数理解析研究所講究録 1244 巻 2002 年 91-94

ODEの確率的切換えによって生ずるフラクタルな解集合と一般化次元

北大大学院工学研究科　量子物理工学専攻　郷原一寿 (Kazutoshi Gohara)
Department of Applied Physics,Hokkaido University,
Sapporo 060-8628, Japan
E-mail: gohara@nd-ap.eng.hokudai.ac.jp

1　問題設定

外界と相互作用するシステムを連続力学系（ODE：常微分方程式）の確率的切換えとしてモデル化することを考える。以下の非自励力学系について考察する。

$$\dot{x} = f(x, I(t)), \tag{1}$$

$$x, I \in R^n.$$

ここで、 x, f, I,t は状態、ベクトル場、外部入力、時間をそれぞれ表すものとする。この式は, 状態 x の時間発展が, 他のシステムから入力 I によって影響を受けることを表現している。

2　切換え入力に対するダイナミクス

2.1　周期入力

周期入力 $I(t) = I(t+T)$ に対しては、角度変数 $\theta \equiv \frac{2\pi}{T}t$ を導入することにより、以下の連続力学系が定義できる。

$$\dot{y} = f_I(y), \tag{2}$$

$$y \equiv (x, \theta) \in R^n \times S^1 : \mathcal{M}.$$

また、$\theta = 2\pi$ でポアンカレ断面 Σ を導入することにより、以下の離散力学系が定義できる。

$$x_{\tau+1} = g_I(x_\tau), \tag{3}$$

$$x_\tau \in R^n : \Sigma.$$

周期入力 I、ベクトル場 f_I、写像 g_I の対応関係を強調するために模式的に以下のように書くことにする。

$$I \to f_I \to g_I. \tag{4}$$

2.2 切換え入力

次に、複数の入力が確率的に切換えられるダイナミクスを考察する. 入力は周期関数の一周期分と定義する。 例えば、周期関数をフーリエ級数で表せば、振幅 $A \in R^m$ と時間長 $T \in R^1$ をパラメータとして、有限時間幅で時間的に変化する入力を、入力空間

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(A, T) \tag{5}$$

の一点として、一般的に表すことができる。この空間で N 個の要素からなる入力集合 $\{I_i = I_i(A_i, T_i)\}_{i=1}^N$ を定義する。以下、集合の添え字は省略する。周期入力の場合と同様に、入力の集合 $\{I_i\}$ に対して、以下のようにベクトル場の集合 $\{f_i\}$、写像の集合 $\{g_i\}$ を対応させる。

$$\{I_i\} \rightarrow \{f_i\} \rightarrow \{g_i\}. \tag{6}$$

ここで、写像の集合は Barnsley によって IFS と名付けられており、全ての写像 g_i が縮小写像で、それらを等確率で切り換えた場合には、以下の式を満たす、吸引的で唯一の不変集合 C に収束することが証明されている [1]。

$$C = \bigcup_{i=1}^{N} g_i(C). \tag{7}$$

従って、入力が等確率で切換わる場合には、方程式 (1) の解は円筒空間 $\mathcal{M}$ で、Σ 上の不変集合 C を初期状態集合とする、以下の不変軌道集合 $\Gamma(C)$ となる [2]。

$$\Gamma(C) = \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i(C). \tag{8}$$

ここで、$\gamma_i(C)$ は入力 I_i に対する初期状態集合 C から出発する軌道集合である。さらに g_i が縮小写像でない場合にも式 (7)、(8) が満たされること、入力にノイズが重畳した場合のフラクタルな階層構造に対する効果、不変集合 C および $\Gamma(C)$ を包み込む閉包が存在することなどが数値的に示されている [2, 3, 4]。また、式 (7)、(8) を検証するための実験が、リカレントニューラルネットワークモデル [5]、バネの振動 [6]、ＬＣＲ電気回路 [7]、テニスの運動 [8] などの異なる対象について行われており、良い一致を見せている。

