

## 10GCM におけるカオスの遍歴について

北海道大学大学院理学研究科 数学専攻 阿部智 (Satoru Abe)  
 Department of Mathematics, Faculty of Science,  
 Hokkaido University

## 1. Introduction

カオスの遍歴は 1990 年頃に金子、池田、津田によって提唱され、高次元の力学系において、いくつかのほぼ安定な状態が存在して、安定した状態のひとつにしばらくの間滞在した後、別の安定した状態に移り、いくつかの秩序状態のカオスを経て遍歴する現象である。

このカオスの遍歴が観測できる系の代表的な例として、大域結合写像 (Globally Coupled Map, GCM) がある。GCM は同一のカオス的な系をいくつか相互に結合したものである。

本研究では、特に 10 個の 1 次元写像を相互に結合させた 10GCM において、カオスの遍歴が起こる仕組みについて実験結果を元に考察する。

パラメータ  $a$  を持つ 1 次元写像  $g_a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto 1 - ax^2$  に対して、10GCM はパラメータ  $\epsilon$  を持つ次の写像で与えられる。

$$f_{a,\epsilon}: \mathbf{R}^{10} \rightarrow \mathbf{R}^{10}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_{10}) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_{10})$$

$$y_i = (1 - \epsilon)g_a(x_i) + \frac{\epsilon}{10} \sum_{j=1}^{10} g_a(x_j) \quad (1 \leq i \leq 10)$$

ここではカオス的な系としてロジスティックマップを用いている。このロジスティックマップを振動子とみなして話を進める。

いくつかの振動子が結合したシステムでは、ばらばらの振動をしていた振動子が同期して同一の振動を始める現象が知られている。この現象を「引き込み」と呼ぶ。金子は GCM に対して  $(a, \epsilon)$  を変化させたときの引き込み方を図 2 のように分類した [1]。

1. コヒーレント相: 全ての要素が完全に引き込んで振動する。
2. 秩序相: 数個のクラスターに分かれて振動する。
3. 部分秩序相: クラスターの組み換えが間欠的に起きる。
4. 非同期相: 各要素が全くばらけて振動する。

カオスの遍歴が起きるのは部分秩序相にいるときで、ほぼ同期状態にあった振動子が時間発展により乱れ始め、ばらばらの状態になる。しばらくすると別の同期状態になりしばらくの間その状態を保つが、しばらく時間が経つとまた乱れ始めばらばらの状態になる。このような準安定な状態の間を遍歴する現象が、カオスの遍歴と呼ばれている。

小室は 10GCM において、 $a = 1.9$  と固定したとき、 $\epsilon$  の値を変化させて秩序相から部分秩序相に変わるときのカオスの遍歴の発生機構を研究した [3]。今回は小室の結果を下にカオスの遍歴が起きる現象と階層的な構造の関係について実験結果を下に考察した。

## 2. 準備

### 座標の置換によって不変な部分空間の定義

10次対称群における置換 $\sigma$ に対して、座標の置換を次の写像で与える.

$$P_\sigma : \mathbf{R}^{10} \rightarrow \mathbf{R}^{10}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_{10}) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(10)})$$

このとき、 $P_\sigma$ -不変な部分空間 $H_\sigma$ を以下のように定義する.

$$H_\sigma = \{x \in \mathbf{R}^{10}; x_i = x_{\sigma(i)}, 1 \leq i \leq 10\}$$

### 横断 Lyapunov 指数の定義

$H_\sigma$ の横断リアプノフ指数は $H_\sigma$ 上にある軌道の補空間方向への安定性を見積もる量である.  
 $\sigma$ の巡回置換表示を

$$\sigma = (i_{11}, \dots, i_{1m_1})(i_{21}, \dots, i_{2m_2}) \cdots (i_{k1}, \dots, i_{km_k})$$

で表わすとき、 $H_\sigma$ の横断 Lyapunov 指数を次の式で与える.

$$\log(1 - \epsilon) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log |Dg_a(\pi_{i,j,1} \circ f_{a,\epsilon}^m(x))|, \quad x \in H_\sigma, j = 1, \dots, k$$

但し、 $\pi_{i,j,1}$ は $x$ から $x_{i,j,1}$ 成分への射影で

$$\pi_{i,j,1} : \mathbf{R}^{10} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x_{i,j,1}, \quad j = 1, \dots, k$$

である. つまり、 $H_\sigma$ の横断 Lyapunov 指数は $H_\sigma$ 上での編 Lyapunov 指数

$$\lambda_{i,j,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log |Dg_a(\pi_{i,j,1} \circ f_{a,\epsilon}^m(x))|, \quad x \in H_\sigma, j = 1, \dots, k$$

に $\log(1 - \epsilon)$ を加えた値に等しい.

