

## フラクタル関数にもとづく予測理論

大阪市立大学理学研究科 釜江哲朗, 松本啓一

T. Kamae & K. Matsumoto (Faculty of Science, Osaka City University)

### § 1. Introduction

株価等の変動を確率的にとらえる際, 従来はブラウン運動にもとづく確率モデルの下で行われてきた. ブラウン運動は各瞬間の微小な空間変化  $dx$  が時間変化  $dt$  の関数として  $dx = \pm\sqrt{dt}$  と定まる確率過程である. ただし, ここで符号  $\pm$  は各瞬間に独立に選ばれる. このような理論に対しては, 現実の市場と比較して過度にランダムネスを含んでいるという批判がある.

ここでは, N 型をした折れ線から構成される N 過程をもとにした確率モデルを考察する. N 過程も synchronized interval 上ではブラウン運動と同様に変化量が  $dx = \pm\sqrt{dt}$  を満たしているが, 符号  $\pm$  の選ばれ方が独立ではなく  $\pm$  は交互にあらわれる.

このようなモデルは Benoit B. Mandelbrot によっても提案されており, 株価のように, 上昇のあとは下降, 下降のあとは上昇する傾向が強くみられる現象に対して有効である.

### § 2. N 過程

区間  $[0, 1]$  から区間  $[0, 1]$  への折れ線関数  $N_1$  を

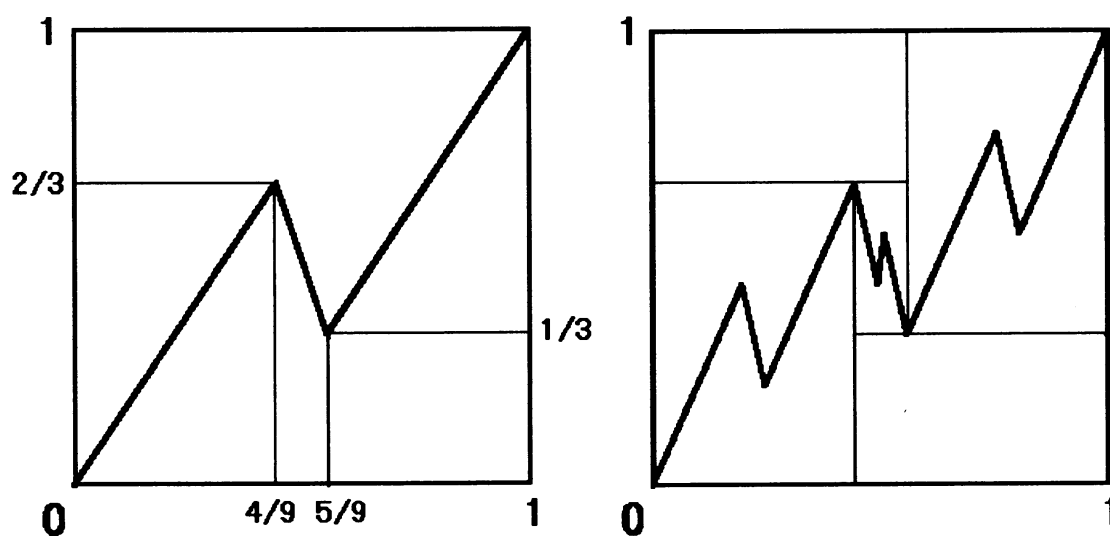
$$N_1 = \begin{cases} 3x/2 & 0 \leq x \leq 4/9 \\ -3x+2 & 4/9 \leq x \leq 5/9 \\ 3x/2-1/2 & 5/9 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と定義する (下図左).  $N_1$  を構成する 3 本の線分それぞれについて, 横軸の変化量の平方根が縦軸の変化量, すなわち  $(4/9)^{1/2} = 2/3$ ,  $(1/9)^{1/2} = 1/3$ ,  $(4/9)^{1/2} = 2/3$  となっている. さらに, 横軸の変化量  $4/9, 1/9, 4/9$  は積に関して正の実数  $\mathbb{R}_+$  の稠密な部分群を生成している. つぎに, 折れ線関数を構成する 3 本の線分をそれぞれ, その両端点を結ぶような  $N_1$  の線形変換像で置き換えた折れ線関数として  $N_2$  を定義する (下図右). すなわち,

