数理解析研究所講究録 1241 巻 2001 年 19-29

Jump-diffusion process を持つゲームオプションの価格付けと両プレーヤーの最適行使境界に関する数値計算について

鈴木淳生, 瀬古進, 穴太克則 (南山大学)
Atsuo Suzuki, Susumu Seko and Katsunori Ano (Nanzan University)

1 はじめに

Black and Scholes(1973) によりヨーロピアンオプションの価格式が導出されてから様々なオプションが研究されてきた. 近年 Kifer(2000) によってゲームオプションが提唱された. 彼はイスラエルオプションとも呼んでいる. オプションの売り手は任意の時刻でキャンセルを, 買い手は任意の時刻で権利を行使でき, 売り手がキャンセルする場合は買い手にペナルティを支払わなければならない.

ゲームオプションは Dynkin's Game の理論を用いて解析される. 2節ではまずゲームオプションとは如何なるものかについて述べ, 離散時間モデルと連続時間モデルについて説明する. Kifer は前者は CRR(Cox, Ross, and Rubinstein) モデル, 後者は Black-Scoles モデルの枠組によって価格式を導出している. 3節ではモンテカルロシミュレーションを用いて価格を近似する.

Kifer はゲームオプションの両プレーヤーの最適戦略がどのような構造なのかについては何らの検討も加えていない. 実務上は両プレーヤーの最適行使戦略, 最適取消戦略が判明していることは大切であろう. 3節ではそれらをゲームオプションの最適方程式を後ろ向きに数値計算することにより導出している. 興味深いことに売り手にとっては最適取消境界, 買い手にとっては最適行使境界が存在することが発見される.

2 ゲームオプション

ゲームオプションは売り手 A と買い手 B の間の契約 (満期は T) であり, 任意の時刻において A は契約のキャンセルを, B は権利を行使することができる. B が時刻 t で権利を行使するならば A から Y_t を受けとる. 一方, B が権利を行使する前に A が時刻 t でキャンセルした場合 B は X_t を受けとる. キャンセルと権利行使が同時の場合は A は B に Y_t 支払う. オプションがプットオプションであるならば X_t, Y_t は次のようになる. ただし, 時刻 t での株価を S_t, 権利行使価格を K とする.

$$
\begin{aligned}
Y_t &= (K-S_t)^+ \\
X_t &= (K-S_t)^+ + \delta_t
\end{aligned}
$$

このときの $\delta_t = X_t - Y_t \geq 0$ は A が契約をキャンセルしたことに対するペナルティと考えることができる. このペナルティ δ_t が十分に大きいなら (例えば $\delta_t > \sup_{0\leq\tau\leq T} Y_\tau$) なら A は満期までにキャンセルをしないので, ゲームオプションはアメリカンオプションになる. また, B が満期までに権利行使ができないヨーロピアンゲームオプションであるならば, $Y_t = 0 (t < T), Y_t = Y_T > 0 (t = T)$ となる.

2.1 離散時間モデル

離散時間の結果をまとめる．株価が上昇するのを 1, 下降するのを -1 と表
は長さ $-1,1$ 列の集合 $\Omega = \{\omega = (\omega_1\omega_2\cdots\omega_N); \omega_i = 1 \text{ or } -1(1 \le i \le N)\}$
B_n を利子率が r の銀行口座過程

$$B_n = (1+r)^n B_0, \quad B_0 > 0, \quad r > 0$$

と時刻 n での株価が

$$S_n = S_0 \Pi_{k=1}^n (1+\rho_k), \quad S_0 > 0$$

からなる N 期間の CRR モデルを考える．ここで $\rho_k(\omega) = 1/2(a+b+\omega_k(b-a$
である． ρ_k は確率空間 (Ω, P) 上で独立同一分布に従う列で，確率 p で b, 確
確率変数である．通常以下を仮定する．

$$-1 < a < r < b, \quad 0 < p < 1.$$

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}, \mathcal{F}_n$ は $\{\rho_k, k = 1, \cdots, n\}$ により生成される σ- 加法族である．

フィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}_{0 \le n \le N}$ に関する停止時刻 ξ の有限集合を $\mathcal{F}_{nN}$ と
ションは満期 $N < \infty$, 売り手 A のキャンセル時刻 $\sigma \in \mathcal{F}_{0N}$, 買い手 B の権
をもつ, $\mathcal{F}_n$- 適合過程 $\{X_n, Y_n; (\infty > Y_n \ge X_n \ge 0)\}$ である．時刻 $\sigma \wedge \tau =$
から受けとる利得は

$$R(\sigma, \tau) = X_\tau I_{\{\sigma < \tau\}} + Y_\tau I_{\{\tau \le \sigma\}}$$

