

# リドルドベイスンの多重フラクタル構造<sup>1</sup>

京大・情報学, 統数研<sup>2</sup> 末谷 大道 (Hiromichi Suetani)  
Graduate School of Informatics, Kyoto Univ.,  
and  
The Institute of Statistical Mathematics

## 1 はじめに

散逸的な力学系では, しばしば複数のアトラクタ<sup>3</sup>が共存する. 与えられた初期値から出発する軌道がどのアトラクタに吸引されるかを予測する問題を考えたとき, 各々のアトラクタのベイスンがどのような幾何学的構造を持っているかということはとても重要である. 特に, 系がカオスのサドル集合を持つ場合には, ベイスン同士が入れ子的に混じりあい, その境界がフラクタルになることが良く知られている [1].

相空間全体より低い次元の不変な部分空間を持ち, その中にカオスアトラクタが閉じ込められている構造を持つ力学系は, 結合カオス系 (同期状態が不変な部分空間に対応) を代表的なものとして様々ある. この様な構造を持つ力学系では多様な振る舞いが見られるが, 本稿の主題であるリドルドベイスンは, その中でも最も興味深い現象の一つとして関心を集めている. 不変部分空間に閉じ込められたカオスアトラクタ  $A$  と共に他のアトラクタ  $A'$  が共存するとき,  $A$  のベイスンの任意の部分領域が  $A'$  のベイスンに侵食され, 相空間内で  $A$  に吸引力的な領域と反発的な領域が任意のスケールで入り混じる現象が生じる. このとき  $A$  のベイスンはリドルドベイスン [2] と呼ばれ, 初期値の僅かな誤差によって軌道がどちらのアトラクタに吸引されるかを予測することは非常に困難になる. リドルドベイスンによって相空間内の流れの様子は非常に複雑になるが, その一方で, 相空間を微小なセルに分割し, 各セル内で2つのベイスンがどのような割合で混ざっているか, ということによって粗視化することによって, リドルドベイスンが多重フラクタル性という簡明な自己相似構造を持ち, その構造は不変な部分空間上に閉じ込められたカオスの持つ自己相似な構造によって形成されることが明らかになってきた [3]. 本稿では, まず数値シミュレーションによってリドルドベイスンが従うスケールリング則について調べ, 次に区分線形写像を導入してリドルドベイスンが多重フラクタル性を持つことを明らかにする. そしてこの多重フラクタル性とカオスアトラクタ  $A$  との間に成立する関係について議論する.

<sup>1</sup>堀田 武彦氏 (東京大学大学院情報理工学研究所) との共同研究に基づく

<sup>2</sup>現在, NTT コミュニケーション科学基礎研究所 (NTT Communication Science Laboratories)

<sup>3</sup>どんな不変集合を「アトラクタ」と呼ぶべきか, については色々な議論がある [4].

## 2 リドルドベイスンとは

まず最初に、例として次の平面上の写像  $S$  を考える [5]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F(x_n) = 4x_n(1-x_n), \\ y_{n+1} &= G(x_n, y_n) = \nu e^{-\alpha(x_n-3/4)^2} y_n + y_n^3, \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\nu, \alpha$  はパラメータである。  $G(x, 0) = 0$  より  $x$  軸は不変な部分空間で、その中の区間  $[0, 1]$  にカオスの集合  $A$  がある。また、 $|y|$  が十分大きいとき  $y_n \sim y_n^3$  なので  $|y| = \infty$  をアトラクタとみなせる ( $A'$  とする)。  $A$  の  $y$  方向に関する安定性は、次式で定義される横断 Liapunov 指数という量によって測られる。

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp}(x) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{j=0}^{n-1} \ln |\partial G(F^j(x), 0) / \partial y| \\ &= \ln \nu - \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{j=0}^{n-1} (F^j(x) - 3/4)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