2.3 マルチフラクタル

式 (7)、(8) のフラクタル集合を定量化することを考える。g_i が縮小率 s_i で表せる相似縮小（similitude）な縮小写像で、かつ開集合条件 (open set condition) を満たし、切換え確率が p_i であるとき、

$$\sum_{i=1}^{N} s_i^{-\tau(q)} p_i^q = 1, \tag{9}$$

$$q \in R,$$

が成立する。ここで、

$$\tau(q) = (q-1) D_q, \tag{10}$$

であり、D_qは一般化次元である。また、ルジャンドル変換によってマルチフラクタルスペクトルが求まる [9, 10]。

問題の出発点はODEなので、縮小率 s_i を (1) 式から求めることを考える。例えば、f_i が線形ならば g_i も線形となり、独立な線形空間での g_i の縮小率は f_i の固有値で表され、それによって、式 (9) を書き換えることが可能である。ここでは、f_i が非線形でも適用可能な表式を導出したい。円筒空間 $\mathcal{M}$ とポアンカレ断面 Σ の体積変化率が等しいことおよび、Liuvilleの定理より、

$$J(g_i) = \mathrm{e}^{\int_0^{T_i} div f_i dt}, \tag{11}$$

が得られる。$J(g_i) \equiv J_i$ は写像 g_i のヤコビアンである。この式は g_i が未知でも、f_i のみによって、g_i のヤコビアンが求められることを意味している。ここで、等方的な縮小性を仮定してみる。即ち、

$$s_i = J_i^{\frac{1}{n}}, \tag{12}$$

である。この仮定が成立する場合には、式 (9) は、以下のようになる。

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{\tau(q)}{n}\int_0^{T_i} div f_i dt} p_i^q = 1 \quad . \tag{13}$$

この式は、ODE の確率的切り換えによって構成されるフラクタルな解集合のマルチフラクタル表現を与えている。

ベクトル場 f_i に条件を付加することで、この式はさらに考察できるが、ここでは例として以下の場合を考えて見る。

$$div f_i = \lambda = const. < 0, T_i = T = const., \forall i. \tag{14}$$

この条件では、

$$D_q = \frac{n}{q-1}\frac{\ln \sum_{i=1}^{N} p_i^q}{\lambda T}, \tag{15}$$

となり、一般化次元が陽に表現できる。$\lambda T \to 0$ の場合には、開集合条件を満たさず、成立しないが、カオスを持つ Duffing 方程式を確率的に切換えた場合に生じるフラクタル集合についても、良く近似していることが分かってきている [11]。この式には外部入力の振幅パラメータ A_i が入っていない。このことは、D_q（または、マルチフラクタルスペクトル）が時間長と切換え確率以外は外部入力の詳細に依らないことを示しており、興味深い。この特徴は、条件 (14) 以外のより一般的な条件でも成り立つ。

3　力学系集合

ODE の確率的切換えは、もともと著者が脳機能を知るために考えた抽象的な数学モデルであるが、古典系と量子系の相互作用系、ブロッホ方程式の外部磁場による励起なども同様な枠組みに対応していることが分かってきた。また、制御工学では離散時間と連続時間の混合システムはハイブリッドダイナミカルシステムと呼ばれ、研究が活発化してきて

いるが [12]、現在その理論的枠組みを模索している段階にあり、本研究は一つの重要な視点を与えていると考える。

最後に、複雑系研究と力学系集合について簡単に記す。IFS によって構成される不変集合およびそのマルチフラクタル表現については、既に詳細な研究が進められている [10]。これらは離散力学系集合に対する研究であるといえる。一方、連続力学系集合についてはこれまで殆ど研究がない。離散および連続力学系集合として、現象を整理して行くことは、現在複雑系で対象になっている、または今後なり得る多体系全般を研究して行くための新しい重要な切り口であると考える。ここでは力学系集合を用いて部分系の解析をしたが、これを拡張して、部分から全体を構成する方法を力学系として確立することが今後の大きな課題である。

参考文献

[1] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston (1988).

[2] K.Gohara and A.Okuyama, *Fractals* **7**, 205 (1999).

[3] K.Gohara and A.Okuyama, *Fractals* **7**, 313 (1999).

[4] R.Wada and K.Gohara, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **11**, 755 (2001).

[5] S.Sato and K.Gohara, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **11**, 421 (2001).

[6] K.Gohara, H.Sakurai, and S.Sato, *Fractals* **8**, 67 (2000).

[7] J.Nishikawa and K.Gohara, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, in press.

[8] Y.Yamamoto and K.Gohara, *Human Movement Science* **19**, 341 (2000).

[9] T.C. Halsey et al., *Phys. Rev. A.* **33**,1141, 1986.

[10] K. J. Falconer, *Technique in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons (1997).

[11] K.Gohara and J.Nishikawa, submitted.

[12] A.S. Matvee and A.V. Savkin, *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems*, Birkhauser, Boston, 2000.