

直角ノルムを用いた多目的配置問題の有効解について

金 正道 Masamichi KON

弘前大学 理工学部 Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要 直角ノルムを用いた多目的配置問題を考える。その問題の有効解の特徴付けを与え、3次元の問題のすべての有効解を求めるアルゴリズムを提案する。

1. はじめに \mathbb{R}^n において需要点が与えられたとき、新たに単一の施設を配置する位置を決める問題は単一施設配置問題とよばれる。この問題は通常、施設と需要点の間の距離の関数の最小化問題として定式化される。需要点 $\mathbf{d}_i \equiv (d_i^1, d_i^2, \dots, d_i^n)^T \in \mathbb{R}^n, i \in M \equiv \{1, 2, \dots, m\}$ と \mathbb{R}^n 上定義された直角ノルム $\|\cdot\|_1$ が与えられていると仮定する。 $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n$ を配置する施設の位置を表す変数とし、 $D \equiv \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_m\}$ とする。一般性を失うことなく、各 $j \in J \equiv \{1, 2, \dots, n\}$ と任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $D \not\subset \{(x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n : x^j = x_0\}$ であると仮定する。もし、この仮定が満たされなければここで考える配置問題は n より低い次元の問題に帰着できる。多目的配置問題は次のように定式化される。

$$(P) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \equiv (\|\mathbf{x} - \mathbf{d}_1\|_1, \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_2\|_1, \dots, \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_m\|_1)^T$$

(P) は有効解を求める問題である。点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ かつ $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}_0)$ となる $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき \mathbf{x}_0 を (P) の**有効解**という。集合 $E(D)$ を (P) のすべての有効解の集合とする。上の定義より $D \subset E(D)$ となるのがわかる。多目的配置問題の有効解を特徴付けるために次の minisum 型配置問題も考える。

$$(P_\lambda) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^m \lambda^i \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_i\|_1$$

ここで λ^i は各 $\mathbf{d}_i, i \in M$ に付随する正の重みである。 $\lambda \equiv (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m)^T$ とし、 (P_λ) のすべての最適解の集合を $S^*(\lambda)$ で定義する。

\mathbb{R}^2 において (P) のすべての有効解の集合は [2] におけるアルゴリズムを用いて求めることができる。 (P_λ) は [3] におけるアルゴリズムを用いて解くことができる。直角ノルムの代わりにさまざまなノルムや距離を用いた (P) と (P_λ) が [3,7,11-13] において考えられている。本論文では \mathbb{R}^n において直角ノルムを用いた (P) と (P_λ) を考え、特に \mathbb{R}^3 における (P) のすべての有効解を求めることを考える。まず、(P) の有効解を (P_λ) の最適解を用いて特徴付ける。次に、 \mathbb{R}^3 における (P) と (P_λ) を考え、(P) の有効解の他の特徴付けを与え、 $O(m^4)$ 計算時間必要な $E(D)$ を求めるためのフレーム生成アルゴリズムを提案する。

第2節では、 (P_λ) の最適解のいくつかの性質を与える。第3節では、(P) の有効解のいくつかの性質を与える。第4節では、 \mathbb{R}^3 における (P) のすべての有効解を求めるアルゴリズムを提案する。最後に、第5節において結論を述べる。

2. (P_λ) の最適性 本節では、 (P_λ) の最適解のいくつかの性質を与える。

次の定理は (P) の有効解と (P_λ) の最適解の関係を与える。

定理1 ([8] 参照) 点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が (P) の有効解であるための必要十分条件は \mathbf{x}_0 がある $\lambda > \mathbf{0}$ に対する (P_λ) の最適解になることである。

定理1より $E(D)$ は次のように表すことができる。

$$(1) \quad E(D) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : x^* \in S^*(\lambda) \text{ for some } \lambda > 0\}$$

よって、以下では (P_λ) の最適解の性質を調べる。

(P_λ) の目的関数 g は

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \lambda^i \|x - d_i\|_1 = \sum_{i=1}^m \lambda^i \sum_{j=1}^n |x^j - d_i^j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda^i |x^j - d_i^j|,$$

と書き直せるので (P_λ) は n 個の独立な 1 次元の問題に帰着される。すなわち、 $x^* \equiv (x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*})^T \in S^*(\lambda)$ であるための必要十分条件は各 x^{j*} , $j \in J$ が次の 1 次元の問題の最適解となることである。

$$(P_j) \quad \min_{x \in \mathbb{R}} g_j(x) \equiv \sum_{i=1}^m \lambda^i |x - d_i^j|$$

これらの 1 次元の問題は [3] におけるアルゴリズムを用いて解くことができる。各 $j \in J$ に対して λ に対する (P_j) のすべての最適解の集合を $S_j^*(\lambda)$ で定義する。以下、 (P_1) を考える。他の (P_j) , $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ に関しても (P_1) と同様の結果が得られる。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を凸関数とする。その左側微分、右側微分および劣微分をそれぞれ $\frac{df(x)}{dx^-}$, $\frac{df(x)}{dx^+}$ および $\partial f(x)$ で定義する。すなわち

$$\frac{df(x)}{dx^-} = \lim_{\alpha \uparrow 0} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}, \quad \frac{df(x)}{dx^+} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

