数理解析研究所講究録 1239 巻 2001 年 84-89

多変数留数の biorthogonal 基底 (双対基底) と偏微分作用素

S. Tajima(田島慎一, 新潟大学)

$X=\mathbb{C}^n$, $z=(z_1,\ldots,z_n)\in X$ と置く. 有理数係数の n 個の多項式 $f_1(z),\ldots,f_n(z)\in\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]$ が与えられたとする. $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ が生成するイデアルを I と置き, その零点集合 $V(I)=\{z\in X\mid f_1(z)=\cdots=f_n(z)=0\}$ を Z で表す.

以下, $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ の組 $F=\{f_1(z),\ldots,f_n(z)\}$ は正規列であると仮定する. Z に台を持つ代数的局所コホモロジー類 σ_F を

$$\sigma_F=\left[\frac{1}{f_1(z)\cdots f_n(z)}\right]\in H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)=\Gamma(X,\mathcal{H}^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X))$$

で定める.

$$\Sigma=\{h\sigma_F\mid h\in\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]\}$$

と置くと, Grothendieck local residue による pairing を取ることで, ベクトル空間 Σ はベクトル空間 $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]/I$ の双対ベクトル空間とみなすことができる. イデアル I の準素イデアル分解 $I=I_1\cap\cdots\cap I_\ell$ $(I_i\in\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n])$ を取り, $Z_i=V(I_i)$ に対し

$$\Sigma_i=\Sigma\cap H^n_{[Z_i]}(\mathcal{O}_X)$$

と置けば, Σ の直和分解

$$\Sigma=\Sigma_1\oplus\cdots\oplus\Sigma_\ell$$

を得る. ここで, 各 Σ_i は $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]/I_i$ の双対ベクトル空間とみなすことができる.

本稿では, $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]/I$ と Σ, および各 $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]/I_i$ と Σ_i の間の双対性に関する biorthogonal 基底の構成法について考える.

古典的な Jacobi の多変数補間積分は, 剰余 $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]/I$ からそれ自身への恒等写像を多変数留数により表現している公式と捉えることができる ([6], [8]). 従って, この積分核を代数的局所コホモロジー類として表現することで, biorthogonal 基底を求めるられる. しかしこの計算法は, $I_i\neq\sqrt{I_i}$ なる場合には, $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]/I_i$ と I_i との間の双対性の計算を行うには適さないという欠点がある. 2000 年 9 月頃, biorthogonal 基底の計算に, コホモロジー類の満たす偏微分方程式系が利用できることに気がついた. この計算法は広い範囲の問題に適用でき, 中国剰余定理と組み合わせて使えるという長所がある.

以下, 具体例を使って, 偏微分作用素を用いた biorthogonal 基底の計算法を説明する. 簡単のため, $Z=V(I)$ は原点のみからなる場合に話を限る.

1 計算の準備

$X=\mathbb{C}^2$, $f(x,y)=x^3$, $g(x,y)=y^2+2x^2+3x$ と置く. イデアル $=\langle f,g\rangle$ の 辞書式項順序 $x\succ y$ に関するグレブナ基底は $\{y^6, 27x+2y^4+9y^2\}$ である. $Z=V(I)$ は原点のみからなり, その重複度は 6 である. 単項式 y^6, xy^4, x^2y^2, x^3 がイデアル I 属することに注意して連立方程式

$$y^6\eta=0,\ (27x+2y^4+9y^2)\eta=0$$

を解けば, ベクトル空間 Σ を決定できる. $\mathbb{Q}[x,y]/I\cong \mathrm{Span}\{y^5,y^4,y^3,y^2,y,1\}$ と表現する. このとき, 単項基底 $y^5,y^4,y^3,y^2,y,1$ の biorthogonal 基底は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
y^5:\ \varsigma_5 &= \left[\frac{1}{xy^6}\right]-\frac{2}{27}\left[\frac{1}{x^2y^2}\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^2y^4}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{1}{x^3y^2}\right]\\
y^4:\ \varsigma_4 &= \left[\frac{1}{xy^5}\right]-\frac{2}{27}\left[\frac{1}{x^2y}\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^2y^3}\right]+\frac{1}{9}\left[\frac{1}{x^3y}\right]\\
y^3:\ \varsigma_3 &= \left[\frac{1}{xy^4}\right]-\left[\frac{1}{x^2y^2}\right]\\
y^2:\ \varsigma_2 &= \left[\frac{1}{xy^3}\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^2y}\right]\\
y:\ \varsigma_1 &= \left[\frac{1}{xy^2}\right]\\
1:\ \varsigma_0 &= \left[\frac{1}{xy}\right]
\end{aligned}$$