$\sigma$ を巡回置換表示したとき、巡回置換の長さを大きい方から順に並べてできる列を $\sigma$ の型とい  
い、 $[\sigma]$ で表わす.

$\sigma$ の巡回置換表示の型が

$$[\sigma] = [m_1 m_2 \cdots m_k]$$

のように表わされている場合、 $H_\sigma$ を $H_{m_1 m_2 \cdots m_k}$ と書くことにする.

ここで、小室の研究結果に従って、カオスの遷歴が起こるように1次元写像のパラメータの値を  
 $a=1.9$ とする.

小室の結果を以下に記す.

### $a = 1.9$ での $H_{322111}$ 上の10GCM

10GCM の  $H_{322111}$  への制限は、加重 [322111] を持つ 6 GCM として次の式で与えられる.

$$y_i = (1 - \epsilon)g(x_i) + \epsilon \sum_{j=1}^{10} c_j g(x_j) \quad (1 \leq i \leq 6)$$

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = \frac{1}{10}(3, 2, 2, 1, 1, 1)$$

このとき、次の結果が成り立つ.

- (1)  $\epsilon = 0.187$  のとき、 $H_{322111}$  上にアトラクタ  $\Lambda_1$  が存在し、補空間方向に安定である.
  - (2)  $\epsilon = 0.1867$  のとき、 $\Lambda_1$  はクライシスを起こし、 $\Lambda_1$  の内部を動いていた軌道は、 $\Lambda_1$  外の領域  $\Lambda_2$  に出られるようになる.
- さらに、軌道が  $\Lambda_1$  内にいるときは、補空間方向に安定であるが、 $\Lambda_1$  外に出たときは、補空間方向に不安定となる.
- (3)  $\epsilon$  がクライシス分岐点から離れるに従い、 $H_{322111}$  上にアトラクタ  $\Lambda_1$  の痕跡はなくなり、 $\Lambda_2$  は一様に補空間方向に不安定となる.

### 3. 主張

小室の結果をもとに、詳しく考察した結果を以下に記す. 特に、10GCM に対して、6次元部分空間  $H_{322111}$  上に力学系に注目する.

#### 主張

- (1)  $\epsilon = 0.187$  のとき、4次元不変部分空間  $H_{3322}$  上に 33 の置換と 22 の置換について対称なアトラクタ  $\Lambda_i (1 \leq i \leq 4)$  が存在する. このアトラクタは補空間方向に安定である. (補空間方向の 4 つの Lyapunov 指数のうち 1 個は 0 に近い負の値となる.)
- (2)  $\epsilon = 0.1867$  のとき、アトラクタ  $\Lambda_i (1 \leq i \leq 4)$  はクライシスを起こし、それぞれのアトラクタの内の軌道は、4 つのアトラクタを含むある領域  $\Lambda$  に出られるようになる. (アトラクタの構造の対称性から、同期している要素の組替えが起きている.)
- (3)  $\Lambda$  内の軌道が  $\Lambda_i$  を出て  $\Lambda_j$  に入る過程で、2次元部分空間  $H_{55}$  に近づく.

### 4. 実験結果

まず  $\epsilon = 0.187$  とした時の結果を図 1~図 3 に示した.

図 1 は  $\epsilon = 0.187$  のとき  $H_{3322}$  上の軌道を  $H_{55}$  上に射影したもので、これは  $H_{322111}$  上からとった初期値に対して  $x_4, x_5, x_6$  が結合した例である. 初期値を  $H_{322111}$  上からランダムに取って、30000 から 40000 までの時間における軌道をプロットした. この場合、 $H_{55}$  は  $x_1$  と  $x_2, x_3$  と  $x_4$  がそれぞれ同期した場合と、 $x_1$  と  $x_3, x_2$  と  $x_4$  がそれぞれ同期した場合の 2 種類あるので二通りの射影をした.  $H_{3322}$  上のアトラクタは他にも 3 つ同期したものを組み替えたもの、2 つ同期したものを組み替えたもの、3 つ同期したものと 2 つ同期したものをそれぞれ組み替えたものが存在する.