$$N_2 = \begin{cases} (2/3)N_1(9x/4) & 0 \leq x \leq 4/9 \\ 2/3 - (1/3)N_1(9x-4) & 4/9 \leq x \leq 5/9 \\ 1/3 + N_1(9x/4 - 5/4) & 5/9 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

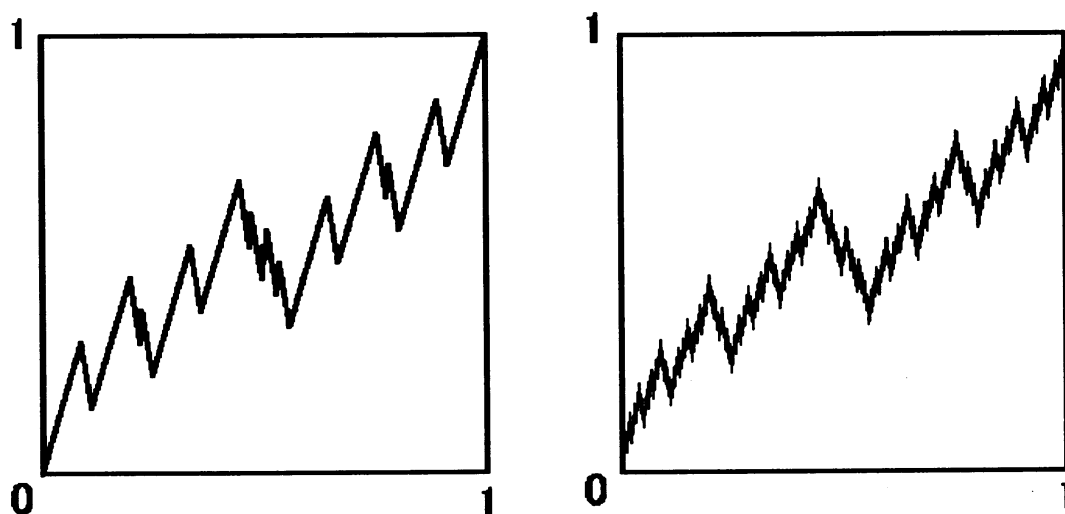
となる.  $N_2$  を構成する 9 本の線分それぞれについて, 横軸の変化量の平方根が縦軸の変化量になっている. すなわち,  $((4/9)(4/9))^{1/2} = (2/3)(2/3)$ ,  $((4/9)(1/9))^{1/2} = (2/3)(1/3)$ , ... . つぎに,

$N_2$ を構成する9本の線分それぞれを、関数 $N_1$ の線形変換像で置き換えた折れ線関数として $N_3$

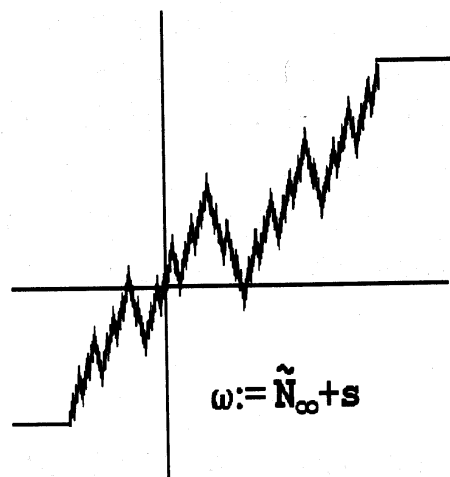


を定義する（下図左）．これは、27本の線分から構成され、横軸の変化量の平方根が縦軸の変化量になっている．同様に $N_4, N_5, \dots$ を定義し、これらの極限として、フラクタル関数 $N_\infty$ を定義する（下図右）．この関数 $N_\infty$ を実数 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数 $\tilde{N}_\infty$ に拡張する．すなわち、