(不変部分空間に交差する方向を横断方向と呼ぶことにする。) 横断 Liapunov 指数の値は初期値  $x \in [0, 1]$  に依存するが、Lebesgue 測度に関して、ほとんど全ての  $\lambda_{\perp}(x)$  はロジスティック写像の自然な不変測度に関する相平均

$$\langle \lambda_{\perp} \rangle = \ln \nu - \alpha \int_0^1 \frac{(x-3/4)^2}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx, \quad (3)$$

に一致する。(3) が負であるとき  $A$  のベイスン  $B_A \equiv \{(x, y) | \omega(x, y) \subset A\}$ <sup>4</sup> の Lebesgue 測度は正で、 $A$  は Milnor の意味でアトラクタ [6] である。

図 1, 2 は、 $\nu = 1.260, \alpha = 1.5$  ( $\langle \lambda_{\perp} \rangle = -0.05 < 0$ ) のときのベイスンの様子である。白い領域は  $B_A$  を、黒い領域は  $A'$  のベイスン  $B_{A'}$  を表していて、 $A$  に吸引的な領域と反発的な領域が複雑に入り混じっていることがわかる。 $B_A$  に属する任意の点 ( $\equiv$  白い領域に属する点) の任意の近傍には必ず  $B_{A'}$  に属する点 ( $\equiv$  黒い領域に属する点) の集まりが存在し、かつその集まりは正の Lebesgue 測度を持っている。ベイスン  $B_A$  がこのような性質を持つとき、リドルドベイスン (*riddled basin*: “穴だらけ” の吸引領域) [2] という。ここで、リドルドベイスンの発生のメカニズムについて少し説明を加えよう。不変部分空間には、自然な測度に従う典型的なカオス軌道と同時に、不安定周期軌道などの非典型的な軌道も無数に存在し、各々の横断 Liapunov 指数を持っている。 $\langle \lambda_{\perp} \rangle$  が負であれば  $A$  のベイスンは正の体積を持つ [2] が、 $\lambda_{\perp}(x) > 0$  となる軌道が存在するとき、 $A$  の Liapunov 安定性は破られる [7, 4]。 (1) の場合、固定点  $x_* = 3/4$  の横断 Liapunov 指数  $\lambda_{\perp}^{\max} = \ln \nu$  が他の全ての軌道の横断 Liapunov 指数よりも大きく、 $\nu > 1$  で  $\lambda_{\perp}^{\max} > 0$  で、 $A$  は横断方向について Liapunov 不安定になる。このとき、 $(x_*, 0)$  の不安定多様体  $W^u(x_*, 0)$  は  $|y| = \infty$  へと伸びる直線になる。 $|y| \geq 1$  の領域は全て  $B_{A'}$  に属しているの

<sup>4</sup> $\omega(x, y) \equiv \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} S^n(x, y)$

で, 写像  $S$  の連続性から,  $W^u(x_*, 0)$  上の任意の点  $z = (x_*, y)$  の回りに適当な大きさの開近傍を, この中の全ての点が  $B_{A'}$  に属する様にとることができる. これは,  $(x_*, 0)$  の任意の開近傍において  $B_{A'}$  に属する開集合が存在することを意味する. 一方, 不変部分空間上の運動はカオスなので,  $x_*$  の逆像の集まり  $\bigcup_{n \geq 0} S^{-n}(x_*, 0)$  は区間  $[0, 1]$  で稠密である. よって写像の連続性から,  $W^u(x_*, 0)$  とその回りの  $B_{A'}$  に属する開集合の逆像の集まりは  $x$  軸の区間  $[0, 1]$  の任意の点の任意の近傍に存在することになり, その結果  $B_A$  はリドルドベイスンになる [2, 7, 4].

