

極大鎖グラフを用いた順序複体のシェリング可能性の判定について

- Maximal chain graph does not contain essential cycles ensures the shellability of a order complex? -

東京理科大学工学部伊藤 美保 (M. Ito), 平林 隆一 (R. Hirabayashi)¹
東京理科大学工学部 (Science University of Tokyo)

1 はじめに

有限半順序集合は、それに含まれる全順序部分集合を単体とみなすことによって、(組合せ的) 単体的複体 (順序複体) と考えることができる。単体的複体のシェリング可能性 (shellability) 近年盛んに研究されているが、ここでは順序複体のシェリング可能性に限って議論する ([1], [2], [3], [4], [5], [10]). Björner (1980, [1]) によって、順序複体のシェリング可能性に対する十分条件が与えられ、池辺, 平林 (1997, [5]) によって極大鎖グラフが本質的サイクルを持たないことが必要であることが示された。しかし、[5] ではそのための有効なアルゴリズムが示されていない。また、与えられた条件が十分条件となっているかどうかについても述べられていない。本論文では、極大鎖グラフが本質的サイクルを持たないという条件を効率的に調べるのに役立つ定理とこの条件が十分条件とはならないことを、Dunce hat ([15], [17]) の分割から誘導される順序複体を用いて証明する。

2 用語の定義

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ を有限集合とする。 V 上の (抽象的, 組合せ的) 単体的複体 Δ とは、 V の部分集合の族で、

- (1) $G \in \Delta$ かつ $F \subset G$ ならば、 $F \in \Delta$,
- (2) $\{v_i\} \in \Delta, i = 1, \dots, n$

であるときをいう ([16]). また、 Δ の要素 F を Δ の面といい、 $\dim F = |F| - 1$ を F の次元という。 Δ の次元は $\dim \Delta = \max\{\dim F | F \in \Delta\}$ で定義する。 Δ の面 $\{F_i\}_{i \in I}$ によって生成される Δ の部分複体を $\langle F_i \rangle_{i \in I}$ とおく。単体的複体 Δ の極大面をファセット (facet) という。また、単体 $F \in \Delta$ の面 $G \subset F$ で $|G| = |F| - 1$ を満たすものを F のファセットという。単体的複体 Δ の任意のファセットの次元がすべて等しいとき、 Δ を純 (pure) 純な単体的複体という。

定義 2.1 (Bruns and Herzog[16]): 純な単体的複体 Δ がシェリング可能であるとは、以下の同値な 3 つの条件のいずれかが満足されるときをいう：単体的複体 Δ のファセットの集合に線形順序 F_1, \dots, F_m を与えることができ、

- (1) $\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle$ は全ての i ($2 \leq i \leq m$) に対して、 F_i のファセットによって生成される。
- (2) 任意の i ($2 \leq i \leq m$) に対して、集合 $\{F : F \in \langle F_1, \dots, F_i \rangle, F \notin \langle F_1, \dots, F_{i-1} \rangle\}$ は唯一の極小元を持つ。
- (3) 任意の i, j ($1 \leq j < i \leq m$) に対して、 $F_i \setminus F_j = \{v\}$ となる $v \in F_i \setminus F_j$ と $k \in \{1, 2, \dots, i-1\}$ が存在する。

上の定義における同値な条件 (1), (2) および (3) を満足する Δ のファセットの線形順序を Δ のシェリング (shelling) という。

シェリング可能性を再帰的に定義すると次のようになる ([7],[8],[9]). すなわち、次元が d の純な単体的複体 Δ のファセットの集合の線形順序 F_1, F_2, \dots, F_t を次の再帰的な条件をみたすように与えることができるとき、 Δ はシェリング可能であるという。

- (1) $t = 1$ のとき Δ はシェリング可能である。

¹hira@ms.kagu.sut.ac.jp

(2) $2 \leq t \leq j$ のときは, $(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{t-1})$ はシェリング可能であり, $(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{t-1}) \cap (F_t)$, $(2 \leq j \leq t)$ のファセットの次元がすべて $d-1$ である.

P を半順序集合とする. $v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \in P$ が $v_{i_1} \leq \dots \leq v_{i_r}$ をみたすとき, $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ を P の鎖という. このとき, $r-1$ をこの鎖の長さという. P の長さとは, P の鎖の長さの最大値をいうものとする. また, $\Delta(P)$ を P のすべての鎖からなる集合とすると, $\Delta(P)$ は単体的複体となるので, P に付随する順序複体という. P を半順序集合とする. $v \in P$ のランクとは, v と v より小さい元からなる P の鎖の長さの最大値をいい, $\text{rank } v$ で表すものとする. P を半順序集合とする. $x \leq y$, $x \neq y$ が, $x \leq z \leq y$ なら $x = z$ か $y = z$ となるとき, y は x をカバーするといひ $x \prec y$ と書く. $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\} \subset P$ が $v_{i_1} \prec v_{i_2} \prec \dots \prec v_{i_r}$ である鎖であるとき, 鎖 $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ を細分不能な鎖という. また, 集合の包含関係において極大な鎖を極大鎖という.