および

$$\partial f(x) = \left[\frac{df(x)}{dx^-}, \frac{df(x)}{dx^+} \right] \equiv \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{df(x)}{dx^-} \leq y \leq \frac{df(x)}{dx^+} \right\}$$

である。もし f が x_0 において微分可能ならば $\partial f(x_0) = \left\{ \frac{df(x_0)}{dx} \right\}$ であり、 x_0 において f が最小となるための必要十分条件は $0 \in \partial f(x_0)$ となることである (例えば、[6] 参照)。

$x \in \mathbb{R}$ に対して $L(x) \equiv \{i \in M : d_i^1 < x\}$, $R(x) \equiv \{i \in M : d_i^1 > x\}$ および $I(x) \equiv \{i \in M : d_i^1 = x\}$ とする。 (P_1) の目的関数 g_1 は区分的線形凸関数となり、それは各 d_k^1 , $k \in M$ においてのみ微分不可能であり

$$(2) \quad \left. \frac{dg_1(x)}{dx^+} \right|_{x=d_k^1} = \sum_{i \in L(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1)} \lambda^i, \quad \left. \frac{dg_1(x)}{dx^-} \right|_{x=d_k^1} = \sum_{i \in L(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i$$

および

$$\partial g_1(d_k^1) = \left[\sum_{i \in L(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i, \sum_{i \in L(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1)} \lambda^i \right]$$

を得る。 $d_{\min} \equiv \min\{d_i^1 : i \in M\}$ とし $d_{\max} \equiv \max\{d_i^1 : i \in M\}$ とする。このとき $d_k^1 > d_{\min}$ かつ $d_\ell^1 = \max\{d_i^1 : d_i^1 < d_k^1, i \in M\}$ となる d_k^1 と d_ℓ^1 に対して

$$(3) \quad \left. \frac{dg_1(x)}{dx^-} \right|_{x=d_k^1} = \left. \frac{dg_1(x)}{dx^+} \right|_{x=d_\ell^1} = \frac{dg_1(x)}{dx}, \quad x \in (d_\ell^1, d_k^1) \equiv \{y \in \mathbb{R} : d_\ell^1 < y < d_k^1\}$$

となることに注意。(2) より $x < d_{\min}$ に対して $\frac{dg_1(x)}{dx} = -\sum_{i=1}^m \lambda^i < 0$ となり、 $x > d_{\max}$ に対して $\frac{dg_1(x)}{dx} = \sum_{i=1}^m \lambda^i > 0$ となる。よって、次の補題を得る。

補題 1 任意に固定された $\lambda > 0$ に対して $S_1^*(\lambda) \subset [d_{\min}, d_{\max}]$ となる。

(2), (3) と補題 1 より (i) ある $d_k^1, k \in M$ に対して $S_1^*(\lambda) = \{d_k^1\}$ となるかまたは (ii) $d_k^1 < d_\ell^1$ となり、かつ任意の $d_i^1, i \in M$ に対して $d_i^1 \leq d_k^1$ または $d_\ell^1 \leq d_i^1$ となるようなある $d_k^1, d_\ell^1, k, \ell \in M$ に対して $S_1^*(\lambda) = [d_k^1, d_\ell^1]$ となる。

3. 有効解の性質 本節では、 (P_λ) の最適解の性質を用いて (P) の有効解のいくつかの性質を与える。

$x_0 \equiv (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^T \in \mathbb{R}^n$, x_0 に対して $x_0^j \in \{d_i^j : i \in M\}, j \in J$ であるとき x_0 を交点とよぶ。すべての交点の集合を I で定義し

$$d_{\min}^j \equiv \min\{d_i^j : i \in M\}, d_{\max}^j \equiv \max\{d_i^j : i \in M\}, j \in J$$

とおく。このとき

$$B \equiv \{(x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n : d_{\min}^j \leq x^j \leq d_{\max}^j, j \in J\}$$

を交点ボックスとよぶ (図 1)。定理 1 と補題 1 より $E(D) \subset B$ となる。

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を \mathbb{R}^n の標準基底とする。すなわち、各 $e_j, j \in J$ は第 j 成分が 1 で他の成分は 0 である。 $x_k \equiv (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)^T$ と $x_h \equiv (x_h^1, x_h^2, \dots, x_h^n)^T$ を交点とする。各 $j \in J$ に対して $x_k^j > x_h^j$ (resp. $x_k^j < x_h^j$), $x_k^{j'} = x_h^{j'}, j' \neq j$ かつ $x_h^j < x_s^j < x_k^j$ (resp. $x_k^j < x_s^j < x_h^j$) となる $x_s \equiv (x_s^1, x_s^2, \dots, x_s^n)^T \in I$ が存在しないとき x_k を x_h の e_j -方向隣接交点 (resp. $-e_j$ -方向隣接交点) という。