$F=\{f,g\}$ が定める代数的局所コホモロジー類 $\sigma_F=\left[\dfrac{1}{fg}\right]\in H^2_{[0]}(\mathcal{O}_X)$ を取る. σ_F は次のホロノミックな偏微分方程式系により特徴づけることができる.

$$\begin{cases}
x^3\sigma_F=0\\
(y^2+2x^2+3x)\sigma_F=0\\
(6x\dfrac{\partial}{\partial x}+(3y+2xy)\dfrac{\partial}{\partial y}+24+4x)\sigma_F=0
\end{cases}$$

この方程式を解くと

$$\sigma_F=\left[\frac{1}{x^3y^2}\right]-3\left[\frac{1}{x^2y^4}\right]+9\left[\frac{1}{xy^6}\right]-2\left[\frac{1}{xy^4}\right]$$

を得る. 代数的局所コホモロジー類 σ_F のこのような表現は, 今の場合, 変換則を用いて計算することも出来る. 実際, $f=x^3$, $g=y^2+2x^2+3x$ であるので,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -(2x+3)^3 & y^4-2x^2y^2-3xy^2+9x^2\end{pmatrix}$$

と置くと，$\begin{pmatrix} x^3 \\ y^6 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ と表せる．$\det A = y^4 - (2x^2 + 3x)y^2 + 9x^2$ より

$$\sigma_F = \left[\frac{1}{fg}\right] = \left[\frac{\det A}{x^3 y^6}\right]$$

を得る．しかし，一般には，変換則を用いて実際に σ_F の表現式を導くことは，容易ではない．

2　偏微分作用素と双対基底

偏微分作用素

$$P = 6x\frac{\partial}{\partial x} + (3y + 2xy)\frac{\partial}{\partial y} + 24 + 4x$$

は代数的局所コホモロジー類 $\sigma_F \in \Sigma$ を annihilate する作用素である．このことから $P(\Sigma) \subseteq \Sigma$ が従う．また P の形式随伴作用素を P^* と置くと

$$P^* : \mathbb{Q}[x, y]/I \to \mathbb{Q}[x, y]/I$$

が自然に定義できる．この節では，まず Σ の基底として $\{\varsigma_5, \varsigma_4, \varsigma_3, \varsigma_2, \varsigma_1, \varsigma_0\}$ を用いたときの P の行列表示 M_P を求め，次に $\mathbb{Q}[x, y]$ の基底として $\{y^5, y^4, y^3, y^2, y, 1\}$ を選び P^* の行列表示 M_P^* を求める．両者を比較し ${}^tM_P = M_P^*$ となることを確かめておく．さて，P の作用を計算すると

$$\begin{aligned}
P\varsigma_5 &= \frac{4}{3}\varsigma_3 \\
P\varsigma_4 &= 3\varsigma_4 + \frac{2}{4}\varsigma_2 - \frac{4}{27}\varsigma_0 \\
P\varsigma_3 &= 6\varsigma_3 \\
P\varsigma_2 &= 9\varsigma_2 - \frac{2}{3}\varsigma_0 \\
P\varsigma_1 &= 12\varsigma_1 \\
P\varsigma_0 &= 15\varsigma_0
\end{aligned}$$

を得る．この作用を行列表示すると

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{4}{3} & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & 9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\
0 & -\frac{4}{27} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 15
\end{pmatrix}$$

となる．

$$P^* = -6x\frac{\partial}{\partial x} - (3y + 2xy)\frac{\partial}{\partial y} + 15 + 2x$$

の作用を計算すると

$$\begin{aligned} P^*y^5 &= 0 \\ P^*y^4 &= 3y^4 \\ P^*y^3 &= 6y^3 + \frac{4}{3}y^5 \\ P^*y^2 &= 9y^2 + \frac{2}{3}y^4 \\ P^*y &= 12y \\ P^*1 &= 15 - \frac{4}{27}y^4 - \frac{2}{3}y^2 \end{aligned}$$

となるので M_P^* は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{27} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

となる．$M_P^* = {}^tM_P$ が成り立つ．

一般に Σ の基底と $\mathbb{Q}[x,y]/I$ の基底が与えられたとする．これらが互いの双対基底であるならば P と P^* の行列表示は ${}^tM_P = M_P^*$ なる関係を満たす．このことを逆に用いれば双対基底の構成に利用することができるというのが基本的アイデアである．実際に計算してみると分かるが，双対基底の決定には，1 階の微分作用素 P の作用を考えただけでは不十分で，y 倍を表現する行列 M_y も利用することが必要となる．