半順序集合が最小元と最大元を持つとき有界な半順序集合という. 半順序集合のすべての極大鎖が同じ長さを持つとき, 純な半順序集合という. 有界かつ純な半順序集合を次数付き半順序集合という. 明らかに, $\Delta(P)$ のシェリング可能性を考えるためには, 次数付き半順序集合についてのみ考えればよいことがわかる.

半順序集合 (P, \leq) が局所上半モジュラー半順序集合であるとは, $x \prec u, v$ かつ $u, v \prec t$ であるとき, $y \in P$ が存在して, $u \prec y$, $v \prec y$ かつ $y \leq t$ を満たすときをいう.

定理 2.2 (Björner[1]): 局所上半モジュラーな次数付き半順序集合に付随する順序複体はシェリング可能である.

(P, \leq) が局所弱上半モジュラーであるとは, $x \prec u, v$ かつ $u, v \prec t$ であるとき, $w_1, \dots, w_\ell, y_1, \dots, y_{\ell+1} \in P$ が存在して, $x \prec w_i$ ($1 \leq i \leq \ell$), $u = w_0, w_1 \prec y_1, w_1, w_2 \prec y_2, \dots, w_\ell, w_{\ell+1} = v \prec y_{\ell+1}$ かつ $y_i \leq t$ ($1 \leq i \leq \ell+1$) を満たすときをいう.

定理 2.3 (池辺, 平林 [5]): (P, \leq) を次数付き半順序集合で, $\Delta(P)$ がシェリング可能であるとする. P は局所弱上半モジュラーである.

(P, \leq) を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とし, \mathcal{M} を P のすべての極大鎖からなる集合とする. このとき, $E(P) = \{\{m, m'\} : m, m' \in \mathcal{M}, |m \setminus m'| = 1\}$ として, グラフ $G(P) = (\mathcal{M}, E(P))$ をつくる. このグラフの各辺 $\{m, m'\} \in E(P)$ に色 $i = \text{rank } v$ ($\{v\} = \{m \setminus m'\}$) を彩色することにする. この辺彩色されたグラフ $G(P)$ を P の極大鎖グラフということにする.

また, (P, \leq) を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とし, $S \subset \mathcal{M}$ とする. $G(P)$ が S に関して性質 (C) を持つとは:

(C) $G(S)$ を S によって誘導された $G(P)$ の部分グラフとし, $m, m' \in S$ とする. このとき, m と m' を結ぶ道が $G(S)$ の中に存在し, 道の中の任意の辺 $\{m'', m'''\}$ の色は, $\{i \mid \exists u \in m \setminus m' \text{ s.t. } i = \text{rank } u\}$ に含まれる. をみたすときをいう.

補題 2.4 (局所弱上半モジュラーのための必要十分条件 (池辺, 平林 [5])): (P, \leq) を次数付き半順序集合とする. このとき, (P, \leq) が局所弱上半モジュラーであるための必要十分条件は, $G(P)$ が \mathcal{M} に関して性質 (C) を持つことである.

(P, \leq) を次数付き半順序集合とする. $G(P)$ が性質 (C-k) を持つとは, $S \subset \mathcal{M}$ ($|S| = k$) と $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k = S$ ($|S_i| = i$ ($1 \leq i \leq k$)) が存在して, $G(P)$ は S_i ($1 \leq i \leq k$) に関して, 性質 (C) を持つときをいう.

定理 2.5 (必要十分条件 (平林-池辺 [5])): 次数付き半順序集合 (P, \leq) がシェリング可能であるための必要十分条件は, $G(P)$ が性質 (C- $|\mathcal{M}|$) を持つことである.

G を辺彩色グラフとする. C を G のサイクル (単純サイクル) としたとき, 2色で彩色されたサイクル C_1, \dots, C_k で

$$C = C_1 \oplus \dots \oplus C_k$$

となるものが存在するとき C を非本質的なサイクルといい, そうでない場合, C を本質的なサイクルという. ただし, $C \oplus C'$ は C と C' の対称差を表すものとする.

定理 2.6 (必要条件 (平林-池辺 [5])): (P, \leq) を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とする. $\Delta(P)$ がシェリング可能であれば, $G(P)$ は本質的なサイクルを含まない.

3 Dunce hat の正則 CW 分割極大鎖グラフを用いた順序複体のシェリング可能性について

この章では, 定理 2.6 の逆は成り立たない, すなわち, 極大鎖グラフが本質的なサイクルを含まなくても, シェリング可能とはならないことの反例を示すことにする. そのためにまず, Dunce hat を定義する. すなわち, Dunce hat は, 図 1 のように, 三角形の 3 辺を矢印の方向に同一視したものである [17].