各 $j \in J$ に対して $d_{[1]}^j, d_{[2]}^j, \dots, d_{[m_j]}^j$ を $d_1^j, d_2^j, \dots, d_m^j$ の中のすべての異なる実数で $d_{[1]}^j < d_{[2]}^j < \dots < d_{[m_j]}^j$ であるとし、

$$F_{2k-1}^j \equiv \{d_{[k]}^j\}, k = 1, 2, \dots, m_j$$

とし

$$F_{2k}^j \equiv [d_{[k]}^j, d_{[k+1]}^j], k = 1, 2, \dots, m_j - 1$$

とする。各 $k_j \in \{1, 2, \dots, 2m_j - 1\}, j \in J$ に対して $F_{k_1}^1 \times F_{k_2}^2 \times \dots \times F_{k_n}^n$ をボックスとよぶ。さらに、もし k_1, k_2, \dots, k_n のなかで k 個が偶数のとき $F_{k_1}^1 \times F_{k_2}^2 \times \dots \times F_{k_n}^n$ を k -次元ボックスとよぶ (図 1)。

$\lambda > 0$ を任意に固定するとある $k_j \in \{1, 2, \dots, 2m_j - 1\}, j \in J$ に対して $S^*(\lambda) = F_{k_1}^1 \times F_{k_2}^2 \times \dots \times F_{k_n}^n$ となる。ゆえに、 $E(D)$ はいくつかのボックスの和集合となる。 $E(D)$ に含まれるすべての 1-次元ボックスの和集合を $E(D)$ のフレームとよぶ。

定理 2 ([14]) $h_1(w)$ と $h_2(w)$ を \mathbb{R} 上定義された凸関数とし、各 $i = 1, 2$ に対して h_i は w_i において最小となり $w_1 < w_2$ とする。このとき、与えられた任意の $\bar{w} \in [w_1, w_2]$ に対してある $\theta \in [0, 1]$ が存在して \bar{w} において $\theta h_2(w) + (1 - \theta)h_1(w)$ が最小となる。

系 1 $x_1 \equiv (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)^T, x_2 \equiv (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)^T \in B$ とする。ある $j_0 \in J$ に対して $x_1^{j_0} \neq x_2^{j_0}$ であり、 $x_1^j = x_2^j, j \neq j_0$ と仮定する。 $x^* \equiv \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \in (0, 1)$ とおく。もし $x_1, x_2 \in E(D)$ ならば $x^* \in E(D)$ となる。

系 1 より、もしあるボックスのすべての頂点が (P) の有効解ならばそのボックスの任意の点は (P) の有効解となる。

定理 3 $h_1(w)$ と $h_2(w)$ を \mathbb{R} 上定義された凸関数とし、各 $i = 1, 2$ に対して h_i は w_i において最小となり $w_1 \leq w_2$ とする。このとき、与えられた任意の $\bar{w} \in [w_1, w_2]$ に対して

$$H \equiv \{\theta \in [0, 1] : \bar{w} \text{ minimizes } \theta h_2(w) + (1 - \theta)h_1(w)\}$$

は閉区間となる。

系2 $\mathbf{x}_h \equiv (x_h^1, x_h^2, \dots, x_h^n)^T$, $\mathbf{x}_k \equiv (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)^T \in E(D) \cap I$ に対して $J_0 \equiv \{j \in J : x_h^j \neq x_k^j\} \neq \emptyset$ と仮定する。各 $j \in J_0$ に対してもし $x_h^j > x_k^j$ (resp. $x_h^j < x_k^j$) ならば $\mathbf{y}_j \equiv (y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^n)^T$ を \mathbf{x}_k の e_j -方向隣接交点 (resp. $-e_j$ -方向隣接交点) とする。このとき、ある $j_0 \in J_0$ が存在して $\mathbf{y}_{j_0} \in E(D)$ となる。

系1と2より $E(D)$ は連結であり、(P) の任意の2つの有効解の間には“ジグザグパス”が存在する。もし、 $E(D)$ のフレームが求まれば $E(D)$ が構成できる。次節では、 \mathbb{R}^3 における (P) を考え、 $E(D)$ のフレームを求めるアルゴリズムを与える。

4. すべての有効解を求めるアルゴリズム 本節を通して、 \mathbb{R}^3 における (P) を考え、 $O(m^4)$ 計算時間必要な $E(D)$ のフレームを求めるフレーム生成アルゴリズムを提案する。

フレーム生成アルゴリズムにおいて、交点が (P) の有効解であるかどうかを調べる必要がある。そのため、以下でどのように調べるかを述べる。

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $B_{\mathbf{d}_i}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y} - \mathbf{d}_i\|_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_i\|_1\}$, $i \in M$ とし、 $B(\mathbf{x}) = \bigcap_{i=1}^m B_{\mathbf{d}_i}(\mathbf{x})$ とする。有効解の定義より $\mathbf{x}_0 \in E(D)$ であるための必要十分条件は $B(\mathbf{x}_0)$ が任意の $B_{\mathbf{d}_i}(\mathbf{x}_0)$ の内部と共通部分を持たないことである。 $\varepsilon > 0$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $D_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv N_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap B(\mathbf{x})$ とする。ここで $N_\varepsilon(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} の ε -近傍である。このとき、次の補題を得る。