となる． I_A は指示関数である．

定理 2.1 (Kifer(2000)) $P^* = (r-a)/(b-a), N < \infty$ とする．ゲームオ
は V_{0N}^* である．ここで V_{0N}^* は $V_{NN} = (1+r)^{-N} Y_N$ と

$$V_{nN}^* = \min\{(1+r)^{-n} X_n, \max((1+r)^{-n} Y_n, E^*[V_{n+1,N}|\mathcal{F}_n]$$

から得られる．さらに $n = 0, 1, \cdots, N$ に対して

$$\begin{aligned} V_{nN}^* &= \min_{\sigma \in \mathcal{F}_{nN}} \max_{\tau \in \mathcal{F}_{nN}} E^*[(1+r)^{-(\sigma \wedge \tau)} R(\sigma, \tau)|\mathcal{F}_n] \\ &= \max_{\tau \in \mathcal{F}_{nN}} \min_{\sigma \in \mathcal{F}_{nN}} E^*[(1+r)^{-(\sigma \wedge \tau)} R(\sigma, \tau)|\mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに停止時刻

$$\begin{aligned} \sigma_{nN}^* &= \min\{k \ge n : (1+r)^{-k} X_k = V_{kN}^* \text{ or } k = N\} \text{ an} \\ \tau_{nN}^* &= \min\{k \ge n : (1+r)^{-k} Y_k = V_{kN}^*\} \end{aligned}$$

は $\mathcal{F}_{nN}$ に属し，以下を満たす．

$$E^*[(1+r)^{-(\sigma_{nN}^* \wedge \tau)} R(\sigma_{nN}^*, \tau)|\mathcal{F}_n] \le V_{nN}^* \le E^*[(1+r)^{-(\sigma \wedge \tau_{nN}^*)} R(\sigma,$$

2.2 連続時間モデル

本節では連続時間の結果を述べる．このモデルは時刻 t での価格が B_t の債券と時刻 t での価格が S_t の株式からなる Black-Scholes モデルである．債券は微分方程式

$$dB_t = rB_t dt \tag{2.1}$$

に従うとする．ここで r は非負の定数である．一方，株式は確率微分方程式

$$dS_t = S_t(\mu dt + \kappa dW_t) \tag{2.2}$$

に従うとする．$\{W_t\}_{t\geq 0}$ は標準 Brown 運動，μ, κ は定数である．(2.1), (2.2) を解くとそれぞれ，

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad B_0 > 0, \quad r \geq 0 \tag{2.3}$$

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{\kappa^2}{2})t + \kappa W_t) \tag{2.4}$$

となる．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$\{W_u, u \leq t\}$ によって生成される σ- 加法族を $\mathcal{F}_t^W$, $\mathcal{F}_t^W$ と $\mathcal{F}$ の零集合を含む最小の σ- 加法族を $\mathcal{F}_t$ と書く．$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ はフィルトレーションである．(2.4) 式はフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ に関してマルチンゲールである．

$\mathcal{F}_{tT}$ をフィルトレーション $\{\mathcal{F}_u\}_{0\leq u\leq T}$ に関する停止時刻の集合とする．ゲームオプションは売り手 A がキャンセル時刻 $\sigma \in \mathcal{F}_{tT}$, 買い手 B が行使時刻 $\tau \in \mathcal{F}_{tT}$ を選択し，$\mathcal{F}_t$- 適合で左極限をもつ右連続な確率過程 $X_t, Y_t, \infty > X_t \geq Y_t \geq 0$ からなる契約である．時刻 $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau)$ で B が A から受けとる利得は

$$R(\sigma, \tau) = X_\sigma I_{\{\sigma<\tau\}} + Y_\tau I_{\{\tau\leq\sigma\}}$$

と表される．次に

$$W_t^Q = W_t + \frac{\mu - r}{\kappa} t \tag{2.5}$$

とすれば Girsanov の定理より $\{W_t^Q\}_{t\geq 0}$ は P と同値な確率測度 Q に関して標準 Brown 運動である．(2.2), (2.5) より

$$dS_t = S_t(rdt + \kappa dW_t^Q)$$

となる．

定理 3.1(Kifer(2000)) 連続モデルにおけるゲームオプションの価格は V_{0T}^* に等しい．ここで，$\{V_{tT}^*\}_{0\leq t\leq T}$ は Q- 確率 1 で右連続過程であり，

$$\begin{aligned} V_{tT}^* &= \operatorname{ess}\inf_{\sigma\in\mathcal{F}_{tT}} \operatorname{ess}\sup_{\tau\in\mathcal{F}_{tT}} E^Q[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t] \\ &= \operatorname{ess}\sup_{\tau\in\mathcal{F}_{tT}} \operatorname{ess}\inf_{\sigma\in\mathcal{F}_{tT}} E^Q[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