Dunce hat は境界のない可縮である位相空間である. また, Cohen-Macaulay であるが, シェリング可能では

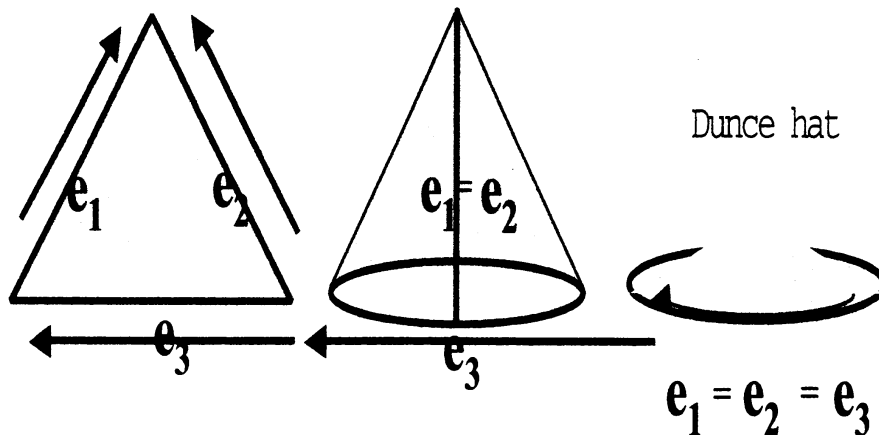


図 1: Dunce hat

ない 2 次元の単体的複体の例としてよく知られている (Stanley 3.1 を参照). いま, 位相空間 X がある多面体 $P = |K|$ と同相であるとき, X を位相多面体といい, 単体的複体 K を X の (位相的) 三角形分割あるいは単体分割という. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 (Stanley[14]): Dunce hat の任意の三角形分割はシェリング可能ではない.

以下で, Dunce hat の適当な三角分割に対応する極大鎖グラフが本質的なサイクルを含まないことを示す. すると, 定理 3.1 によってその三角形分割はシェリング可能ではないので, 定理 2.6 の逆は成り立たないことがいえる. なお, 極大鎖グラフのサイクルの列挙は, Tarjan (1975, [11]) による Backtracking Algorithms を用いた.

Dunce hat の三角形分割で, 現在知られている中で, ファセット数が最小なものは 17 ファセットである ([7]) が, この三角形分割に対応する順序複体から誘導される極大鎖グラフに含まれるサイクルの数は, コンピュータの記憶容量をはるかに上回るので, まず, 極大鎖グラフを小さくする工夫が必要とされる. そのために, 正則 CW 分割を用いてファセットの数を減少させることにする.

Hausdorff 空間中の正則 CW 複体 ([2]) を次のように帰納的に定義する:

- K^0 が点の集合であるとき, K^0 は正則 CW 分割である.
- K^{i-1} が $i-1$ 次元の正則 CW 複体であるとき, いくつかの i 次元球体 σ を σ の境界 $\partial\sigma$ が K^{i-1} のいくつかの要素の和になるように同相写像によって張り合わせたものを K^i としたとき, K^i は正則 CW 複体である.

図 2 の dunce hat の 6 つのファセットへの分割が正則 CW 分割であることを見るためには, 各ファセットを重心細分をしたとき, 全体が単体的複体になっていればよいが, 実際に重心細分してみると図 2 のとなって, 単体的複体となっていることが分かるので, この 6 つのファセットに分割したものは正則 CW 分割である. ここで

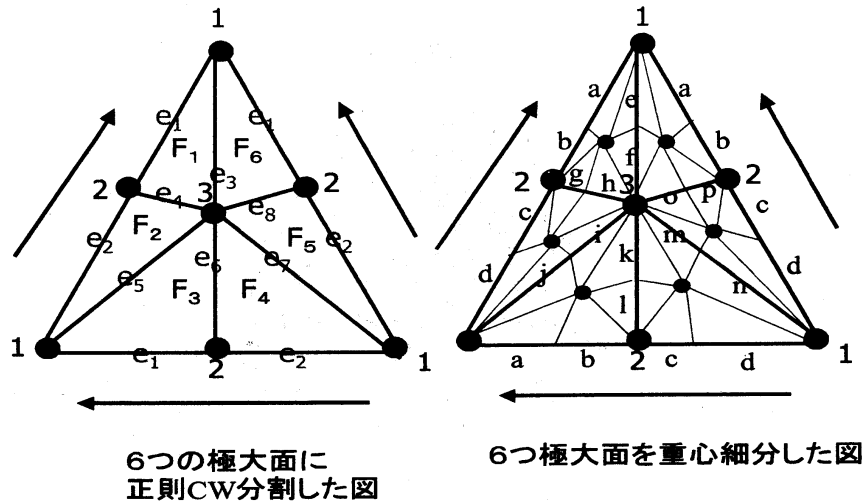


図 2: Dunce hat の正則 CW 分割

正則 CW 複体 K のシェリングの定義を述べる. K のファセットを $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ と順番に並べたとき, 次の条件をみたせば, この順序をシェリングといい, CW 複体 K はシェリング可能であるという:

- (1) $t = 1$ であるとき, K はシェリング可能である.
- (2) $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{j-1} \rangle \cap \partial\sigma_j, (2 \leq t)$ は極大面の次元がすべて $\dim \sigma_j - 1$ となる.
- (3) $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{j-1} \rangle \cap \partial\sigma_j, (2 \leq t)$ はシェリングをもち, それを $\partial\sigma_j$ に拡張できる.

命題 3.2. Dunce hat の 6 つのファセットに正則 CW 分割した Δ は, シェリング可能ではない.