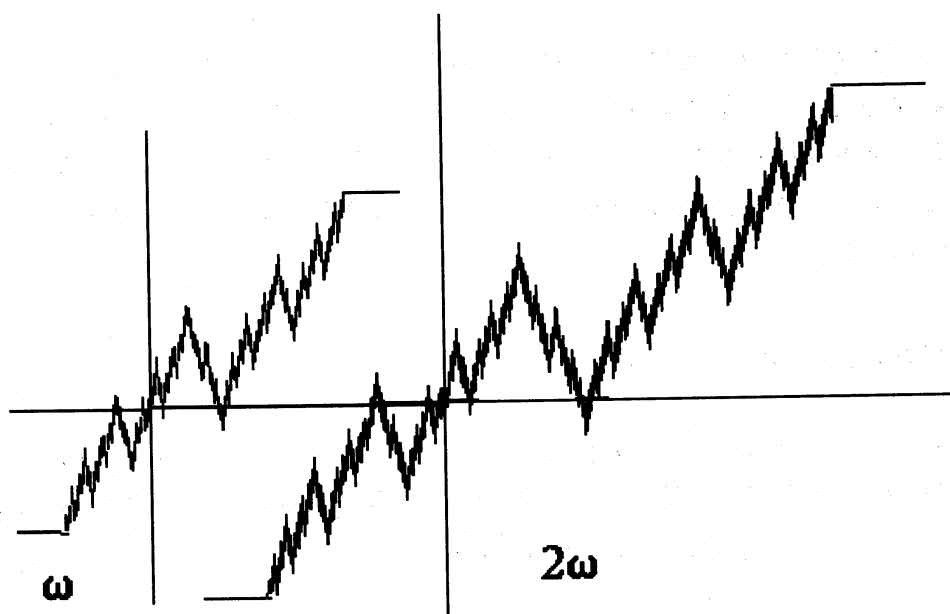
$$\tilde{N}_\infty = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ N_\infty(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



つぎに、関数  $\tilde{N}_\infty$  を確率化する。まず、区間  $[0, 1]$  から一点  $s$  を無作為にとる。そして、この関数のグラフを縦横に平行移動して、グラフ上の点  $(s, \tilde{N}_\infty(s))$  が原点となるにする (下図)。この関数を  $\tilde{N}_\infty + s$  と記す。すなわち、 $(\tilde{N}_\infty + s)(t) := \tilde{N}_\infty(s+t) - \tilde{N}_\infty(s)$  ( $t \in \mathfrak{R}$ )。



十分大きい実数  $L$  を取り、区間  $[0, L]$  から実数  $\lambda$  を無作為に選び、この平行移動したグラフを原点を中心として横方向に  $e^\lambda$  倍、縦方向に  $e^{\lambda/2}$  倍拡大する (下図)。このようにして得られる関数を  $e^\lambda(\tilde{N}_\infty + s)$  と記す。すなわち、 $(e^\lambda(\tilde{N}_\infty + s))(t) := e^{\lambda/2}(\tilde{N}_\infty(s+e^{-\lambda}t) - \tilde{N}_\infty(s))$ 。



このようにして、確率空間  $([0, 1] \times [0, L], L^{-1} dx d\lambda)$  上の確率変数  $X_L(s, \lambda)$  を