と表される．さらに $t \in [0,T], \varepsilon > 0$ に対し停止時刻

$$\begin{aligned} \sigma_{tT}^\varepsilon &= \inf\{u \geq t : e^{-ru}X_u \leq V_{uT}^* + \varepsilon \ \text{ or } \ u = T\} \ \text{ and} && (2.6) \\ &= \inf\{u \geq t : e^{-ru}Y_u \geq V_{uT} - \varepsilon\} && (2.7) \end{aligned}$$

は $\mathcal{F}_{tT}$ に属し, 任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_{tT}$ に対し Q- 確率 1 で以下を満たす.

$$E^Q[e^{-r(\sigma_{tT}^{\varepsilon}\wedge\tau)}R(\sigma_{tT}^{\varepsilon},\tau)|\mathcal{F}_t] - \varepsilon \le V_{tT}^* \le E^Q[e^{-r(\sigma\wedge\tau_{tT}^{\varepsilon})}|\mathcal{F}_t] + \varepsilon$$

ここで E^Q は確率測度 Q の下での期待値である. さらに, $Y_t, -X_t$ が上半連続関数, すなわち不連続な点で正方向にジャンプすると仮定する. このとき停止時刻は $\sigma_{tT}^{\varepsilon}, \tau_{tT}^{\varepsilon}$ の単調性より, $\sigma_{tT}^* = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sigma_{tT}^{\varepsilon}, \tau_{tT}^* = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\tau_{tT}^{\varepsilon}$ となり, 任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_{tT}$ に対し Q- 確率 1 で以下を満たす.

$$E^Q[e^{-r(\sigma_{tT}^*\wedge\tau)}R(\sigma_{tT}^*,\tau)|\mathcal{F}_t] \le V_{tT}^* \le E^Q[e^{-r(\sigma\wedge\tau_{tT}^*)}R(\sigma,\tau_{tT}^*)|\mathcal{F}_t].$$

(2.6) で $\varepsilon = 0$ とした $\sigma_{tT}^* \wedge \tau_{tT}^* = \sigma_{tT}^0 \wedge \tau_{tT}^0$ を用いれば Q- 確率 1 で

$$V_{tT} = E^Q[e^{-r(\sigma_{tT}^0\wedge\tau_{tT}^0)}R(\sigma_{tT}^0,\tau_{tT}^0)|\mathcal{F}_t]$$

が成り立つ.

3 モンテカルロ法によるゲームプットオプションの最適行使境界の数値計算

簡便化のためにキャンセル料は定数 δ とする. 時刻 t において, 買い手はその時刻で直ちに行使するか, 持ち越したほうがよいか, その価値が大きくなるような政策をとる. 売り手はその時刻で直ちにキャンセルするか, 持ち越すか, その価値が低くなる政策をとる (売り手は買い手に金額を支払うから, 当然その金額を少なくする政策をとる). 売り手にはいつ権利をキャンセルするかの最適取消境界 (Optimal Cancel Boundary), 買い手にはいつ権利行使するかの最適行使境界 (Optimal Exercise Boundary) が存在しそうである.

3.1 シミュレーション

Grant, Vora and Week(1996) に基づき, ゲームオプションの最適方程式を後ろ向きに計算する. アルゴリズムを以下に記す.

Step 1: 原資産価格のパスを十分な数だけ発生させる
時刻 0 から満期 T までを $t_j,\ j = 0, \cdots, M,\ M\Delta t = T$ のように離散化し, 時刻 t_j における原資産価格をグリッド $0 < S_j^1 < \cdots < S_j^g < \cdots < S_j^G < \infty$ に分ける.

Step2: 売り手の最適取消境界および買い手の最適行使境界の決定

Step2.1: 時刻 t_M(満期) における最適取消境界および最適行使境界はそれぞれ K である. 時刻 t_j における最適取消境界と最適行使境界をそれぞれ S_j^C, S_j^E とすると, $S_M^C = S_M^E = K$ となる.