証明: $F_1 = \{1, 2, 3\}, F_2 = \{1, 2, 3\}, F_3 = \{1, 2, 3\}, F_4 = \{1, 2, 3\}, F_5 = \{1, 2, 3\}, F_6 = \{1, 2, 3\}$ とする (図 2 左のように, 極大面の名前をつける). このとき, Δ はシェリング可能ではないことを以下で示す. F_1, \dots の場合: この後に F_2, F_3, F_4, F_5 のいずれを並べてもシェリングとならない.
 F_1, F_6, \dots の場合をまず考える.

- (1) この後に F_2 を並べると $\langle F_1, F_6 \rangle \cap \langle F_2 \rangle = \{1, 2, 3, e_4\}$ となり, これは F_2 のファセットによって生成されない.
- (2) この後に F_3 を並べると $\langle F_1, F_6 \rangle \cap \langle F_3 \rangle = \{1, 2, 3, e_1\}$ となり, これは F_3 のファセットによって生成されない.
- (3) この後に F_4 を並べると $\langle F_1, F_6 \rangle \cap \langle F_4 \rangle = \{1, 2, 3\}$ となり, これは F_4 のファセットによって生成されない.
- (4) この後に F_5 を並べると $\langle F_1, F_6 \rangle \cap \langle F_5 \rangle = \{1, 2, 3, e_8\}$ となり, これは F_5 のファセットによって生成されない.

同様に, F_2, \dots, F_5 のいずれを F_1 の次に並べてもシェリングとならないことがわかる. すると, 議論の対称性によって, F_2, \dots, F_6 のいずれを最初にしてもシェリングとならないことがわかる. ■

Dunce hat を 6 つのファセットに正則 CW 分割した Δ は, シェリング可能ではないので, この正則 CW 分割から誘導される順序集合 $P(\Delta)$ はシェリング可能ではないことがわかる [3]. Duncce hat の正則 CW 分割から誘導される順序集合 $P(\Delta)$ は局所弱上半モジュラー半順序集合であることは, 池辺 [6] の局所弱上半モジュラー判定プログラムを用いて確認をした.

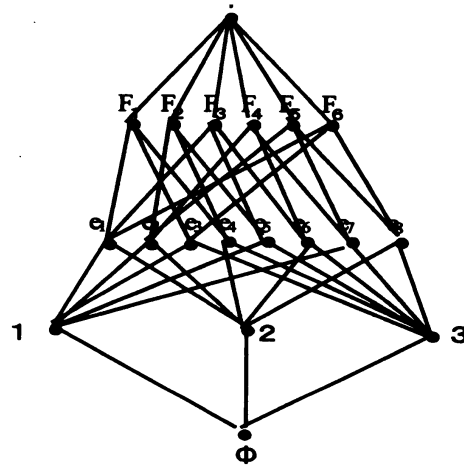


図 3: 正則 CW 分割から誘導される半順序集合のハッセ図

図 3 の半順序集合は 36 の極大鎖を含んでいるので、その極大鎖グラフ $G(P)$ の頂点は 36 となる (極大鎖リスト及び極大鎖グラフは付録 B を参照)。

4 極大鎖グラフが本質的サイクルを含まないことの効率的な判定法

本節では、極大鎖グラフ $G(P)$ が本質的サイクルを含むかどうかを効率的に判定するための定理を証明する。まず、次の初等的な事実のいくつかを確認しておく。

補題 4.1. $G(P)$ の基本サイクル集合 C に含まれる基本サイクルの中で本質的サイクルが存在する場合には、 $G(P)$ は本質的サイクルを含む。

補題 4.2. $G(P)$ の基本サイクル集合 C に含まれる基本サイクルの中に本質的サイクルが存在しない場合には、各 $C_i \in C$, $i = 1, 2, \dots, k$ は 2 色で彩色されたサイクルの対称差で表すことができる。すなわち、2 色で彩色されたサイクル C_{i1}, \dots, C_{ij_i} が存在して $C_i = C_{i1} \oplus \dots \oplus C_{ij_i}$ となる。

(証明) 本質的サイクルの定義から明らか。 ■

これより、次の命題がいえる。

命題 4.3. C のすべての基本サイクルが本質的サイクルでない場合、 $G(P)$ は本質的サイクルを含まない。

(証明) C を $G(P)$ の任意のサイクルとすると、補題 4.2 より $C_1, \dots, C_\ell \in C$, ($\ell \leq k$) が存在して

$$C = \bigoplus_{i=1}^{\ell} C_i = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \bigoplus_{j=1}^{j_i} C_{ij}$$

と表すことができる。したがって、 C は本質的サイクルではない。 ■

上の命題 $G(P)$ に本質的サイクルが存在するかどうかを判定する、実際的なアルゴリズムを次のように構築することができる。

(アルゴリズム)

1° $G(P)$ の全張木 T を 1 つ選んで固定する. T に対応する $G(P)$ の基本サイクルの基底を求め, $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ とする.

2° $i = 1, \dots, k$ に対して, 以下のことを繰り返す.

C_i が本質的サイクルかどうかを判定する. 本質的サイクルであれば終了する. このとき, $G(P)$ は本質的サイクルを持つことになる.