$X_L(s, \lambda) = e^\lambda (\tilde{N}_\infty + s)$  と定義する. 実数  $\mathfrak{R}$  から  $\mathfrak{R}$  への連続関数  $\omega$  で  $\omega(0) = 0$  を満たすものの全体を  $\Omega$  と記すとき,  $X_L \in \Omega$  となる. ここで,  $L \rightarrow \infty$  とすると  $\Omega$  に値をとる確率変数  $X_L$  は法則収束する. すなわち,  $X_L$  の分布は  $\Omega$  上の確率測度  $P$  に弱収束する. 確率測度  $P$  の位相的サポートを  $\Omega_0$  とし, 確率空間  $(\Omega_0, P)$  上の確率過程  $(N_t, t \in \mathfrak{R})$  を  $N_t(\omega) := \omega(t) (\forall \omega \in \Omega_0)$  と定義する. これを  $\mathbf{N}$  (確率) 過程と呼ぶ. これは無相関で定常かつエントロピー 0 の増分をもつ確率過程となり, 決定論的ブラウン運動の一つである. これはブラウン運動との類似を多く持っているが, 大きな違いはブラウン運動の増分がエントロピー  $\infty$  を持つのに反しエントロピー 0 を持つことである. この意味は, この確率過程の過去の完全なデータがあれば未来が決定できるということである. もっとも現実には完全なデータは得られないため不確定さが残る.

### § 3. 確率モデルと主定理

ここでは,  $x$  に関して 2 回連続微分可能,  $s$  に関して 1 回連続微分可能でかつ  $H_x(x, s) > 0$  が至るところ成立する未知関数  $H(x, s)$  を用いて,  $Y_t = H(N_t, t)$  と定義される確率過程を考察し,  $a < b < c$  という 3 時点が与えられたとき, 観測  $\{Y_t; a \leq t \leq b\}$  をもとに  $Y_c$  を予測することを考える. そして以下の結果を得る.

主定理: 観測  $\{Y_t; t \in [a, b]\}$  にもとづく推定量  $\hat{Y}_c$  で  $E[(Y_c - \hat{Y}_c)^2] = O((c-b)^2 / (b-a))$  を満たすものが作れる.

上記の  $(N_t, t \in \mathfrak{R})$  をブラウン運動で置き換えた場合上式の右辺は  $O(c-b)$  となる. 我々の場合はこれと比較すると, 近未来すなわち  $c-b$  が小さい場合の予測の二乗誤差ははるかに小さくなっている. これは  $\mathbf{N}$  過程が 0 エントロピーをもつことに起因する. このため,  $H(x, s)$  が未知関数であることおよび観測が区間  $[a, b]$  に限定されているにもかかわらず推定誤差を小さくすることが可能であった.

### § 4. Synchronized interval

$\mathbf{N}$  過程からの sample path  $t \mapsto N_t(\omega)$  の局所的な増分を考える. すなわち,  $N_{d+t}(\omega) - N_d(\omega)$  を有界区間  $[u, v]$  上の  $t$  の関数と考える. このとき,  $s \in [0, 1]$  および正の実数  $\lambda$  が存在して

$$0 \leq s + e^{-\lambda} u \leq s + e^{-\lambda} v \leq 1 \quad \text{かつ}$$

$$(*) \quad N_{d+t}(\omega) - N_d(\omega) = (e^\lambda (N_\infty + s))(t) \quad (t \in [u, v])$$

が成立する. このように,  $\mathbf{N}$  過程からの sample path は局所的に  $N_\infty$  関数の自己線形像と一致す

る.  $N_\infty$  は  $N_1, N_2, \dots$  の極限となるが, いずれかの  $N_n$  を構成する線分の一つを  $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$  とするとき,  $y_1 = N_\infty(x_1), y_2 = N_\infty(x_2)$  かつ  $y_2 - y_1 = \pm\sqrt{x_2 - x_1}$  が成立する. このような区間  $[x_1, x_2]$  を  $N_\infty$  のレベル  $n$  の synchronized interval と呼ぶ. すなわち,

$$\text{レベル 1 : } [0, \frac{4}{9}], [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}], [\frac{5}{9}, 1]$$

$$\text{レベル 2 : } [0, \frac{16}{81}], [\frac{16}{81}, \frac{20}{81}], [\frac{20}{81}, \frac{4}{9}], [\frac{4}{9}, \frac{40}{81}], [\frac{40}{81}, \frac{41}{81}], [\frac{41}{81}, \frac{5}{9}], [\frac{5}{9}, \frac{61}{81}], [\frac{61}{81}, \frac{65}{81}], [\frac{65}{81}, 1]$$

.....