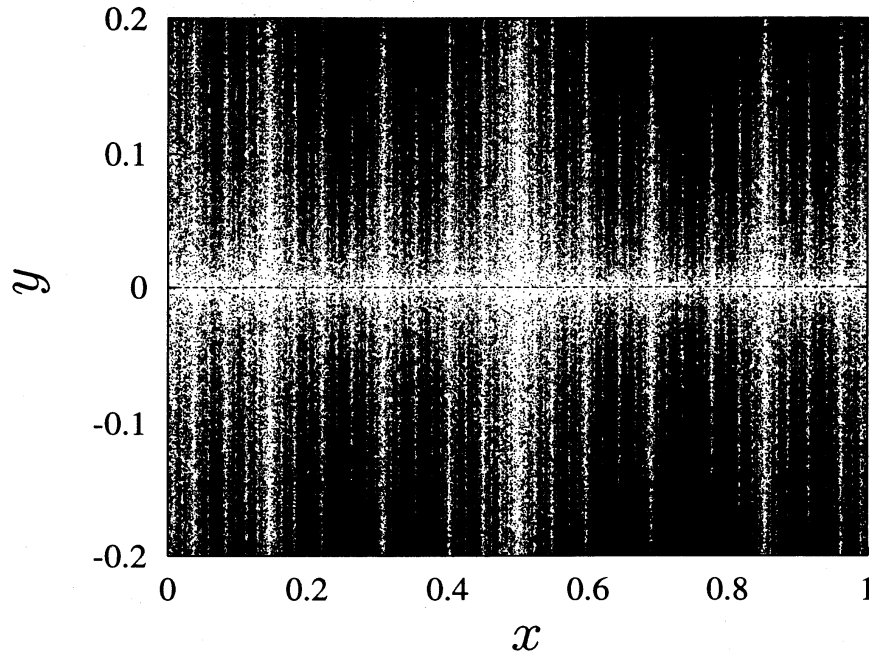


図 1: 写像 (1) のベイスンの様子: 黒い領域は  $|y| = \infty$  のベイスン, 白い領域は  $y = 0$  にあるカオスアトラクタのベイスンを表す.

### 3 多重フラクタルスケーリング

リドルドベイスンは, 図 1 の様な複雑なパターンを示す一方, 以下に述べる簡明な定量的規則性も持っている. リドルドベイスン  $B_A$  の任意の領域は, 無数の黒い領域によって侵食されているが, 図 2 を見ると, 不変部分空間に近付くにつれて黒い領域の割合は小さくなっていく様に見える. 実際  $V_l$  を  $y = l (> 0)$  上の  $B_{A'}$  の割合とすると,  $l \rightarrow 0$  で  $V_l \rightarrow 0$  となることが知られている [2]. 更に, Ott らは  $V_l$  が次のスケーリング性を持つことを示した [8].

$$V_l \sim l^\eta, \quad \eta = \langle \lambda_\perp \rangle / \Gamma, \quad (4)$$

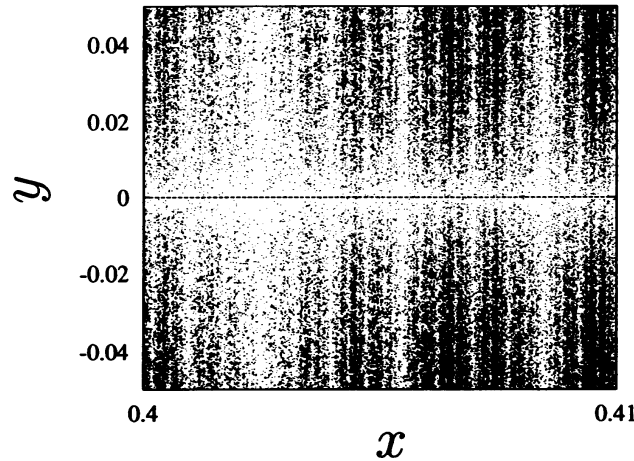


図 2: 図 1 の一部分の拡大図.

ここで,  $\Gamma$  は定数である<sup>5</sup>.