Step2.2: 時刻 t_{M-1} における最適取消境界および最適行使境界の決定
時刻 t_{M-1}, 原資産価格 S_{M-1}^g における売り手の早期取消価値と持ち越し価値の差を $d^C(S_{M-1}^g)$, 買い手の早期行使価値と持ち越し価値の差を $d^E(S_{M-1}^g)$ とすると,

$$d^C(S_{M-1}^g) = (K - S_{M-1}^g)^+ + \delta - e^{-r\Delta t}E_{M-1}[P_M(S_M)|S_{M-1}^g] \quad (3.1)$$
$$d^E(S_{M-1}^g) = (K - S_{M-1}^g)^+ - e^{-r\Delta t}E_{M-1}[P_M(S_M)|S_{M-1}^g] \quad (3.2)$$

が成立する. ただし

$$P_M(S_M) = (K - S_M)^+$$

である．ゲームプットオプションについては，

$$\begin{cases} d^C(S_j) < 0 \Rightarrow \text{cancel} \\ d^C(S_j) \geq 0 \Rightarrow \text{hold} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^E(S_j) > 0 \Rightarrow \text{exercise} \\ d^E(S_j) \leq 0 \Rightarrow \text{hold} \end{cases}$$

が成立するような最適取消境界および最適行使境界が存在しそうである．実際計算してみると存在する．

$d^C(S_{M-1}) < 0$, つまり $(K - S^g_{M-1})^+ + \delta < e^{-r\Delta} E_{M-1}[P_M(S_M)|S^g_{M-1}]$ のとき，売り手はその時刻で権利をキャンセルした方が，それ以降に買い手に支払う金額の期待値よりも低い．よって売り手はその時刻で権利をキャンセルする．逆に，$d^C(S_{M-1}) \geq 0$, つまり $(K - S^g_{M-1})^+ + \delta \geq e^{-r\Delta t} E_{M-1}[P_M|S^g_{M-1}]$ のとき，売り手はその時刻で権利をキャンセルすると，その金額がそれ以降に買い手に支払う金額の期待値よりも高くなるので，売り手はその時刻では持ち越す．

時刻 t_{M-1} における最適取消境界，最適行使境界の決定は，それぞれのグリッドで早期取消価値，早期行使価値および持ち越し価値を計算し，(3.1) 式と (3.1) 式から $d^C(S^g_{M-1}), d^E(S^g_{M-1})$ を求め，符号が入れ替わるところの値をそれぞれの境界とする．d^C と d^E の符号は高々 1 回しか変化しないことが数値計算により確かめられる．このことは最適取消境界，最適行使境界の存在を示している．

Step2.3: 時刻 t_{M-2} における最適取消境界および最適行使境界の決定

時刻 t_{M-2}, 原資産価格 S^g_{M-2} における売り手の早期取消価値と持ち越し価値の差 $d^C(S^g_{M-2})$, 買い手の早期行使価値と持ち越し価値の差 $d^E(S^g_{M-2})$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} d^C(S^g_{M-2}) &= (K - S^g_{M-2})^+ + \delta - e^{-r\Delta t} E_{M-2}[P_{M-1}(S_{M-1})|S^g_{M-2}] \\ d^E(S^g_{M-2}) &= (K - S^g_{M-2})^+ - e^{-r\Delta t} E_{M-2}[P_{M-1}(S_{M-1})|S^g_{M-2}] \end{aligned}$$