図2は $\epsilon = 0.187$ のとき  $H_{3322}$  上の軌道に対して、すべての要素を1つに重ねてプロットしたもので、各要素  $x_i$  はそれぞれ4つの領域を循環している。

図3は $\epsilon = 0.187$ のときのアトラクタの軌道に対する横断リアプノフ指数である。ただし、この場合は300回ごとの移動平均を取っている。0付近の値をとっているのが3つが同期している  $x_1$  に対する横断リアプノフ指数で、もう一方の3つの同期している  $x_4$  に対する横断リアプノフ指数は負の値を取る。

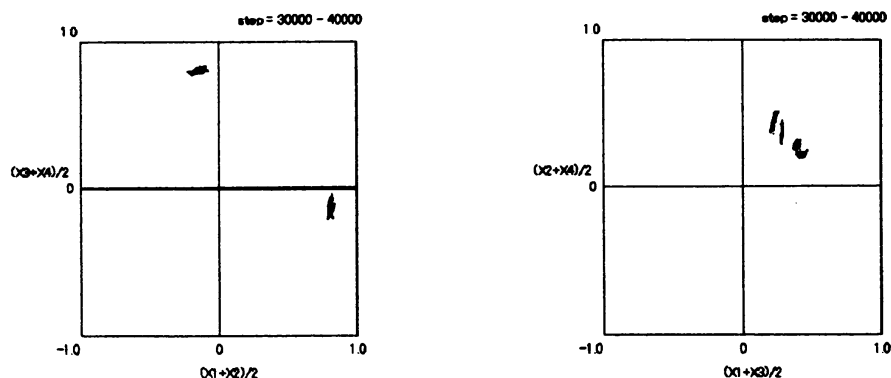


図1:  $H_{3322}$  上のアトラクタの  $H_{55}$  への射影

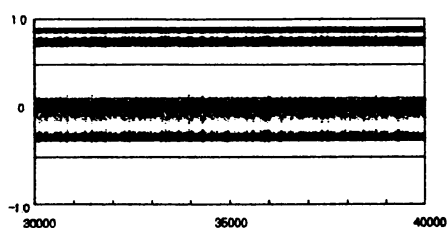


図2:  $H_{3322}$  上のアトラクタの軌道

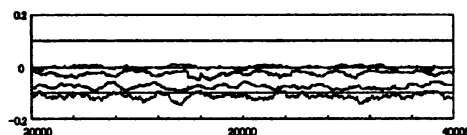


図3: 横断リアプノフ指数

次に  $\epsilon = 0.1867$  の時の結果を図4以降に示した。

図4は $\epsilon = 0.1867$ のとき  $H_{3322}$  上のアトラクタ内部から取った初期値に対して、軌道を  $H_{55}$  上に射影したものである。軌道が疑似アトラクタの外部に出ているのが観測出来る。

図5は $\epsilon = 0.1867$ のとき  $H_{3322}$  上のアトラクタ上の初期値に対してすべての要素を1つに重ねてプロットしたもので、軌道が疑似アトラクタの外部に出たときに4つの領域を循環していた各要素の規則性が壊れているのが分かる。

図6は $\epsilon = 0.1867$ のときのアトラクタ上の初期値に対する横断リアプノフ指数である。ただし、この場合は100回ごとの移動平均を取っている。軌道がアトラクタの外の領域に出たとき移動平均の値は急激に増加して正の値になっている。