それでは,  $B_A$  に属する各点の近傍での局所的な特性はどうなっているだろうか.  $y = l$  上における点  $x \in B_A$  を中心とする幅  $\epsilon$  の区間の中での  $B_A$  の割合を  $v_l(x; \epsilon)$  とする. 一般に,  $x \in B_A$  で  $B_A$  が Lebesgue 可測なら  $\epsilon \rightarrow 0$  で  $v_l(x; \epsilon) \rightarrow 0$  となるが, 更に,  $v_l(x; \epsilon)$  は  $\epsilon$  に対して次の様なスケーリング則を持つことがわかった (図 3):

$$v_l(x; \epsilon) \sim \epsilon^{\gamma-1}, \gamma \geq 1. \quad (5)$$

(図 3 では縦軸として  $\epsilon \cdot v_l(x; \epsilon)$  をとっている.)

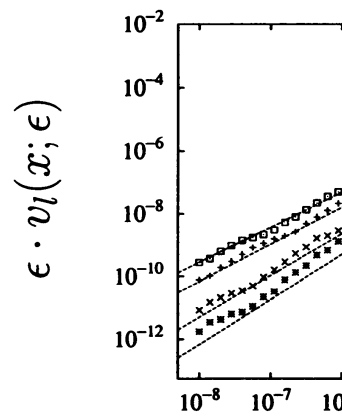


図 3: 局所スケー

$\gamma$  は, リドルドベイスンに属する各点におけるベイスン同士の混ざり<sup>1</sup> 局所的な特徴を表しており,  $(x, l) \in B_A$  から出発する軌道が  $A$  内のどの<sup>2</sup> するかに依存して値が異なる.  $\gamma$  の値が小さければ  $(x, l) \in B_A$  の回り<sup>3</sup> に対する黒い領域の割合の減少の速度は小さく, 逆に  $\gamma$  の値が大きければ大きい, ということになる. この様に, リドルドベイスンは任意の場<sup>4</sup> スンに侵食されているが, その混ざり具合は場所毎に濃淡がある. そこ<sup>5</sup>  $\gamma(x; \epsilon) \equiv \ln v_l(x; \epsilon) / \ln \epsilon$  が区間  $[\gamma, \gamma + d\gamma]$  に入る個数とするとき,

$$N(\gamma) \sim \epsilon^{-f(\gamma)}, \epsilon \rightarrow 0,$$

<sup>5</sup> $\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/2n) \sum_{j=0}^{n-1} (\Lambda_{\perp}(x_j) - \langle \Lambda_{\perp} \rangle)^2$ ,  $\Lambda_{\perp}(x_j) = \ln |\partial G(F^j(x)) / \partial y|$  (ほとん<sup>6</sup> らず  $\Gamma$  は一定)

という仮定をする (多重フラクタルスケーリング則の仮定). もしこの様な  $f(\gamma)$  が存在すれば,  $f(\gamma)$  は局所指数  $\gamma$  を持つ点の集まりのフラクタル次元を表し, リドルドベイスンの微細な構造を, 粗視化によるスケーリングという視点から  $f(\gamma)$  によって定量的に特徴付けられるといえる.

リドルドベイスンを持つ力学系には以下の共通点がある [8].

- 低次元の不変部分空間を持ち, その中に制限された運動はカオスである.
- 不変部分空間の十分近傍にある点では, 横断方向の運動の向きは一定でないが, 平均としては不変部分空間の方向にむいており, 不変部分空間に閉じ込められたカオスは横断方向に関してもアトラクタである.
- 不変部分空間に閉じ込められたカオス以外に別のアトラクタが存在する.