3° $G(P)$ は本質的サイクルを持たない.

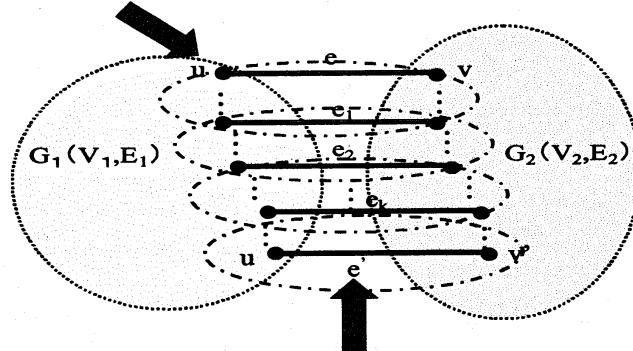
次に, $G(P) = (V, E)$ と表すことにし, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ と分割し, V_1, V_2 によって生成される $G(P)$ の部分グラフをそれぞれ $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ とおく. $\tilde{E} = \{e \in E \mid \exists u \in V_1, \exists v \in V_2 \text{ such that } e = \{u, v\}\}$ とする. 以下では, \tilde{E} の枝はすべて同一色で塗られているものと仮定する.

$e = \{u, v\}, e' = \{u', v'\} \in \tilde{E}$, $(u, u' \in V_1, v, v' \in V_2)$ が強同値であるとは, u, u' を結ぶ G_1 の道 P_1 と v', v を結ぶ G_2 の道 P_2 が存在して, サイクル $(u, P_1, u', e', v', P_2, v, e, u)$ が 2 色以下で彩色されているときをいうものとする. このとき, $e \sim e'$ と書くことにする. また, $e, e' \in \tilde{E}$ が同値であることを, $e_1, \dots, e_k \in \tilde{E}$ が存在して,

$$e \sim e_1, e_1 \sim e_2, \dots, e_k \sim e'$$

が成り立つことをいうものとする. このとき, $e \sim e'$ と書くことにする. このとき, 明らかに \sim は \tilde{E} 上の同値関

すべて2色以下のサイクル



すべて同一色の枝で連結

図 4: 同値

係である.

定理 4.4. $G(P)$ の部分グラフ $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ がそれぞれ連結とし, \tilde{E} の同値関係 \sim に関する同値類がただ一つ \tilde{E} であるものとする. また, \tilde{E} のすべての枝が色 α でぬられているものとする. このとき, $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ のいずれも本質的サイクルを含なければ, $G(V, E)$ も本質的サイクルを含まない.

証明: C を $G(P)$ の本質的サイクルとする. $C \subset G_1(V_1, E_1)$ あるいは $C \subset G_2(V_2, E_2)$ であれば G_1, G_2 が本質的サイクルを含まないとする仮定に矛盾する.

次に, 本質的サイクル C が部分グラフ $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ のいずれにも含まれない場合を考える. このとき, C の枝で, \tilde{E} の要素となっているものは偶数本であるから, それらを e_1, e_2, \dots, e_{2k} とする. このとき, 仮定から e_1, \dots, e_{2k} はすべて同値である. すると, $e'_1, \dots, e'_k \in \tilde{E}$ が存在して,

$$e_1 \sim e'_1, e'_1 \sim e_2, \dots, e'_k \sim e_{2k}$$

となる. すると, 2 色以下で塗られたサイクル C_1, \dots, C_k, C_{k+1} で

$$E(C_1) \cap \tilde{E} = \{e_1, e'_1\}, \dots, E(C_k) \cap \tilde{E} = \{e'_{k-1}, e'_k\}, E(C_{k+1}) \cap \tilde{E} = \{e'_k, e_{2k}\}$$

をみたすものが存在する。ただし、 $E(C_j^i)$ は C の枝集合を表すものとする。このとき、

$$C \oplus C_1 \oplus C_2 \cdots \oplus C_{t+1}$$

を考えると、これはいくつかのサイクルからなることになるので、その中の少なくとも1つは本質的サイクルを含むことになる。それを C^1 とすると、 $C^1 \cap \bar{E} \subset \{e_2, \dots, e_{2k}\}$ となる。

高々 k 回上の手続きを繰り返すことによって、 $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ のいずれかに含まれる本質的サイクルがえられることになる。これは、 $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ のいずれも本質的サイクルを含まないということに矛盾する。 ■

5 Dunce hat の正則 CW 分割から誘導される極大鎖グラフが本質的サイクルを含まないことの証明

Dunce hat の正則 CW 分割から誘導される極大鎖グラフが本質的サイクルを含まないことは、全張木から誘導される基本サイクル集合を用いたアルゴリズムを用いても証明されるが（基本サイクル数:25, 内、2色のサイクル数:5, 3色のサイクル数:20）、ここでは定理 4.4 を用いて証明する。すなわち、極大鎖グラフ $G(P)$ が6つの6角形のサイクルの連結部分が同一色の枝で連結されていることを利用して証明する。まず、 $G(P)$ を図示すると図5となる。図中で、6角形間を結んでいる辺はすべて同一色緑で彩色されており、6角形の内部の辺の内、実