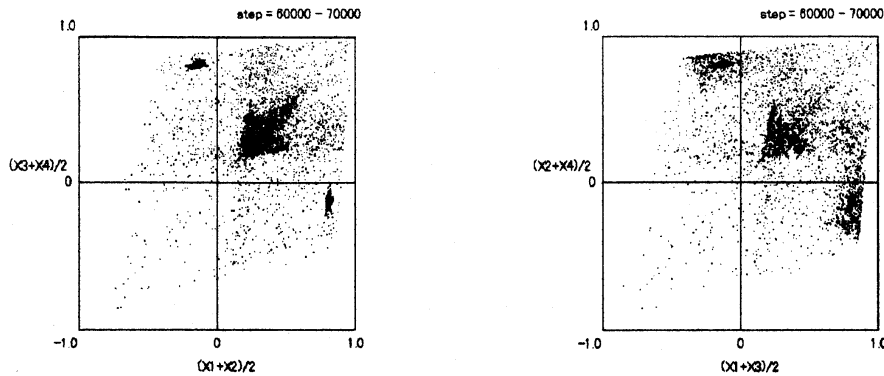


図 4:  $H_{3322}$  上の軌道の  $H_{55}$  への射影

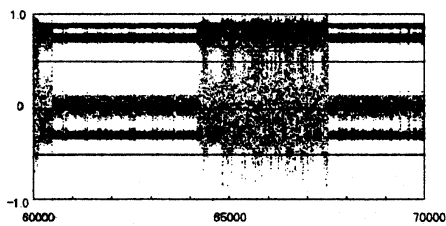


図 5:  $H_{3322}$  上の軌道

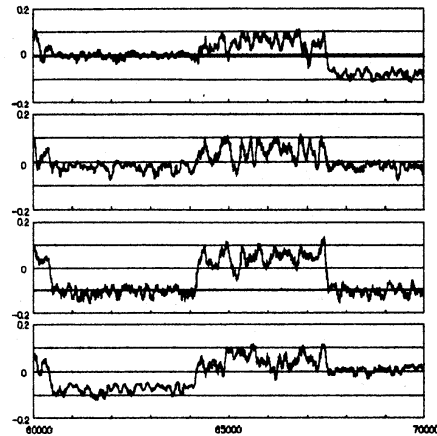


図 6: 横断リアプノフ指数

$\epsilon = 0.1867$  のとき、 $H_{3322}$  上の疑似アトラクタから外に出た軌道の  $H_{55}$  への近づく頻度を図 7 に示した。上の図は 3 つ同期している要素と 2 つ同期している要素の差を取ることで、5 つの結合具合を調べている。  $|x_1 - x_3| \geq |x_2 - x_4|$  なら  $x_1 - x_3$  を黒で、  $|x_1 - x_3| < |x_2 - x_4|$  なら  $x_2 - x_4$  を灰色で色分けした。縦軸の値が 0 に近い場合は軌道は同期平面  $H_{55}$  の近くにある事を意味している。下の図は 20000 から 70000 までの時間において、疑似アトラクタ上から取った初期値に対して、軌道が  $H_{55}$  に近づく頻度を表わしている。軌道が  $H_{55}$  に近づく条件として、  $\max\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\} < 0.05$  ならカウントして  $H_{55}$  に近づく頻度を調べた。図を見ると疑似アトラクタと疑似アトラクタの間でカウントされる数が増加している。つまり、この図から疑似アトラクタから出た軌道がいずれかの疑似アトラクタに入るまでの間に  $H_{55}$  に近づいている事が分かる。

図 8 は疑似アトラクタから出た軌道が  $H_{55}$  に近づいているとき  $H_{55}$  上へ射影したものである。疑似アトラクタの内部から取った初期値に対して、50000 から 100000 までの時間に  $\max\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\} < 0.05$  を満たす場合にプロットした。図を見ると  $H_{55}$  に近づいている時、  $H_{55}$  上のある領域に近づいている事が観測できる。