また,  $[x_1, x_2]$  が  $N_\infty$  の synchronized interval のとき,  $s + e^{-\lambda}t_1 = x_1, s + e^{-\lambda}t_2 = x_2$  かつ  $u \leq t_1 < t_2 \leq v$  を満たす区間  $[t_1, t_2]$  のことを, (\*) を満たす sample path  $N_t(\omega)$  の synchronized interval と呼ぶ.

定理: 区間  $[t_1, t_2]$  が  $N_t(\omega)$  の synchronized interval であるための必要十分条件は

$$N_{t_2}(\omega) - N_{t_1}(\omega) = \pm\sqrt{t_2 - t_1}$$

が成立することである. このとき, 任意の  $t \in [t_1, t_2]$  に対して

$$N_t(\omega) - N_{t_1}(\omega) = \pm\sqrt{t_2 - t_1} N_\infty\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right) \quad (\text{符号同順})$$

が成立する.

上において符号  $\pm$  の  $(-)$  が成立するとき, synchronized interval を増加 (減少) であるという. 2つの synchronized intervals は一方が他方を含むか, 隣り合うか, あるいは交わらない. 隣り合う 2つの synchronized intervals は一方が増加ならば他方は減少となる.  $u \leq t_1 < t_2 \leq v$ ,  $u \leq t_3 < t_4 \leq v$  かつ (\*) を満たす sample path  $N_t(\omega)$  において, 区間  $[t_1, t_2]$  および  $[t_3, t_4]$  がともに synchronized intervals であるとする. また,  $s + e^{-\lambda}t_i = x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) と定義するとき  $[x_1, x_2], [x_3, x_4]$  は  $N_\infty$  での synchronized intervals となる. このレベルをそれぞれ  $n, m$  とするとき,  $m - n$  を  $[t_3, t_4]$  の  $[t_1, t_2]$  に対する相対レベルと呼ぶ.  $[t_3, t_4] \subset [t_1, t_2]$  かつ  $[t_3, t_4]$  の  $[t_1, t_2]$  に対する相対レベルが 1 の  $N_t(\omega)$  の synchronized intervals  $[t_1, t_2]$  および  $[t_3, t_4]$  が与えられたとき,  $[t_1, t_2]$  を  $[t_3, t_4]$  の親,  $[t_3, t_4]$  を  $[t_1, t_2]$  の子と呼ぶ. このとき, 以下のいずれかが成り立つ:

$$\text{(left)} \quad t_3 = t_1, \quad t_4 - t_3 = \frac{4}{9}(t_2 - t_1)$$

$$\text{(middle)} \quad t_3 = t_1 + \frac{4}{9}(t_2 - t_1), \quad t_4 - t_3 = \frac{1}{9}(t_2 - t_1)$$

$$\text{(right)} \quad t_3 = t_1 + \frac{5}{9}(t_2 - t_1), \quad t_4 - t_3 = \frac{4}{9}(t_2 - t_1)$$