となる．ただし

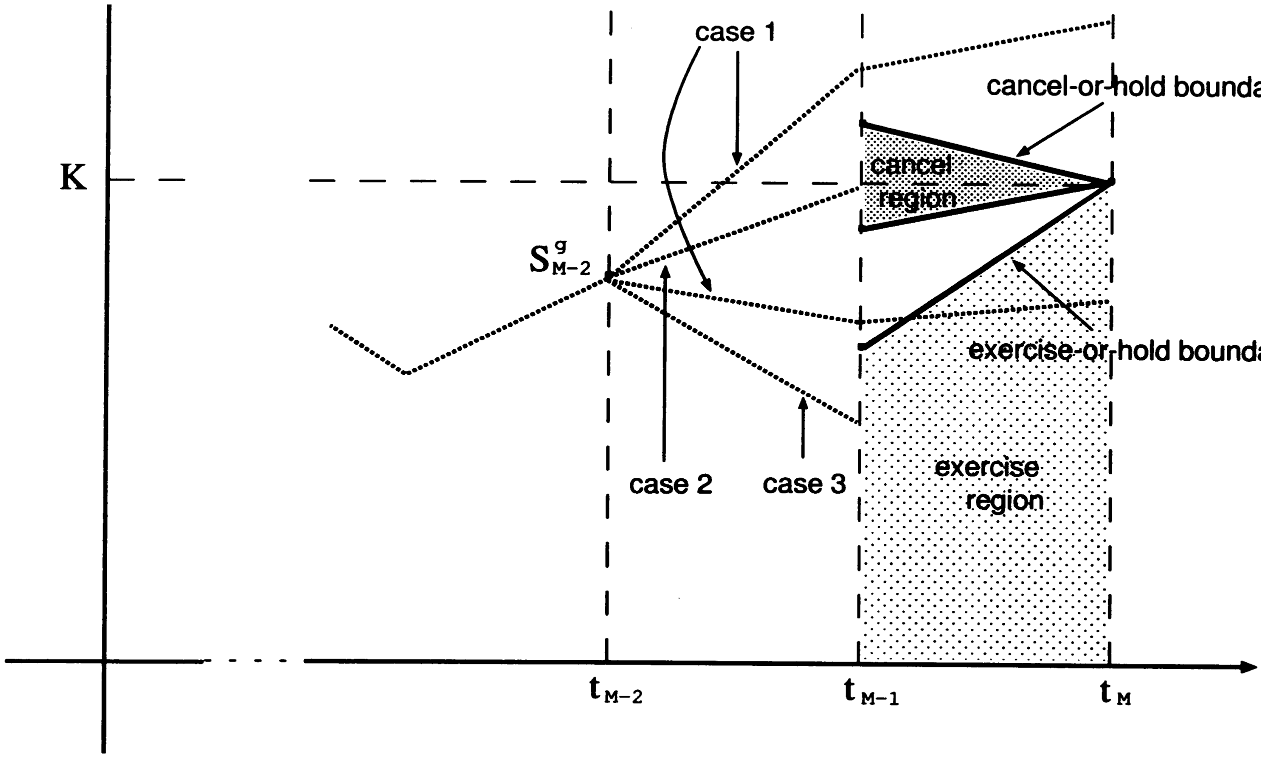
$$P_{M-1}(S_{M-1}) = \begin{cases} (K - S^g_{M-1})^+ + \delta & \text{if} \quad d^C(S^g_{M-1}) < 0 \Rightarrow \text{cancel} \\ e^{-r\Delta t} P_M(S_M) & \text{if} \quad d^C(S^g_{M-1}) \geq 0 \Rightarrow \text{hold} \\ K - S^g_{M-1} & \text{if} \quad d^E(S^g_{M-1}) > 0 \Rightarrow \text{exercise} \\ e^{-r\Delta t} P_M(S_M) & \text{if} \quad d^E(S^g_{M-1}) \leq 0 \Rightarrow \text{hold} \end{cases}$$

となる．各グリッド S^g_{M-2} における持ち越し価値 $E_{M-2}[P_{M-1}|S^g_{M-2}]$ は状態 (t_{M-2}, S^g_{M-2}) からスタートする 2 期間のモンテカルロ法により算出する．そのときすでに求まっている S^C_M, S^E_M, S^C_{M-1}, S^E_{M-1} を利用する (図を参照).

Exercise-or-hold boundary を買い手の最適行使境界, cancel-or-hold boundary を売り手の最適取消境界とし，買い手は原資産価格が最適行使境界を下回ったとき権利を行使し，売り手は最適取消境界を上回ったとき権利をキャンセルすると仮定する．そのとき，

case 1　時刻 t_{M-1} において売り手と買い手はそれぞれ持ち越し，時刻 t_M において買い手が行使する．そのときの持ち越し価値は $e^{-2r\Delta t}(K - S^g_M)^+$ となる．

case 2　時刻 t_{M-1} において売り手はキャンセルする．そのときの持ち越し価値は $e^{-r\Delta t}(K - S^g_{M-1})^+ + \delta$ となる．