補題2 点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ が (P) の有効解であるための必要十分条件はある $\varepsilon > 0$ に対して $D_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ が任意の $B_{\mathbf{d}_i}(\mathbf{x}_0)$ の内部と共通部分を持たないことである。

[13] に従って、補題2を用いて交点が (P) の有効解であるかどうかを調べるために summary diagram の概念を導入する。[13] において、summary diagram は \mathbb{R}^2 における one-infinity norm を用いた多目的配置問題に対して導入された。

$$\begin{aligned} O_1 &\equiv \{(x^1, x^2, x^3)^T \in \mathbb{R}^3 : x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, x^3 \geq 0\}, \\ O_2 &\equiv \{(x^1, x^2, x^3)^T \in \mathbb{R}^3 : x^1 \leq 0, x^2 \geq 0, x^3 \geq 0\}, \\ O_3 &\equiv \{(x^1, x^2, x^3)^T \in \mathbb{R}^3 : x^1 \leq 0, x^2 \leq 0, x^3 \geq 0\}, \\ O_4 &\equiv \{(x^1, x^2, x^3)^T \in \mathbb{R}^3 : x^1 \geq 0, x^2 \leq 0, x^3 \geq 0\} \end{aligned}$$

とし、 $O_{-\eta} \equiv -O_\eta$, $\eta = 1, 2, 3, 4$ とする。 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して \mathbf{x} の summary diagram $SD(\mathbf{x})$ は次のように定義される。

$$SD(\mathbf{x}) \equiv \{\eta \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\} : \mathbf{d}_i \in O_\eta(\mathbf{x}) \text{ for some } i\}$$

ここで $O_\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + O_\eta$, $\eta = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ である。便宜上、 $SD(\mathbf{x})$ を次のように diagram form で表す。まず、頂点が $\mathbf{v}_1 \equiv (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 \equiv (-1, 1, 1)^T$, $\mathbf{v}_3 \equiv (-1, -1, 1)^T$, $\mathbf{v}_4 \equiv (1, -1, 1)^T$ および $\mathbf{v}_{-\eta} \equiv -\mathbf{v}_\eta$, $\eta = 1, 2, 3, 4$ であるような立方体を描く。次に、各 $\eta \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ に対して $\eta \in SD(\mathbf{x})$ ならば \mathbf{v}_η の位置に点を描く。例えば、 $\mathbf{d}_1 = (3, 0, 4)^T$, $\mathbf{d}_2 = (4, 2, 0)^T$, $\mathbf{d}_3 = (2, 1, 3)^T$, $\mathbf{d}_4 = (0, 4, 5)^T$, $\mathbf{d}_5 = (1, 5, 2)^T$ および $\mathbf{x} = (3, 2, 1)^T$ に対して $SD(\mathbf{x}) = \{2, 3, 4, -2, -3\}$ となる。図2は diagram form で表されたその summary diagram を示している。

$\mathbf{x}_0 \equiv (x_0^1, x_0^2, x_0^3)^T \in I$ に対して $SD(\mathbf{x}_0)$ は図3に描かれたパターンの何れかに一致する。ここで、diagram form で表された summary diagrams が回転移動によって一致するものは同一のもののみならず、

もし、 $SD(\mathbf{x}_0)$ のパターンが図3の (i)-(v) の何れかに一致するならば $\varepsilon > 0$ に対して $D_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0\}$ となる。この場合、補題2より $\mathbf{x}_0 \in E(D)$ となる。もし、 $SD(\mathbf{x}_0)$ のパターンが図3の (xii) に一致するならば $D_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ の内部は空でない。この場合、補題2より $\mathbf{x}_0 \notin E(D)$ となる。もし、 $SD(\mathbf{x}_0)$ のパターンが図3の (vi)-(xi) の何れかに一致するならば $\mathbf{x}_0 \notin E(D)$ となるための必要十分条件は表1の何れかの条件を満たす $i \in M$ が存在することである。ここで、 $\mathbf{d}_i - \mathbf{x}_0$, $i \in M$ はその summary diagram のパター

件を満たす $i \in M$ が存在することである。ここで、 $d_i - x_0, i \in M$ はその summary diagram のパターンが一致するように回転移動されたものとみなす。表 1 において、 $i \in M$ と $j \in J$ に対して

$$s_{ij} \equiv \begin{cases} + & \text{if } d_i^j - x_0^j > 0, \\ 0 & \text{if } d_i^j - x_0^j = 0, \\ - & \text{if } d_i^j - x_0^j < 0 \end{cases}$$

とする。例えば、 $SD(x_0) = \{1, 2, 3, 4, -3, -4\}$ であるとき、そのパターンは (vi) であり、 $x_0 \notin E(D)$ であるための必要十分条件は $(s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}) = (0, +, +)$ または $(+, +, +)$ または $(-, +, +)$ となるような $i \in M$ が存在することである。

$x_0 \in I$ が与えられたとき $SD(x_0)$ のパターンは x_0 と各 $d_i, i \in M$ の成分を比較することによって $O(m)$ 計算時間で定めることができる。すなわち、 $x_0 \in E(D)$ であるかどうかを $O(m)$ 計算時間で判定できる。