そこで, リドルドベイスンが多重フラクタル性を持つかどうかを調べるために次の  $M \equiv [0, 1] \times [0, 2]$  上の区分離線写像  $T$  を導入する [8]:

$$x_{n+1} = F(x_n) = \begin{cases} \alpha^{-1}x_n & \text{if } x_n < \alpha, \\ \beta^{-1}(x_n - \alpha) & \text{if } x_n \geq \alpha, \end{cases}$$

$$y_{n+1} = G(x_n, y_n) = \begin{cases} 2y_n & \text{if } y_n < 1 \text{ and } x_n < \alpha, \\ 2^{-1}y_n & \text{if } y_n < 1 \text{ and } x_n \geq \alpha, \\ 2^{-1}y_n + 1 & \text{if } y_n \geq 1, \end{cases} \quad (7)$$

ここで,  $0 < \alpha < 1$  はパラメータで,  $\beta = 1 - \alpha$ . (7) に対して, 2つの区間  $A = \{(x, y) | 0 \leq$

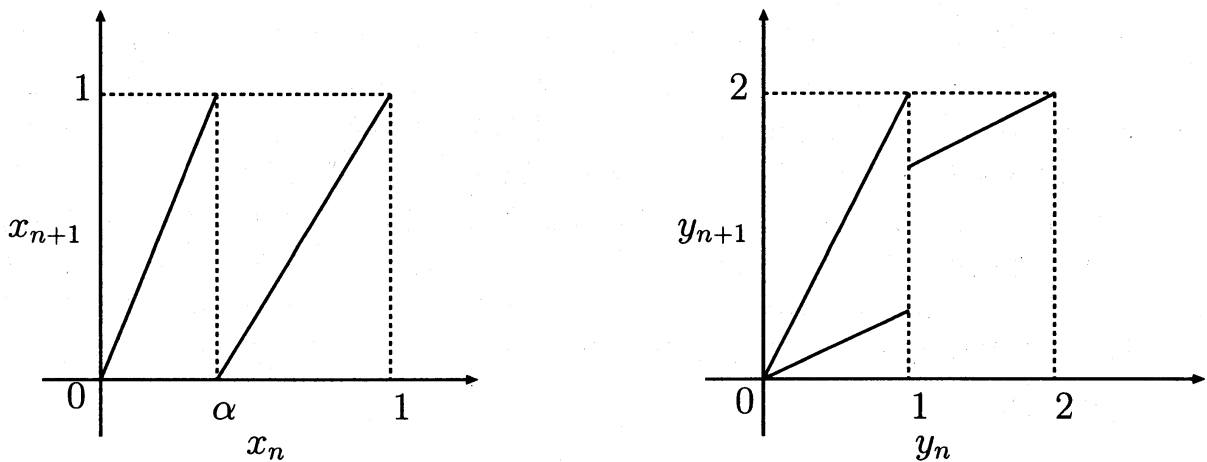


図 4: ランダムウォークモデル (7).

$x \leq 1, y = 0$  及び  $A' = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 2\}$  は共に不変であり, これらの不変部分空間の中に歪 Bernoulli 写像  $F(x)$  で記述されるカオスが閉じ込められている.  $A$  上の典型的な軌道の横断 Liapunov 指数は,  $\langle \lambda_{\perp} \rangle = (2\alpha - 1) \ln 2$  なので,  $\alpha < 1/2$  のとき,

$A, A'$  は共に Milnor の意味でアトラクタになっているが,  $A$  のベイスンはリドルドベイスンである [8]. 写像 (7) のダイナミクスを理解するために,  $\mathcal{M}$  を可算無限個のセル  $R_j^i \subset \mathcal{M}, i = 0, 1, j = 0, 1, 2, \dots$  に,

$$\begin{cases} R_j^0 = [0, \alpha) \times (2^{-j}, 2^{-j+1}], \\ R_j^1 = [\alpha, 1) \times (2^{-j}, 2^{-j+1}], \end{cases} \quad (8)$$

( $\bigcup_{i=0}^1 \bigcup_{j \geq 0} R_j^i = \mathcal{M}$  and  $R_j^i \cap R_{j'}^{i'} = \emptyset$  if  $(i, j) \neq (i', j')$ ) と分割してその記号力学を考える. 写像 (7) を 1 回施すと, 各々のセルは次のように変換される.

$$T(R_j^i) = \begin{cases} R_0^0 \cup R_0^1 & \text{if } j = 0, \\ R_{j+2i-1}^0 \cup R_{j+2i-1}^1 & \text{if } j \neq 0. \end{cases} \quad (9)$$