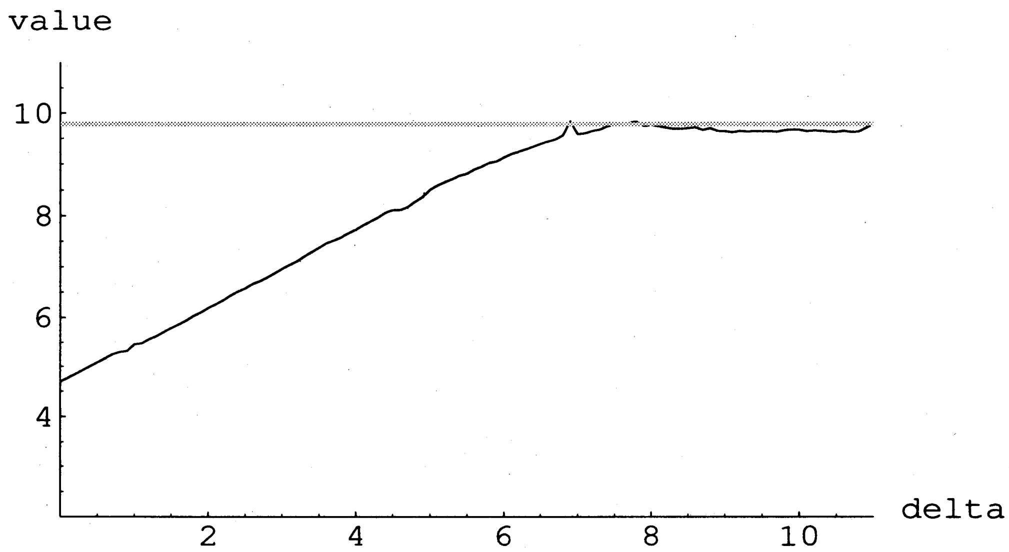
case 3　時刻 t_{M-1} において買い手が行使する．そのときの持ち越し価値は $e^{-r\Delta t}(K-S^g_{M-1})^+$ となる．

Step 2.4: 時刻 $t_j, j = M-3, \cdots, 1$ まで後ろ向きに最適取消境界および最適行使境界を求める．

Step3: オプション価格の算出
保存しておいた原資産価格パスを用い，モンテカルロシミュレーションでオプション価格を算出する．

3.2 実行結果例

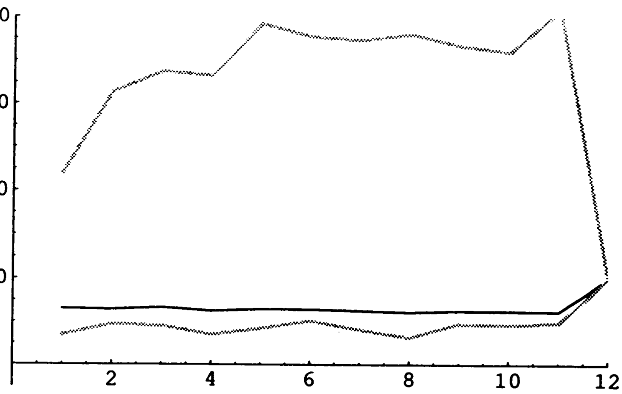
前節で説明したアルゴリズムを用い, 結果を算出した. パラメータは $K = 100$, $S = 96.5$, $T = 1$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $M = 12$, 発生させるパスの本数は 5000, それぞれのグリッドから発生させるパスは 1000 とした. 次の図は $\delta = 0$ から $\delta = 11$ まで変えたときのゲームプットオプションの値である. ただし, 実線はモンテカルロシミュレーションによる値, 薄線は同じパラメータを与えたときの 2000 ステップの 3 項モデルのアメリカンプットの値である.



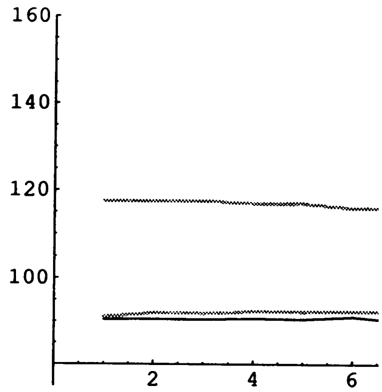
δ を変化させたときのゲームプットオプションの価格
薄線はアメリカンプットオプションの価格

$\delta = 8.3$ のとき, 前節の方法と 3 項モデルの値がアメリカンプットの値と一致することがわかる. つまり δ の値が大きくなると, 売り手は買い手に金額を多く支払わなくてはならないため, 売り手は権利をキャンセルしないのが最適となり, アメリカンプットの価格と一致する.

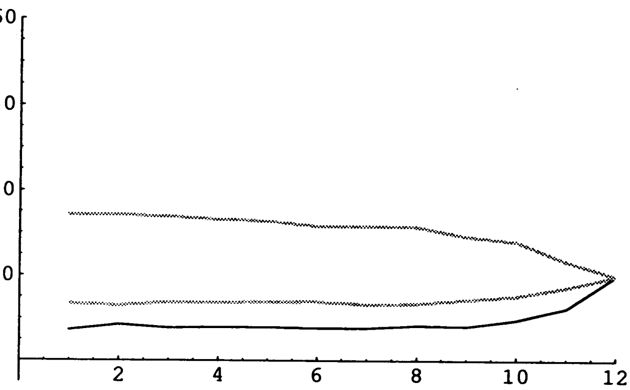
次の図は $\delta = 0$ から $\delta = 9$ までの売り手の最適取消境界 (2 本の薄線に挟まれている領域) と買い手の最適行使境界 (実線) を表している.