表 1 パターン (vi)-(xi) における $x_0 \notin E(D)$ となるための必要十分条件

Pattern	(s_{i1}, s_{i2}, s_{i3})		
(vi)	(a) (0, +, +)	(b) (+, +, +)	(c) (-, +, +)
(vii)	(a) (+, 0, +)	(b) (0, +, +)	(c) (+, +, +) (d) (+, -, +) (e) (-, +, +)
(viii)	(a) (-, 0, +)	(b) (-, +, 0)	(c) (-, +, +)
(ix)	(a) (+, +, 0)	(b) (+, 0, +)	(c) (+, +, +)
(x)	(a) (0, -, +)	(b) (+, -, +)	(c) (-, -, +)
(xi)	(a) (+, 0, +)	(b) (+, +, +)	(c) (+, -, +)

$E(D)$ のフレームは $E(D)$ に含まれるすべての 1次元ボックスの和集合であり、それは連結であるのでそれを連結グラフ (V, E) とみなすことができる。ここで $V = I \cap E(D)$ であり E はそのグラフのすべての辺の集合である。 $x_1, x_2 \in I \cap E(D)$ が与えられたとき、 x_1 と x_2 を連結する辺 $a(x_1, x_2)$ が E に含まれるための必要十分条件は x_1 と x_2 が隣接して (P) の有効解となることとする。 $E(D)$ のフレームを求めるアルゴリズムはこの考え方を基に構成される。

フレーム生成アルゴリズムにおいて

$$V_i \equiv \{(d_{[k]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[i]}^3)^T \in \mathbb{R}^3 : k \in \{1, 2, \dots, m_1\}, \ell \in \{1, 2, \dots, m_2\}\}, i = 1, 2, \dots, m_3$$

とする。 r を反復の回数を表すカウンターとする。各 $r \in \{1, 2, \dots, m_3\}$ に対してフレーム生成アルゴリズムは任意の初期点 $d_{k_r} \in V_r$ から $V_r \cap E(D)$ に含まれる交点のみを辿って連結されている $E(D)$ のフレームに含まれる 1次元ボックスを求める。 $L_r \subset V_r$ は初期点と $V_r \cap E(D)$ に含まれる交点のみを辿って連結されていることが判定された交点の集合である。 $S_r \subset L_r$ は交点の集合でそれらの交点に連結している 1次元ボックスが $E(D)$ に含まれるかどうかを既に判定されたものである。 $D_r, G_r \subset V_r$ はそれぞれ (P) の有効解であると判定された交点の集合と (P) の有効解でないと判定された交点の集合である。 T を $E(D)$ に含まれると既に判定された 1次元ボックスの和集合とする。さらに、 $x, y \in \mathbb{R}^3$ に対して $[x, y] \equiv \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$ とする。

フレーム生成アルゴリズム

ステップ 0 $S_i = \emptyset, G_i = \emptyset, D_i = D \cap V_i, i = 1, 2, \dots, m_3$ とする。各 $i \in \{1, 2, \dots, m_3\}$ に対して任意に $d_{k_i} \in D_i$ を選び、 $L_i = \{d_{k_i}\}$ とする。 $T = \emptyset$ とし $r = 1$ とする。

ステップ 1 もし $L_r = S_r$ ならば $r = r + 1$ とする。もし $r > m_3$ ならば終了。(T が $E(D)$ のフレームである。)

ステップ2 任意に $\mathbf{x}_0 = (d_{[k]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[r]}^3)^T \in L_r \setminus S_r$ を選び $S_r = S_r \cup \{\mathbf{x}_0\}$ とする。

ステップ3 $W = \emptyset$ とする。

- (a) もし $k > 1$ ならば $\mathbf{x}_{-1} = (d_{[k-1]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[r]}^3)^T$ とし $W = W \cup \{\mathbf{x}_{-1}\}$ とする。
- (b) もし $k < m_1$ ならば $\mathbf{x}_1 = (d_{[k+1]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[r]}^3)^T$ とし $W = W \cup \{\mathbf{x}_1\}$ とする。
- (c) もし $\ell > 1$ ならば $\mathbf{x}_{-2} = (d_{[k]}^1, d_{[\ell-1]}^2, d_{[r]}^3)^T$ とし $W = W \cup \{\mathbf{x}_{-2}\}$ とする。
- (d) もし $\ell < m_2$, then set $\mathbf{x}_2 = (d_{[k]}^1, d_{[\ell+1]}^2, d_{[r]}^3)^T$ とし $W = W \cup \{\mathbf{x}_2\}$ とする。

ステップ4 もし $W = \emptyset$ ならばステップ6へ。そうでなかったら任意に $\mathbf{x}_\eta \in W$ を選び、 $W = W \setminus \{\mathbf{x}_\eta\}$ とする。

ステップ5 もし $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\eta] \subset T$ ならばステップ4へ。