3　偏微分作用素と双対基底ふたたび

代数的局所コホモロジー類 σ_F はイデアル I の生成元 f,g を用いて $\sigma_F = \left[\dfrac{1}{fg}\right]$ で与えられたものであるので，$\mathbb{Q}[x,y]$ 上 Σ を生成する．今，多項式環に $y \succ x$ なる項順序を入れて $\mathbb{Q}[x,y]/I$ の単項基底を求めると $\{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$ を得る．従って，

$$\{\sigma_F, x\sigma_F, x^2\sigma_F, y\sigma_F, xy\sigma_F, x^2y\sigma_F\}$$

はベクトル空間 Σ の基底となる．Jacobi の多変数補間公式を利用してこれらの双対基底を求めると $\{x^2y, xy, y, x^2, x, 1\}$ となることが分かる．ここでは，σ_F の annihilator P を用いてこのことを確認してみる．一般に，コホモロジー類 $h(x,y)\sigma_F$ に対する P の作用は $P(h\sigma) = (v_Ph)\sigma_F$ となる．但し，v_P は P の 1 階の作用素部分であり，今の場合

$6x\dfrac{\partial}{\partial x}+(3y+2xy)\dfrac{\partial}{\partial y}$ である. 従って

$$\begin{aligned}
P\sigma_F &= 0\\
P(x\sigma_F) &= 6x\sigma_F\\
P(x^2\sigma_F) &= 12x^2\sigma_F\\
P(y\sigma_F) &= (3y+2xy)\sigma_F\\
P(xy\sigma_F) &= (9xy+2x^2y)\sigma_F\\
P(x^2y\sigma_F) &= 15x^2y\sigma_F
\end{aligned}$$

となり, P の行列表示

$$M_P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&6&0&0&0&0\\0&0&12&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&2&9&0\\0&0&0&0&2&15\end{pmatrix}$$

を得る. 一方 P^* の基底単項式への作用を計算すると

$$\begin{aligned}
P^*x^2y &= 0\\
P^*xy &= 6xy\\
P^*y &= 12y\\
P^*x^2 &= 3x^2\\
P^*x &= 2x^2+9x\\
P^*1 &= 2x+15
\end{aligned}$$

となるので

$$M_P^*=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&6&0&0&0&0\\0&0&12&0&0&0\\0&0&0&3&2&0\\0&0&0&0&9&2\\0&0&0&0&0&15\end{pmatrix}$$

を得る. この場合も確かに $M_P^*={}^tM_P$ が成り立つ.

逆に, 線形写像 $P:\Sigma\to\Sigma$ と $P^*:\mathbb{Q}[x,y]/I\to\mathbb{Q}[x,y]/I$ の持つこの性質を利用すれば, 初等的な方法で biorthogonal 基底が構成できる. 実際, 1 階の annihilator P のみでなく, x 倍や y 倍が定める作用素も同時に考える事で biorthogonal 基底が決定できることが容易に確かめられる.

4 最後に

本稿で述べたアイデアは極めて単純なものであるが, それ故に他の計算手法と組み合わせて用いることも容易である. 特に, 準素イデアル分解と組み合わせて用いることができるという特徴を持つ. 今後, これらの点に注目し, 多変数留数に関する biorthogonal 基底の構成アルゴリズムの導出に活用したいと考えている.

参考文献

[1] C.A. Berenstein and B.A. Taylor, *Interpolation problems in C^n with applications to harmonic analysis*, J. d'Analyse Math. **38** (1980), 188–254.

[2] J. Delsarte, *Théories des fonctions moyenne-périodiques de deux variables*, Ann. Math. **72** (1960), 121–178.

[3] H.M. Möller, *Systems of algebraic equations solved by means of endomorphisms*, Lect. Notes in Comp. Sci. **673** (1993), 43–56.

[4] H.M. Möller and H.J. Stetter, *Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems*, Numer. Math. **70** (1995), 311–329.

[5] B. Mourrain, *Isolated points, duality and residues*, J. of Pure and Applied Algebra **117** & **118** (1997), 469–493.

[6] 田島慎一, *Grothendieck duality* の計算と多変数 *Hermite* 補間問題, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085** 「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 82–90.

[7] 田島慎一, 多変数補間問題とホロノミック *D*-加群, 千葉大学数学セミナリーノート No.3 「代数解析の諸問題」(1999), 73–94.

[8] S.Tajima, *Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formulas*, Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Dekker (2000), 503–509.

[9] 田島慎一, *Hermite-Jacobi* 多変数補間積分とホロノミック *D*-加群, 京都大学数理解析研究所講究録 「代数解析と特殊関数」掲載予定.

[10] 田島慎一, *Algorithms for computing Grothendieck local residues —improvement with a rescue step—*, 京都大学数理解析研究所講究録 「ニュートン図形と特異点」掲載予定.