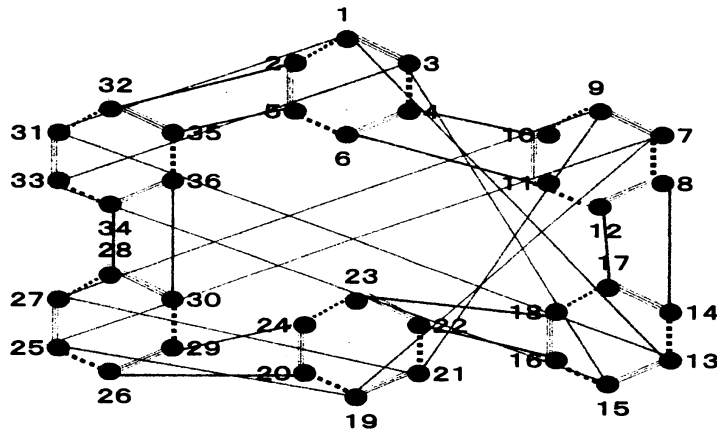


図 5: 極大鎖グラフ $G(P)$

線で表されている辺は青、点線で表されている辺は赤で彩色されているものとする。

定理 5.1. Dunce hat の正則 CW 分解から誘導される順序集合 P を考え、その極大鎖グラフを $G(P)$ とする。すると、 $G(P)$ は本質的サイクルを含まない。

証明: Dunce hat の正則 CW 分解から誘導される順序集合 P を考え、その極大鎖グラフを $G(P)$ とする。このとき、

$$V = \{v_1, \dots, v_{36}\}$$

である。

いま、 $V := \{v_1, \dots, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{36}\}$, $V_2 := \{v_{13}, \dots, v_{18}\}$ とし、 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ をそれぞれ V_1, V_2 から誘導される誘導部分グラフとする。すると、

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 = \{ & e_1 = \{1, 13\}, e_2 = \{3, 15\}, e_3 = \{8, 14\}, e_4 = \{12, 17\}, e_5 = \{13, 31\}, \\ & e_6 = \{15, 33\}, e_7 = \{16, 22\}, e_8 = \{18, 23\} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 \xrightarrow{e_1, \text{緑}} v_{13} \xrightarrow{\text{青}} v_{15} \xrightarrow{e_2, \text{緑}} v_3 \xrightarrow{\text{青}} v_1 &\Rightarrow e_1 \sim' e_2, \\
v_{14} \xrightarrow{e_3, \text{緑}} v_8 \xrightarrow{\text{青}} v_{12} \xrightarrow{e_4, \text{緑}} v_{17} \xrightarrow{\text{青}} v_{14} &\Rightarrow e_3 \sim' e_4, \\
v_{13} \xrightarrow{e_5, \text{緑}} v_{31} \xrightarrow{\text{青}} v_{33} \xrightarrow{e_6, \text{緑}} v_{15} \xrightarrow{\text{青}} v_{13} &\Rightarrow e_5 \sim' e_6, \\
v_{16} \xrightarrow{e_7, \text{緑}} v_{22} \xrightarrow{\text{青}} v_{23} \xrightarrow{e_8, \text{緑}} v_{18} \xrightarrow{\text{青}} v_{16} &\Rightarrow e_7 \sim' e_8, \\
v_{13} \xrightarrow{e_1, \text{緑}} v_1 \xrightarrow{\text{緑}} v_{31} \xrightarrow{e_5, \text{緑}} v_{13} &\Rightarrow e_1 \sim' e_5, \\
v_{15} \xrightarrow{e_6, \text{緑}} v_{33} \xrightarrow{\text{赤}} v_{34} \xrightarrow{\text{緑}} v_{28} \xrightarrow{\text{赤}} v_{27} \\
\text{緑} \xrightarrow{\text{赤}} v_{21} \xrightarrow{\text{赤}} v_{22} \xrightarrow{e_7, \text{緑}} v_{16} \xrightarrow{\text{赤}} v_{15} &\Rightarrow e_6 \sim' e_7, \\
v_{17} \xrightarrow{e_4, \text{緑}} v_{12} \xrightarrow{\text{赤}} v_{11} \xrightarrow{\text{緑}} v_6 \xrightarrow{\text{赤}} v_5 \\
\text{緑} \xrightarrow{\text{赤}} v_{35} \xrightarrow{\text{赤}} v_{36} \xrightarrow{\text{緑}} v_{30} \xrightarrow{\text{赤}} v_{29} \\
\text{緑} \xrightarrow{\text{赤}} v_{24} \xrightarrow{\text{赤}} v_{23} \xrightarrow{e_8, \text{緑}} v_{18} \xrightarrow{\text{赤}} v_{17} &\Rightarrow e_4 \sim' e_8
\end{aligned}$$

であるから, $[e_1] = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ である. したがって, $G(P)$ に本質的サイクルがあるかどうかの判定は G_1, G_2 のいずれにも本質的サイクルがなければ, $G(P)$ には本質的サイクルがないことがわかる. G_2 は 2 色で塗られているサイクルであるから, 本質的サイクルを含まない. そこで, G_1 について考える.