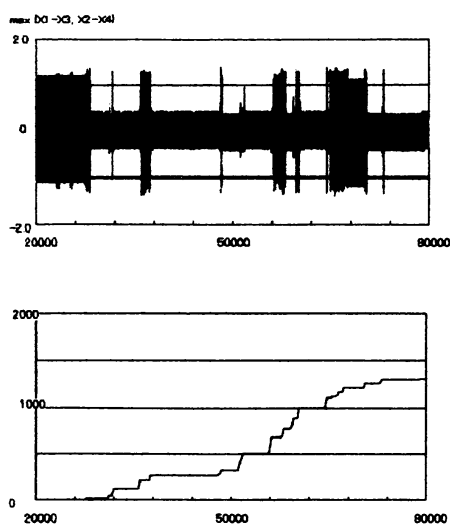


図 7:  $H_{3322}$  上の軌道の  $H_{55}$  へ近づく頻度

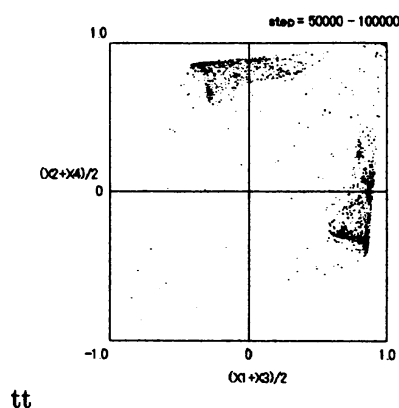


図 8:  $H_{3322}$  上の軌道の  $H_{55}$  への近づき方

次に  $H_{55}$  上の力学系について調べた結果を図 9～図 10 に示した。

図 9 は  $H_{55}$  上の初期値に対して軌道をプロットしたものと、横断リアプノフ指数で 30 回ごとの移動平均をとったものである。  $\epsilon = 0.1867$  ではアトラクタの痕跡のようなものが観測できる。  $\epsilon$  の値を変化させていき、  $\epsilon = 0.2$  の時にはアトラクタが観測できる。 さらに  $\epsilon = 0.1867$  の時は横断リアプノフ指数は正の値を取るが、  $\epsilon = 0.2$  の時に横断リアプノフ指数が 0 に近い負の値で、10000 回での横断リアプノフ指数を計算したところ  $\epsilon = 0.1867$  のときは、  $\lambda_1 = 0.0613745608295618$ ,  $\lambda_2 = 0.0632683647589731$  で、  $\epsilon = 0.2$  のときは  $\lambda_1 = -0.00600839449509113$ ,  $\lambda_2 = -0.00519724778969641$  であった。  $H_{3322}$  上の疑似アトラクタから出た軌道は  $H_{55}$  上のアトラクタの痕跡に引きこまれるが、やがてアトラクタの痕跡の外に出で補空間方向への不安定性から  $H_{55}$  から離れる。

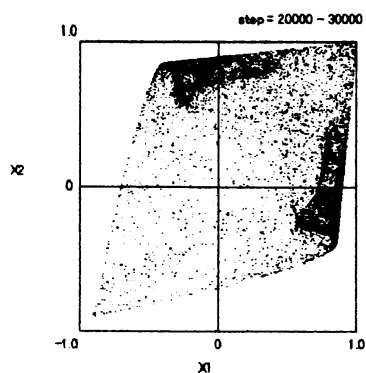


図 9-1:  $H_{55}$  上の軌道

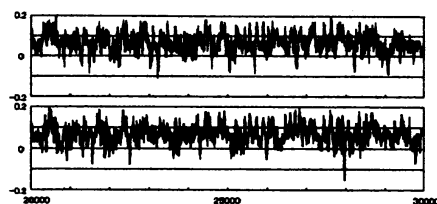


図 9-2: 横断リアプノフ指数

図 9:  $\epsilon = 0.1867$  の時の  $H_{55}$  上の力学系

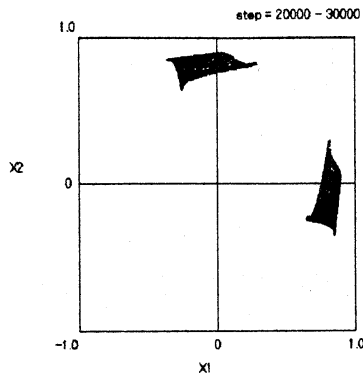


図 10-1 :  $H_{55}$  上の軌道

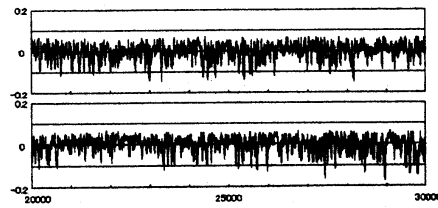


図 10-2 : 横断リアプノフ指数

図 10:  $\epsilon = 0.2$  の時の  $H_{55}$  上の力学系

## 5. 考察

以上の結果から、 $H_{3322}$  上の 4 つのアトラクタは 3 つの同期した要素の組み替えと 2 つの同期した要素の組み替えだから、ランダムノイズを入れた GCM に対して、 $H_{322111}$  での力学系を考えた場合 3 つの同期した要素の組み替えが影響して結合の弱い（横断リアプノフ指数が 0 に近い値をとる）方の要素の 3 つの結合が壊れてしまうのではないかと推測できる。

また、 $H_{3322}$  上で力学系を考えた場合、 $H_{55}$  上のアトラクタの痕跡に近づいた軌道が  $H_{55}$  の力学系に影響されて 5 つの結合が壊れてしまうと考えられる。

つまり、 $H_{322111}$  上の力学系は、 $H_{3322}$  上での力学系に影響され、 $H_{3322}$  上での力学系は  $H_{55}$  上の力学系に影響されてカオスの遍歴が起きているのではないかと推測できる。

よって、カオスの遍歴が起きる現象は階層的になっていると推測できる。

## 参考文献

- [1] K.Kaneko, Clustering, cording, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements, Physica D 41 (1990) 137-172
- [2] 金子邦彦、津田一郎、「複雑系のカオスのシナリオ」複雑系双書 1、朝倉書店、1996
- [3] 小室元政、高次元力学系の解剖—大域結合写像のカオスの遍歴をめぐって—、臨時別冊・数理科学「カオス研究の最前線—非線型科学の世紀へ向けて—」、サイエンス社、1999、28-36