よって,  $R_j \equiv R_j^0 \cup R_j^1$ , とすると, 写像 (7) の横断方向のダイナミクスに対応する  $\{R_j\}_{j=0}^\infty$  上の記号力学は, 図 5 の様な吸収壁を持つランダムウォークになる.  $R_j$  上

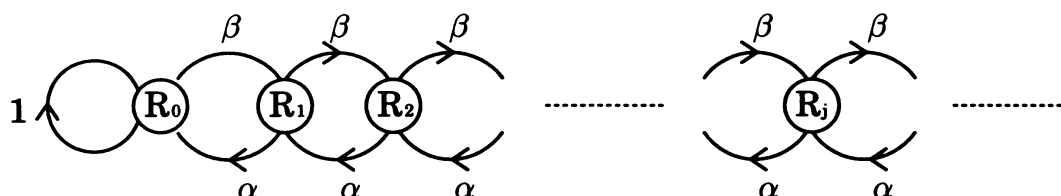


図 5: 写像 (7) に対応する記号力学のグラフ表示 (吸収壁のあるランダムウォーク).

の直線  $I_j = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y \in R_j\}$  上の 1 つの初期値  $(x, y)$  に対して,  $R_j$  を初期状態とする 1 本のランダムウォークのサンプルパスが対応する. もし, このパスが原点に吸収されるならば  $(x, y) \in B_{A'}$ , 逆に  $R_\infty$  へと発散するならば  $(x, y) \in B_A$  となる. よって,  $(x, y) \in B_{A'}$  ならば有限回の操作 (初期値の有限の精度) でこれを判定することができるが, 逆に  $(x, y) \in B_A$  ならば, このことを有限回の操作で判定することは不可能である. この様な複雑さがリドルドベイスンの幾何学構造と深く関わっているのである [9].

図 5 の記号力学を導入することによって, 写像 (7) のリドルドベイスンの幾何学構造を吸収壁を持つランダムウォークの問題として考えることができる. そして, いわゆる gambler's ruin problem [10] から, (7) のリドルドベイスンが実際に多重フラクタル性を持つことがわかり,  $y = l$  上での局所指数  $\gamma$  やスペクトル  $f(\gamma)$  を次の様に求めることができる [3]:

$$\gamma = \frac{\ln \alpha^{r'} \beta^r}{\ln \alpha^r \beta^{r'}} \quad (10)$$

$$f(\gamma) = \begin{cases} \frac{\ln(r^r r'^{r'})}{\ln(\alpha^r \beta^{r'})}, & \text{if } 1 \leq \gamma \leq \gamma_{\max}, \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (11)$$

ここで,  $0 \leq r \leq 1/2, r' = 1 - r, \gamma_{\max} \equiv \ln \alpha / \ln \beta$  である<sup>6)</sup>.  $\gamma$  の値によって分類される点の集まりはリドルドベイスンの, いわば “skeleton” と考えられ, そして  $f(\gamma)$  はその “skeleton” のフラクタル次元を表している. 複雑なパターンを示すリドルドベイスンを, 粗視化によるスケージングという操作を通じて  $f(\gamma)$  という量によって端的に特徴付けることが出来るのである.

今までの議論から, 写像 (7) のリドルドベイスンが多重フラクタル性を持つことがわかったが, では何故リドルドベイスンが多重フラクタル性を持つのか,  $f(\gamma)$  にはいったいどんな意味があるのか, を収束先であるカオスアトラクタの熱力学的な性質との関係を通じて調べてみよう. 先程も述べた様に, ほとんど全ての初期値について横断 Liapunov 指数は  $\langle \lambda_{\perp} \rangle$  に一致するが, これとは異なる値を与える軌道も無数に存在する. 歪 Bernoulli 写像の場合, 軌道が  $[0, \alpha)$  に入るかまたは  $[\alpha, 1)$  に入るかで粗視化すれば, ほとんど全ての軌粗視化した道は確率  $\alpha$  のコイン投げになる.