$V_3 = \{v_1, \dots, v_6, v_{25}, \dots, v_{36}\}$, $V_4 = \{v_7, \dots, v_{12}, v_{19}, \dots, v_{24}\}$ とし, $G_3 = (V_3, E_3)$, $G_4 = (V_4, E_4)$ をそれぞれ V_3, V_4 から誘導される誘導部分グラフとする. すると,

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_2 = \{ & e_9 = \{4, 10\}, e_{10} = \{6, 11\}, e_{11} = \{7, 25\}, e_{12} = \{9, 27\}, e_{13} = \{19, 25\}, \\
& e_{14} = \{21, 27\}, e_{15} = \{20, 26\}, e_{16} = \{24, 29\} \}
\end{aligned}$$

である. すると,

$$\begin{aligned}
v_7 \xrightarrow{e_9, \text{緑}} v_{25} \xrightarrow{\text{青}} v_{27} \xrightarrow{e_{10}, \text{緑}} v_9 \xrightarrow{\text{青}} v_7 &\Rightarrow e_9 \sim' e_{10}, \\
v_{10} \xrightarrow{e_{11}, \text{緑}} v_4 \xrightarrow{\text{青}} v_6 \xrightarrow{e_{12}, \text{緑}} v_{11} \xrightarrow{\text{青}} v_{10} &\Rightarrow e_{11} \sim' e_{12}, \\
v_{19} \xrightarrow{e_{13}, \text{緑}} v_{25} \xrightarrow{\text{青}} v_{27} \xrightarrow{e_{14}, \text{緑}} v_{21} \xrightarrow{\text{青}} v_{19} &\Rightarrow e_{13} \sim' e_{14}, \\
v_{20} \xrightarrow{e_{15}, \text{緑}} v_{26} \xrightarrow{\text{青}} v_{29} \xrightarrow{e_{16}, \text{緑}} v_{24} \xrightarrow{\text{青}} v_{20} &\Rightarrow e_{15} \sim' e_{16}, \\
v_7 \xrightarrow{e_9, \text{緑}} v_{25} \xrightarrow{e_{13}, \text{緑}} v_{19} \xrightarrow{\text{緑}} v_7 &\Rightarrow e_9 \sim' e_{13}, \\
v_{10} \xrightarrow{e_{10}, \text{緑}} v_4 \xrightarrow{\text{赤}} v_3 \xrightarrow{\text{緑}} v_{33} \xrightarrow{\text{赤}} v_{34} \\
\text{緑} \xrightarrow{\text{赤}} v_{28} \xrightarrow{\text{赤}} v_{27} \xrightarrow{e_{14}, \text{緑}} v_{21} \xrightarrow{\text{緑}} v_9 \xrightarrow{\text{赤}} v_{10} &\Rightarrow e_{11} \sim' e_{14}, \\
v_{19} \xrightarrow{e_{13}, \text{緑}} v_{25} \xrightarrow{\text{赤}} v_{26} \xrightarrow{e_{15}, \text{緑}} v_{20} \xrightarrow{\text{赤}} v_{19} &\Rightarrow e_{13} \sim' e_{15}
\end{aligned}$$

であるから, $[e_9] = \{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}\}$ である. したがって, $G(P)$ に本質的サイクルがないかどうかの判定は G_3, G_4 のいずれにも本質的サイクルがないかどうかを判定すればよいことがわかる. G_4 について考える. $V_5 = \{v_7, \dots, v_{12}\}$, $V_6 = \{v_{19}, \dots, v_{24}\}$ とし, $G_5 = (V_5, E_5)$, $G_6 = (V_6, E_6)$ をそれぞれ V_5, V_6 から誘導される誘導部分グラフとする. すると,

$$\tilde{E}_3 = \{e_{17} = \{7, 19\}, e_{18} = \{9, 21\}\}$$

である. このとき,

$$v_7 \xrightarrow{e_{17}, \text{緑}} v_{19} \xrightarrow{\text{青}} v_{21} \xrightarrow{e_{18}, \text{緑}} v_9 \xrightarrow{\text{青}} v_7 \Rightarrow e_{17} \sim' e_{18}$$

であるから, $[e_{17}] = \{e_{17}, e_{18}\}$ である. したがって, G_4 に本質的サイクルがないかどうかの判定は G_5, G_6 のいずれにも本質的サイクルがないかどうかを判定すればよいことがわかる. G_5, G_6 のいずれも 2 色で彩色されているサイクルであるから, 本質的サイクルではない.