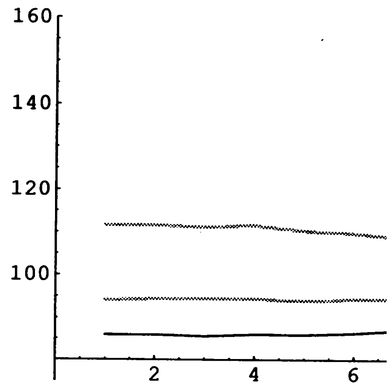
$\delta = 0$ のとき



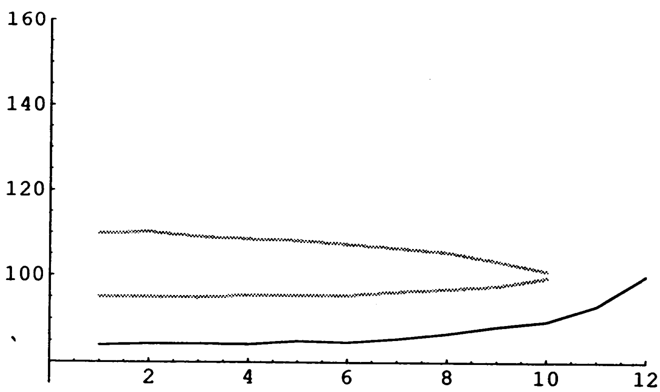
$\delta = 1$ のと



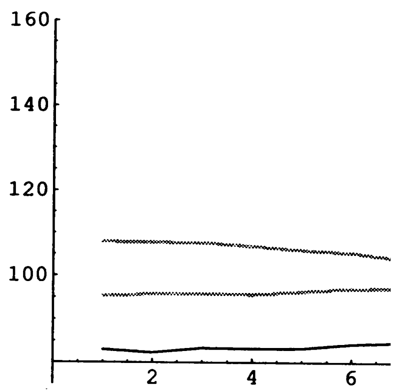
$\delta = 2$ のとき



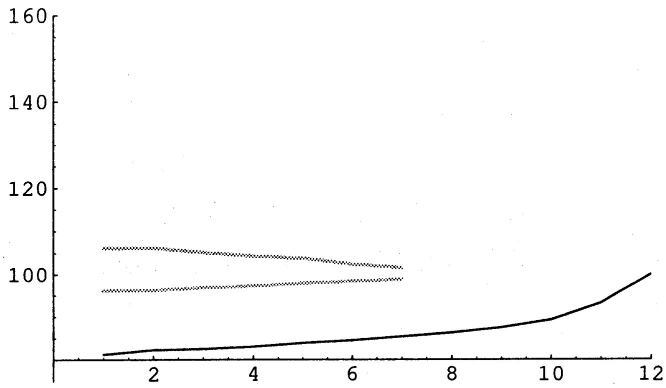
$\delta = 3$ のと



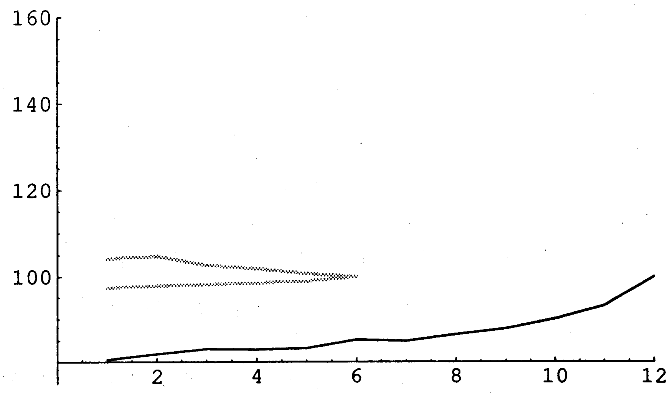
$\delta = 4$ のとき



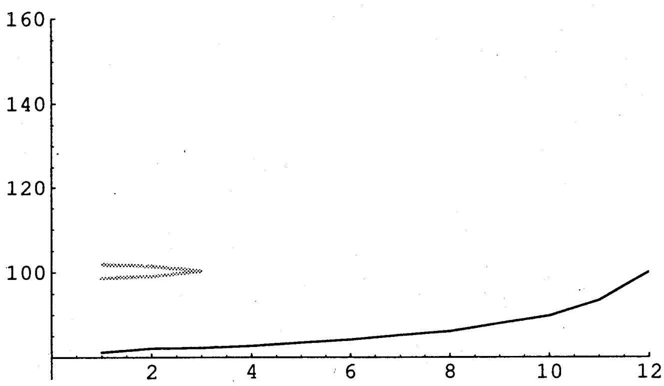
$\delta = 5$ のと



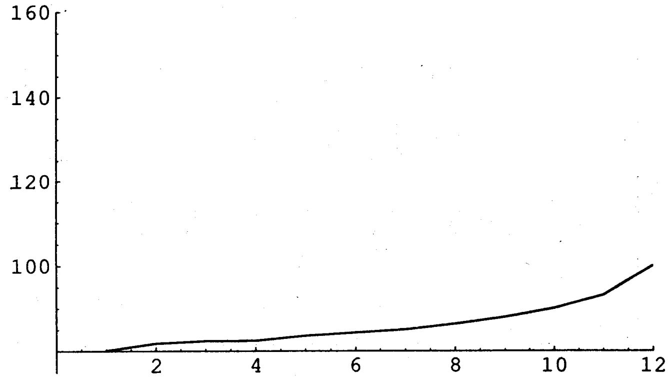
$\delta = 6$ のとき



$\delta = 7$ のとき



$\delta = 8$ のとき



$\delta = 9$ のとき

$\delta = 0$ のとき, 売り手は資産価格の上下にかかわらず直ちに権利をキャンセルするのが最適となり, δ の値が上がると売り手のキャンセル領域は狭くなり, $\delta = 9$ のとき売り手のキャンセル領域がなくなり, 買い手の最適行使境界はアメリカンプットのそれと等しくなる.

4 ジャンプを伴うゲームプットオプションのモンテカルロ法による数値計算

時刻 t での株価は次のように記述できる.

$$S_t = \prod_{j=1}^{N_t}(1+U_j)\exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\}.$$

ここで $(U_j)_{j\geq 1}$ はジャンプ幅であり, $(-1,+\infty)$ に値をとる独立同一分布の確率変数の列である.

ジャンプがある場合のアルゴリズムを以下に示す. 最適行使境界, 最適取消境界の計算のアルゴリズムはジャンプがない場合と同様である.

jump-diffusion process に従うパス発生のアルゴリズム

1. 平均 0, 分散 1 の切断正規分布でジャンプ幅 $(-1,+\infty)$ を決める.

2. 離散化させた各時刻 j においてパラメータ $\lambda\Delta t$ をもつ Poisson 分布に従う乱数を発生させ, ジャンプする時刻を決める.

3. もし時点 j においてジャンプするならば

$$S_j = (1+U_j)(S_{j-1} + rS_{j-1}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}S_{j-1}x_j),\ \ j=1,\cdots,M,\ M\Delta t = T$$