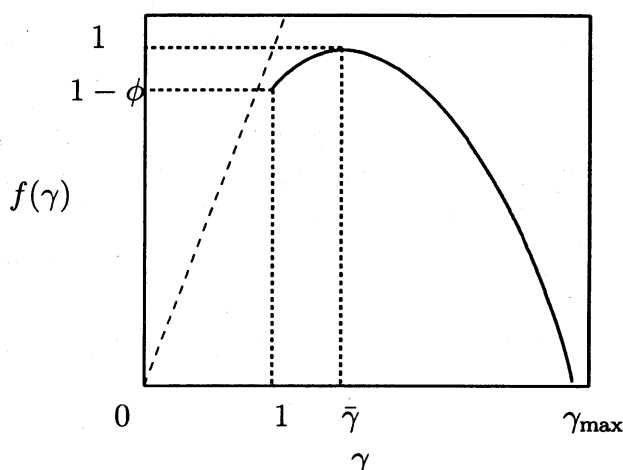


図 6: リドルドベイスンの多重フラクタルスペクトル

しかしながら, それ以外にも確率  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) のコイン投げに対応する軌道も無数に存在している. 確率  $r$  のコイン投げに対応する不変測度を  $\mu_r$  とすると,  $\mu_r$  の累積分布  $M_r(x) = \mu_r([0, x])$  は図 7 の様に描けて,  $\mu_r$  が自己相似的な構造を持っていることがわかる (Lebesgue の特異関数).

実際に, 不変測度  $\mu_r$  の情報次元  $D(r) (\equiv \inf\{D_H(S) | \mu_r(S) = 1\}, D_H(S)$  は  $S$  の Hausdorff 次元) は,

$$D(r) = \frac{r \ln r^{-1} + r' \ln r'^{-1}}{r \ln \alpha^{-1} + r' \ln \beta^{-1}} = h(r) / \lambda_{\parallel}(r), \quad (12)$$

となる. ここで,  $h(r)$  は, 測度  $\mu_r$  のエントロピー,  $\lambda_{\parallel}(r)$  は, 測度  $\mu_r$  で測った歪 Bernoulli 写像の Liapunov 指数 ( $A$  の  $x$  軸方向の Liapunov 指数) である.

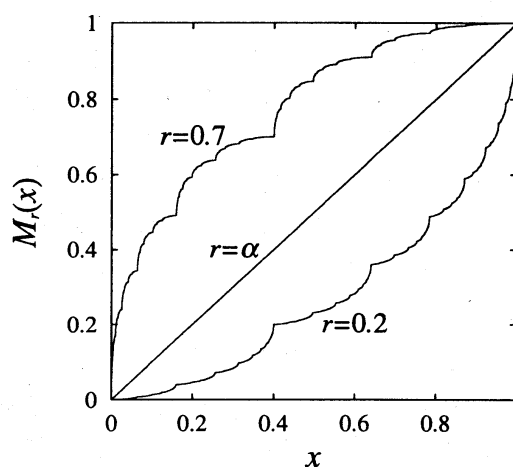


図 7:  $\alpha = 0.4$  のときの累積分布  $M_r(x)$ .

<sup>6)</sup>  $\phi$  の値に依存しない.

さて、 $\eta = \ln(\beta/\alpha)/\ln 2$ として、(10)は次のように書き直される：

$$\gamma(r) = 1 - \eta \frac{\lambda_{\perp}(r)}{\lambda_{\parallel}(r)} \quad (13)$$

