boston, 1985.

[2] Y. Nakamura and S. Tajima, *The cohomology classes attached to non-quasihomogeneous singularities of modality* 1, preprint.

[3] 中村弥生, 田島慎一, Unimodal 例外型特異点における代数的局所コホモロジー類, 京都大学数理解析研究所講究録 **1211** (2001), 155–165.

[4] Y. Nakamura, S. Tajima, *A study of semiquasihomogeneous singularities by using holonomic system*, 京都大学数理解析研究所講究録「ニュートン図形と特異点」 掲載予定.

[5] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir–a computer algebra system*, in Proc. Internat. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (eds P.S. Wang), ACM New York (1992), 387–396 (ftp: endeavor.fujitsu.co.jp/pub/isis/asir).

[6] K. Saito, *Quasihomogene isolierte singularitäten von hyperflächen*, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.

[7] S. Tajima and Y. Nakamura, *Milnor algebra* に付随した *Holonomic* 系について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1212** (2001), 133–143.

[8] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional local residues and holonomic D-modules*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033** (1998), 59–70.