となり, ジャンプしないならば

$$S_j = S_{j-1} + rS_{j-1}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}S_{j-1}x_j,\ \ j=1,\cdots,M,\ M\Delta t = T$$

4.1 実行結果例

パラメータはジャンプがない場合と同じで $K = 100$, $S = 96.5$, $T = 1$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $M = 12$, 発生させるパスの本数は 5000, それぞれのグリッドから発生させるパスは 1000 とした. 次の図は $\delta = 0$ から $\delta = 11$ まで変えたときのモンテカルロシミュレーションによるゲームプットオプションの値である.

δを変化させたときのjump-processに従うゲームプットオプションの価格

5 まとめ

今回の研究によりゲームオプションに最適取消境界と最適行使境界が存在することが数値計算結果より発見される．アメリカンプットオプションについては最適行使境界の存在が証明されているがゲームオプションではまだである．これは今後理論的に証明されることが期待される興味深い課題である．本研究は財団法人堀情報科学振興財団の援助を受けた．記して感謝致します．

参考文献

[1] 穴太克則, タイミングの数理 - 最適停止問題, 朝倉書店, (2000).

[2] 鈴木淳生, 瀬古進, 穴太克則, "アメリカンオプションの最適行使境界の数値計算解法について", 京都大学数理解析研究所講究録 **1207**, 136-146, (2001).

[3] 湯前祥二, 鈴木輝好, モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店, (2000).

[4] Grant, D., Vora, G. and Week, D., "Simulation and the early-exercise option problem", *Journal of Financial Engineering*, **5**(3), 211-227, (1996).

[5] Kifer, Y., "Game options", *Finance and Stochastics*, **4**, 443-463, (2000).

[6] Lamberton, D. and Lapeyre, B., Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance, Chapman and Hall, (1996).