ここで、 $\lambda_{\perp}(r) = r \ln 2 + r' \ln 2^{-1}$ ,  $0 \leq r \leq 1/2$ は、不変測度  $\mu_r$  で測った横断 Liapunov 指数であり、また、 $\eta$ は式(4)のものと同じである。 $\gamma, \eta$ はリドルドベイスンの特徴を表す量、 $\lambda_{\parallel}(r), \lambda_{\perp}(r)$ はカオスアトラクタ  $A$ の統計量であり、リドルドベイスンとカオスアトラクタとの定量的な関係を表している。それでは、リドルドベイスンの多重フラクタル性を定量的に表す  $f(\gamma)$ は、カオスアトラクタ  $A$ とどの様な関係があるのだろうか。式(13)によって局所指数  $\gamma$ と関係付けられる  $A$ 内のある不変集合のフラクタル次元を

$$D(\gamma) \equiv \max_{\gamma(r)=\gamma} D(\mu_r) \quad (14)$$

とする ( $\max$ をとるのは、(13)が多対一の場合を考えてのこと)。すると、

$$f(\gamma) = D(\gamma) \quad (15)$$

と、 $f(\gamma)$ と  $D(\gamma)$ が一致することがわかる。言い換えれば、リドルドベイスンの多重フラクタル構造 ( $f(\gamma)$ で測られる)は、式(13)によって結ばれるカオスアトラクタ内の不変集合の自己相似な入れ子構造 ( $D(\gamma)$ によって測られる)によって形成される、ということができる [3]。

## 4 まとめ

本稿では、リドルドベイスンの持つスケーリング構造について簡単な写像モデルを用いて得られる事柄について述べてきた。リドルドベイスンを持つモデルは、少数自由度力学系でも数理生態モデル [11], Newton 法を力学系とみなしたモデル [12], 時系列の学習問題 [13] など色々なものがあり、リドルドベイスンについて今回述べた様な視点で理解することは、これらの力学系で記述できる現象を制御したり、予測したりする上で重要であると考えられる。リドルドベイスンは、 $A$ と共存する不安定周期軌道などの不変集合内において不安定性の自由度が変化することによって形成される。この様な非双曲性のメカニズムは、*unstable dimension variability* [14] と呼ばれ、GCMにおける部分秩序相やカオスの遍歴などの高次元力学系における様々な複雑な振る舞いを理解する上で重要であると思われる。リドルドベイスンの性質に関する本稿で述べた結論は、(7)という特殊なモデルで得られたものであり、その一般性が問題になる。不変部分空間近傍での横断方向の運動に対して不変部分空間内のカオスが乗法ノイズの様に作用するとき、リドルドベイスンとカオスアトラクタの定量的な性質を結びつける重要な関係式 (13)が成立すると考えられる [3]が、結論である式 (15)を確かめるには、色々なモデルに対する数値実験による検証が必要であるだろう。



## 参考文献

- [1] W. C. McDonald, C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, *Physica D* **17**, 125 (1985).
- [2] J.C. Alexander, J.A. Yorke, Z. You and I. Kan, *Int. J. of Bifur. and Chaos* **2**, 795 (1992).
- [3] H. Suetani and T. Horita, *Chaos* **11**, 795 (2001).
- [4] J. Buescu, *Exotic Attractors; From Liapunov Stability to Riddled Basins* (Birkhäuser, 1997).
- [5] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke and S.C. Venkataramani, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 55 (1996).
- [6] J. Milnor, *Comm. Math. Phys.* **99**, 177 (1985).
- [7] P. Ashwin, J. Buescu and I. Stewart, *Phys. Lett. A* **193**, 126 (1994); *Nonlinearity* **9**, 703 (1996).
- [8] E. Ott, J.C. Alexander, I. Kan, J.C. Sommerer and J.A. Yorke, *Physica D* **76**, 384 (1994).
- [9] A. Saito and K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.* **99**, 885 (1998).
- [10] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol . 1 (John Wiley & Sons, 1957).
- [11] B. Cazelles, *Phys. Rev. E* **64**, 032901 (2001).
- [12] L. Billings and J.H. Curry, *Chaos* **6**, 108 (1996).
- [13] H. Nakajima and Y. Ueda, *Physica D* **99**, 35 (1996).
- [14] E.J. Kostelish, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, *Physica D* **109**, 81 (1997).