- (a) もし $\mathbf{x}_\eta \in D_r$ ならば $T = T \cup [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\eta]$ とし、 $\mathbf{x}_\eta \notin L_r$ ならば $L_r = L_r \cup \{\mathbf{x}_\eta\}$ としステップ4へ。
- (b) もし $\mathbf{x}_\eta \notin G_r$ ならば \mathbf{x}_η の summary diagram を用いて $\mathbf{x}_\eta \in E(D)$ であるかどうかを調べる。もし $\mathbf{x}_\eta \in E(D)$ ならば $T = T \cup [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\eta]$, $D_r = D_r \cup \{\mathbf{x}_\eta\}$ とし $L_r = L_r \cup \{\mathbf{x}_\eta\}$ とする。そうでなかったら

$$G_r = \begin{cases} G_r \cup \{(d_{[p]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[r]}^3)^T : p = 1, 2, \dots, k-1\} & \text{if } \eta = -1 \\ G_r \cup \{(d_{[p]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[r]}^3)^T : p = k+1, \dots, m_1\} & \text{if } \eta = 1 \\ G_r \cup \{(d_{[k]}^1, d_{[p]}^2, d_{[r]}^3)^T : p = 1, 2, \dots, \ell-1\} & \text{if } \eta = -2 \\ G_r \cup \{(d_{[k]}^1, d_{[p]}^2, d_{[r]}^3)^T : p = \ell+1, \dots, m_2\} & \text{if } \eta = 2 \end{cases}$$

とする。ステップ4へ。

ステップ6 もし $r < m_3$ ならば $\mathbf{x}_3 = (d_{[k]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[r+1]}^3)^T$ とする。そうでなかったらステップ1へ。

- (a) もし $\mathbf{x}_3 \in D_{r+1}$ ならば $T = T \cup [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_3]$ としステップ1へ。
- (b) \mathbf{x}_3 の summary diagram を用いて $\mathbf{x}_3 \in E(D)$ であるかどうかを調べる。もし $\mathbf{x}_3 \in E(D)$ ならば $T = T \cup [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_3]$ とし $D_{r+1} = D_{r+1} \cup \{\mathbf{x}_3\}$ とする。そうでなかったら $G_p = G_p \cup \{(d_{[k]}^1, d_{[\ell]}^2, d_{[p]}^3)^T\}$, $p = r+1, \dots, m_3$ とする。ステップ1へ。

ステップ0において、各 $j \in J$ に対して m 個の実数 $d_1^j, d_2^j, \dots, d_m^j$ を並べかえることによって $d_{[1]}^j, d_{[2]}^j, \dots, d_{[m_j]}^j$ が $O(m \log m)$ 計算時間で得られる [1]。このとき、 $V_i, D_i, i = 1, 2, \dots, m_3$ が定まる。よって、 $D_i, i = 1, 2, \dots, m_3$ は $O(m \log m)$ 計算時間で得られる。 r 回目の反復においてフレーム生成アルゴリズムは $L_r \subset V_r$ の各交点に隣接する交点が (P) の有効解であるかどうかをそれらの summary diagrams を用いて判定する。反復の回数は $O(m)$ である。 L_r に含まれる交点の数は $O(m^2)$ であり、1つの交点に隣接する交点で (P) の有効解であるかどうかを調べなければならないものの個数は高々 5 である。1つの交点が (P) の有効解であるかどうかをその summary diagram を用いて調べるためには $O(m)$ 計算時間必要である。故に、フレーム生成アルゴリズムは $O(m^4)$ 計算時間必要である。

最後に、 $\mathbf{d}_1 = (3, 0, 4)^T, \mathbf{d}_2 = (4, 2, 0)^T, \mathbf{d}_3 = (2, 1, 3)^T, \mathbf{d}_4 = (0, 4, 5)^T$ および $\mathbf{d}_5 = (1, 5, 2)^T$ に対する例題を考える。これに対する多目的配置問題 (P) にフレーム生成アルゴリズムを適用すると図4に示されているような $E(D)$ のフレームが得られる。

5. 結論 \mathbb{R}^n における直角ノルムを用いた多目的配置問題と minisum 型配置問題を扱い、 $E(D)$ を求めることを考えた。まず、定理2と3の系として (P $_\lambda$) の最適解を用いて (P) の有効解の特徴付けを与えた。それらは $E(D)$ が $E(D)$ のフレームから構成できて $E(D)$ のフレームが連結であることを保証する。次に、 \mathbb{R}^3 における (P) を考え、交点が (P) の有効解であるかどうかを判定するために summary diagram の概

念を導入した。交点が (P) の有効解であるかどうかは、その summary diagram のパターンによって判定できる。最後に、これらの結果に基づいて $E(D)$ のフレームを求めるフレーム生成アルゴリズムを提案した。フレーム生成アルゴリズムは $E(D)$ に含まれる 1次元ボックスを順次辿っていくことによって $E(D)$ のフレームを生成する。