すなわち, synchronized interval はその親の3子のいずれかであるかによって, left, middle, right となる.  $I_1, I_2$  をこの順で隣り合う2つの synchronized intervals でその長さを  $L_1, L_2$  とするとき, その比  $L_2/L_1$  は  $\xi(4/9)^i$  となる. ここで,  $\xi = 4$  または  $\xi = 1/4$  で,  $i$  は  $I_2$  の  $I_1$  に対する相対レベルとなる.  $\xi = 4$  となるのは  $I_1, I_2$  の最も近い最初の共通の祖先の子で  $I_1$  の祖先となるものが middle であることを意味する. また,  $\xi = 1/4$  となるのは  $I_1, I_2$  の最も近い最初の共通の祖先の子で  $I_2$  の祖先となるものが middle であることを意味する. ここで, もし  $i > 0$  のとき,  $I_2$  の  $i$  世代遡った祖先が  $I_1$  と隣り合う synchronized interval となる. すなわち,  $I_2$  と左端点が一致し長さが  $(9/4)^i L_2$  の synchronized interval  $I_2'$  が存在する. 同様に,  $i < 0$  のときは,  $I_1$  と右端点一致し長さが  $(9/4)^{-i} L_1$  の synchronized interval  $I_1'$  が存在する. このようにして,  $I_1 I_2'$  または  $I_1' I_2$  と同一レベルのより大きい隣り合う synchronized intervals に作り直すことができる. また, 同じレベルで隣り合って並ぶ長さ4の synchronized intervals の列  $I_1 I_2 I_3 I_4$  があるとき, 隣り合う3つの列  $I_1 I_2 I_3$  または  $I_2 I_3 I_4$  は共通の親をもっている. このとき,  $I_1' = I_1 \cup I_2 \cup I_3$  または  $I_2' = I_2 \cup I_3 \cup I_4$  と置くことにより,  $I_1 I_2'$  または  $I_1' I_2$  と大きい隣り合う synchronized intervals に作り直すことができる. この2つの操作の繰り返しにより, ある区間を覆う隣り合って並ぶ synchronized intervals の列が与えられたとき, その区間を覆う高々4つの同一レベルの synchronized intervals の列に作り直すことができる. この結果, 右端の synchronized interval の右端点は, 元のものと同しいか多くの場合はより右にくる.

## § 5. 主定理証明のアイデア

まず,  $d$  を観測区間  $[a, b]$  内の任意の点とする.  $Y_t - Y_d = H_x(N_d, d)(N_t - N_d) + o(\sqrt{|t-d|})$  であり  $N_t - N_d$  は  $\sqrt{|t-d|}$  のオーダーをもつから,  $d$  に十分近い  $t$  での  $N_t - N_d$  の情報を観測  $\{Y_t; t \in [a, b]\}$  から取り出すことができる. この結果, 観測区間  $[a, b]$  を覆う小さな隣り合う synchronized intervals の列を見つけることができる. これから §4 で述べた方法により, 大きい synchronized intervals の列に置き換えて行く. 結果として,  $b-a$  と同じオーダーの長さをもつ同一レベルの隣り合う synchronized intervals の長さが高々4の列で  $[a, b]$  を覆うことができる. この右端の synchronized interval の右端点は  $b$  より右にくるが, どれくらい右にくるかを確率的に評価できる. これが  $c$  より右にくるときは  $N_c - N_b$  の値を観測によって決定できる. —

般には誤差を含んだ推定を行う。他方、観測から  $H_x(N_b, b)$ ,  $H_s(N_b, b)$ ,  $H_{xx}(N_b, b)$  の値を求めることができる。ここで

$$Y_c = Y_b + H_x(N_b, b)(N_c - N_b) + \frac{1}{2}H_{xx}(N_b, b)(N_c - N_b)^2 + H_s(N_b, b)(c - b) + o(c - b)$$

となるが、この右辺に  $N_c - N_b$  の推定値、観測から得られる  $H_x(N_b, b)$ ,  $H_s(N_b, b)$ ,  $H_{xx}(N_b, b)$  の値を代入することで、 $Y_c$  の推定量  $\hat{Y}_c$  を求める。これが主定理の条件を満たしている。

## 文 献

Teturo Kamae, Linear expansions, strictly ergodic homogeneous cocycles and fractals, *Israel J. Math.* 106 (1998) pp.313-337.

Teturo Kamae, Stochastic analysis based on deterministic Brownian motion, *Israel J. Math.* 125 (2001) pp317-346.

Benoit B. Mandelbrot, A multifractal walk down Wall Street, *Scientific American*, February 1999.

(上2つの論文は釜江のホームページ <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~kamae> から入手可能です。)