G_3 について考える. $V_7 = \{v_1, \dots, v_6\}$, $V_8 = \{v_{25}, \dots, v_{36}\}$ とし, $G_7 = (V_7, E_7)$, $G_8 = (V_8, E_8)$ をそれぞれ V_7, V_8 から誘導される誘導部分グラフとする. すると,

$$\tilde{E}_4 = \{e_{19} = \{1, 31\}, e_{20} = \{3, 33\}, e_{21} = \{2, 32\}, e_{22} = \{5, 35\}\}$$

である. すると,

$$\begin{aligned} v_1 \xrightarrow{e_{19}, \text{緑}} v_{31} \xrightarrow{\text{青}} v_{33} \xrightarrow{e_{20}, \text{緑}} v_3 \xrightarrow{\text{青}} v_1 &\Rightarrow e_{19} \sim' e_{20}, \\ v_2 \xrightarrow{e_{21}, \text{緑}} v_{32} \xrightarrow{\text{青}} v_{35} \xrightarrow{e_{22}, \text{緑}} v_5 \xrightarrow{\text{青}} v_2 &\Rightarrow e_{21} \sim' e_{22}, \\ v_1 \xrightarrow{e_{19}, \text{緑}} v_{31} \xrightarrow{\text{赤}} v_{32} \xrightarrow{e_{21}, \text{緑}} v_2 \xrightarrow{\text{赤}} v_1 &\Rightarrow e_{19} \sim' e_{21} \end{aligned}$$

であるから, $[e_{19}] = \{e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}\}$ である. したがって, G_5 に本質的サイクルがないかどうかの判定は G_7, G_8 のいずれにも本質的サイクルがないかどうかを判定すればよいことがわかる. G_7 は 2 色で塗られているサイクルであるから, 本質的サイクルを含まない.

G_8 について考える. $V_9 = \{v_{25}, \dots, v_{30}\}$, $V_{10} = \{v_{31}, \dots, v_{36}\}$ とし, $G_9 = (V_9, E_9)$, $G_{10} = (V_{10}, E_{10})$ をそれぞれ V_9, V_{10} から誘導される誘導部分グラフとする. すると,

$$\tilde{E}_5 = \{e_{23} = \{28, 34\}, e_{24} = \{30, 36\}\}$$

である. すると,

$$v_{28} \xrightarrow{e_{23}, \text{緑}} v_{34} \xrightarrow{\text{青}} v_{36} \xrightarrow{e_{24}, \text{緑}} v_{30} \xrightarrow{\text{青}} v_{28} \Rightarrow e_{23} \sim' e_{24}$$

であるから, $[e_{23}] = \{e_{23}, e_{24}\}$ である. したがって, G_8 に本質的サイクルがないかどうかの判定は G_9, G_{10} のいずれにも本質的サイクルがないかどうかを判定すればよいことがわかる. G_9, G_{10} は何れも 2 色で塗られているサイクルであるから, 本質的サイクルを含まない.

以上のことから, $G(P)$ は本質的サイクルを含まないことが証明された. ■

謝辞

八森 正泰博士には, 終始適切なコメントをいただき, 深く感謝致します. 彼のコメントがなければ, 本研究は成就しなかったものとおもわれます.

参考文献

- [1] Björner, A.: "Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets." *Tans. Amer. Math. Soc.*, 260, pp.159-183,(1980).
- [2] Björner, A.: Topological methods, in "HandBook of Combinatorics", (R.Graham, M.Grötschel and L.Lovász eds.), North-Holland, pp.1819-1872,(1995).
- [3] Björner, A.: "Posets, regular CW complexes and Bruhat order", *Europ. combinatorics*, 5, pp.7-16,(1984).
- [4] 平林 隆一, 池辺 淑子: 「代数的組合せ論 -順序集合のホモロジー」, manuscript,(2000).
- [5] 平林 隆一, 池辺 淑子: 「順序複体のシェリング可能性について」, 数理解析研究所講究録, 1015, pp159-183,(1997).
- [6] 池辺 淑子: 「局所弱上半モジュラー半順序集合判定プログラム」, *yoshiko@ms.kagu.sut.ac.jp*, 東京理科大学工学部経営工学科所属,(1997).

- [7] Masahiro Hachimori: "Combinatorics of Constructible Complexes",
Doctorial Thesis, the University of Tokyo, (2000).
- [8] Masahiro Hachimori: 「複体の組合せ論入門」,
<http://www.qci.jst.go.jp/~hachi>, (2001).
- [9] Masahiro Hachimori: 「種々の二次元の単体的複体の例」, ゼミ資料, (8.10.1998).
- [10] Peter Klemenschmidt and Shmuel Onn: "Signable posets and partitionable simplicial complexes", *Discrete Comput. Geom.*, 15, pp.718-755, (1996).
- [11] R.C.Read, R.E.Tarjan: "Bounds on Backtrack Algorithms for Listing Cycles, Paths, and Spanning Trees", *Networks*, 5, pp.237-252, (1975).
- [12] Stanley, R., "Cohen-Macaulay rings and constructible polytopes," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81, pp.135-142, (1975).
- [13] Stanley, R., "The Upper Bound Conjecture and Cohen-Macaulay rings," *Studies in Applied Math.*, 54, pp.135-142, (1975).
- [14] Richard P.Stanley: "Combinatorics and Commutative Algebra,
Second Edition", *Birkhäuser*, (1996).
- [15] Richard P.Stanley (著), 成嶋 弘 (訳) :, 「数え上げ組合せ論 I」, 日本評論社, (1990).
- [16] W.Brunns and J.Herzog: "Cohen-Macaulay Rings",
Cambridge University Press (1993).
- [17] E.C.Zeeman: "On the dunce hat", *Topology*, 2, pp.341-358, (1964).