参考文献

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *The design and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley, Reading MA, 1974.
- [2] L. G. Chalmet, R. L. Francis and A. Kolen, *Finding efficient solutions for rectilinear distance location problems efficiently*, Eur. J. Oper. Res., **6** (1981), 117-124.
- [3] Z. Drezner and G. O. Wesolowsky, *The asymmetric distance location problem*, Trans. Sci., **23** (1989), 201-207.
- [4] R. Durier, *On Pareto optima, the Fermat-Weber problem, and polyhedral gauges*, Math. Programming, **47** (1990), 65-79.
- [5] M. Fukushima, *Introduction to mathematical programming*(in Japanese), Asakura Syoten, Japan (1996).
- [6] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [7] M. Kon, *Efficient solutions for multicriteria location problems under the block norm*, Mathematica Japonica, **47** (1998), 295-303.
- [8] M. Kon and S. Kushimoto, *On efficient solutions of multicriteria location problems with the block norm*, Scientiae Mathematicae, **2** (1999), 245-254.
- [9] T. J. Lowe, J. -F. Thisse, J. E. Ward and R. E. Wendell, *On efficient solutions to multiple objective mathematical programs*, Manage. Sci., **30** (1984), 1346-1349.
- [10] L. Mangasarian, *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [11] T. Matsutomi and H. Ishii, *Fuzzy facility location problem with asymmetric rectilinear distance*(in Japanese), Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, **8** (1996), 57-64.
- [12] B. Pelegrin and F. R. Fernandez, *Determination of efficient points in multiple-objective location problems*, Nav. Res. Logist. q., **35** (1988), 697-705.
- [13] J. E. Ward and R. E. Wendell, *Characterizing efficient points in location problems under one-infinity norm*, in J. -F. Thisse and H. G. Zoller, Eds., *Locational analysis of public facilities*, North Holland, Amsterdam (1983), 413-429.
- [14] R. E. Wendell, A. P. Hurter, Jr. and T. J. Lowe, *Efficient points in location problems*, AIIE Trans., **9** (1977), 238-246.
- [15] P. L. Yu and M. Zeleny, *The set of all nondominated solutions in linear cases and a multicriteria simplex method*, J. Math. Anal. Appl., **49** (1975), 430-468.

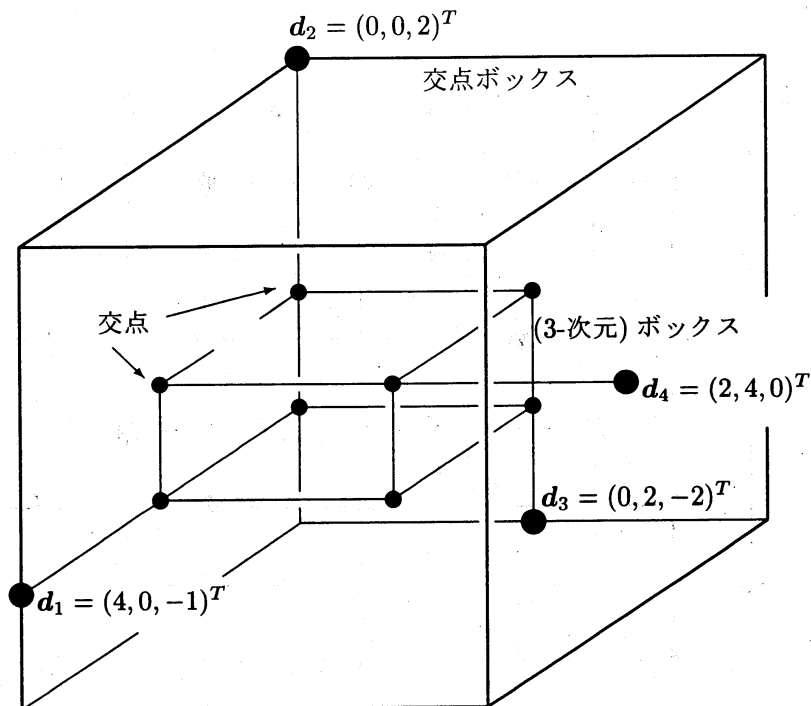


図1 交点, 交点ボックス, ボックス

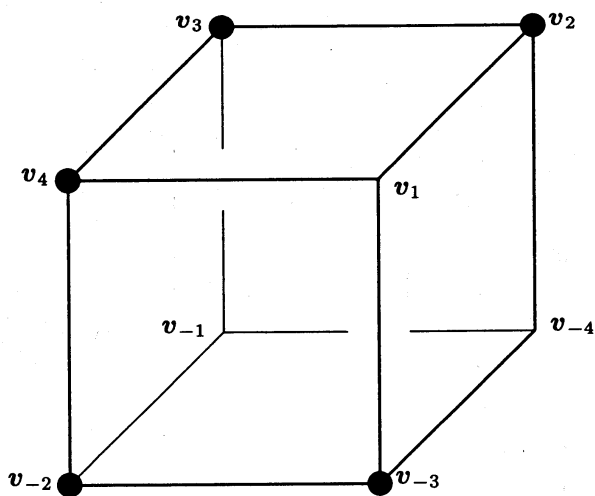
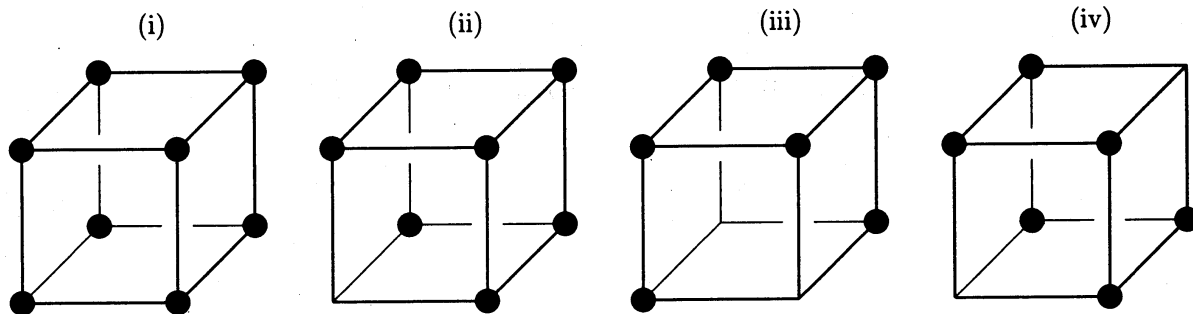


図2 $SD(x) = \{2, 3, 4, -2, -3\}$



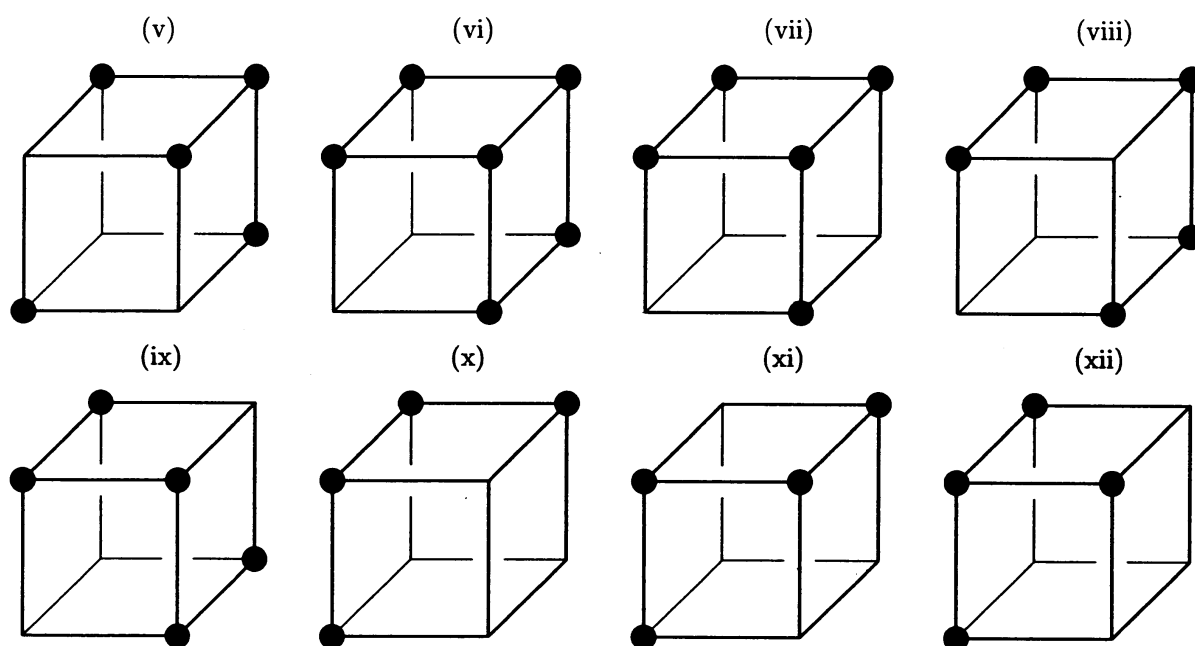


図3 交点の summary diagram のパターン

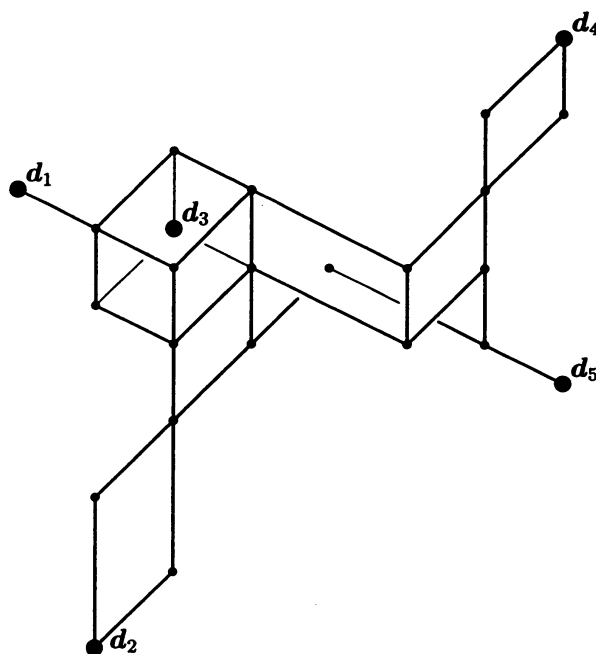


図4 $E(D)$ のフレーム (●: $E(D)$ に含まれる交点)