

カオス場における間欠性と対称性 - 等方 2 次元反応拡散系を用いた解析 -

京大院情報 本河 知明 (Tomoaki Honkawa)

藤坂 博一 (Hirokazu Fujisaka)

宮崎 修次 (Syuji Miyazaki)

Graduate School of Informatics, Kyoto Univ.

概要

モードが縮退しているような対称性(等方性)を持つ 2 次元空間において, 一様カオス場が不安定化する際, どのような現象が観測されるかについて調べた. 一様カオス場が不安定化した直後, その系の不変多様体近傍間を飛び移る現象が現れると予想していたが, 数値実験の結果, その予想に反して対称性が破れており, 1 次元的な振る舞いをすることが分かった. またその破れた対称性は, 熱雑音下, またはシステムサイズを大きくしていくことで回復し, その際, 不変多様体近傍間を間欠的に飛び移る現象が観測された.

1 序論

振動子を複数個結合させた結合振動子系は, 単体の振動子では見られない多様な振る舞いを示すことが知られている. この結合振動子系で現れる現象の一つに, 同期・非同期転移がある. このような現象は, 振動子を多数結合させた系, 例えば, 空間自由度を持つ系でも観測されることが, スピン波不安定の実験などで知られている [1].

本研究では, モードが縮退しているような対称性(等方性)を持つ 2 次元空間において, 一様カオス場が不安定化する際, どのような現象が観測されるかについて調べた.

今回我々が扱ったのは, 等方 2 次元反応拡散系である.

$$\dot{X}(r, t) = F(X, t) + \hat{D}\nabla^2 X \quad (1)$$

この系は特解として $\hat{D}\nabla^2 X = 0$ となる一様解(同期解)を持ち, 一様解軌道が $t \rightarrow \infty$ で占める不変多様体 M が存在する. 2 次元系の場合はこの他にも, $\hat{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2} X \neq 0, \hat{D}\frac{\partial^2}{\partial y^2} X = 0$ を満たす特解が占める不変多様体 V_x と, その逆で $\hat{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2} X = 0, \hat{D}\frac{\partial^2}{\partial y^2} X \neq 0$ を満たす特解が占める不変多様体 V_y の二つの不変多様体が存在する.

さて, この系に x 方向にも y 方向にも非一様な微小摂動を加えたとき, 系の安定性はどうかであろうか? 系のコントロールパラメータを変化させていくと, 一様状態から非一様状態への転移が起こる. つまり, 不変多様体 M が不安定化する転移点が存在する. 我々の興味は, この転移点において V_x や V_y も同時に不安定化するかどうかである. もし同時に不安定化するのであれば, x 方向のモードと y 方向のモードが共に不安定化し, V_x, V_y 近傍間を交互に飛び移る(パターンの向きが x 方向と y 方向とで交互に変化する

る)ような現象が観測されることが予想される。もしこのように不安定モードが縮退して存在するならば、縮退のない1次元系とは異なる振舞を示すはずである。

そこでまず、2章で空間的一様な同期カオス場の線形安定性について説明し、次に3章で、一様カオス場が不安定化した直後、モードが縮退している2次元系ではどのような振舞をするのか、1次元系との比較を行う。

2 空間的一様な同期カオス場の線形安定性

空間自由度を持つカオス場の例として、振幅 a 、周波数 Ω の一様な周期外場を加えた、反応拡散系を考える。

$$\begin{cases} \dot{X}(\mathbf{r}, t) = F(X, Y) + a \cos \Omega t + D \nabla^2 X, \\ \dot{Y}(\mathbf{r}, t) = G(X, Y) + D \nabla^2 Y \end{cases} \quad (2)$$

X, Y は反応物質の濃度場を表し、 F および G は空間的に一様に起こる反応項である。 D は正の拡散係数であり、反応物質に依らず、また方向にも依らない等方なものとする¹。

この系は周期的境界条件の下で、

$$\begin{cases} \dot{X}^0(\mathbf{r}, t) = F(X^0, Y^0) + a \cos \Omega t, \\ \dot{Y}^0(\mathbf{r}, t) = G(X^0, Y^0) \end{cases} \quad (3)$$

を満たす、空間的に一様な特解 $X^0(t), Y^0(t)$ を持つ。この一様解の最大リアプノフ指数 λ_0 は正とし、一様解はカオス的に振る舞っているものとする。

この一様解に非一様な微小摂動 $\tilde{X}(\mathbf{r}, t), \tilde{Y}(\mathbf{r}, t)$ を加え、この摂動に対する線形安定性を考える。 $X(\mathbf{r}, t) = X^0(t) + \tilde{X}(\mathbf{r}, t)$, $Y(\mathbf{r}, t) = Y^0(t) + \tilde{Y}(\mathbf{r}, t)$ を式(2)に代入しフーリエ変換を行なうと、 $\tilde{X}(\mathbf{r}, t), \tilde{Y}(\mathbf{r}, t)$ のフーリエ係数は、

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{X}}_{\mathbf{k}}(t) \\ \dot{\tilde{Y}}_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_X(t) - D|\mathbf{k}|^2 & F_Y(t) \\ G_X(t) & G_Y(t) - D|\mathbf{k}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_{\mathbf{r}}(t) \\ \tilde{Y}_{\mathbf{r}}(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

に従う。但し、 $F_X(t) = \partial F(X, Y) / \partial X|_{X=X^0(t), Y=Y^0(t)}$ を表し、他の記述もこれと同様である。

さて、波数 \mathbf{k} のモードの時間発展の漸近形は、

$$\tilde{X}_{\mathbf{k}}(t), \tilde{Y}_{\mathbf{k}}(t) \propto \exp[\Lambda_{\mathbf{k}}(t)t] \quad (5)$$

のように表すことができる。 $\Lambda_{\mathbf{k}}(t)$ は \mathbf{k} モードの局所拡大率で、これを長時間平均した、

$$\lambda_{\mathbf{k}} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda_{\mathbf{k}}(s) ds = \lambda_0 - Dk^2 \quad (6)$$

¹一般的には拡散係数は反応物質に依存し、また異方性のあるような系も存在するが、ここでは解析を簡単にするため、そういう依存性は持たせていない。パターン形成などの研究の際は、依存性を持たせるのが普通である。

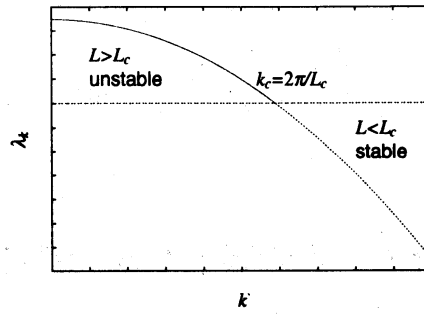


図 1: k モードリアブノフ指数

を k モードリアブノフ指数と言う。この量の正負によって、 k モードの微小な揺らぎに対する一様解の線形安定性を判断することができる。つまり、この量が負ならそのモードは安定であり、正なら不安定である。

いま一様解のリアブノフ指数 λ_0 が正である場合を考えているので、 $k = 0$ 以外にも、ある波数領域のモードが不安定化する。 $\lambda_{k_c} = 0$ となる臨界波数 k_c が存在し、

$$k_c = \sqrt{\frac{\lambda_0}{D}} \quad (7)$$

と求まる。 $k > k_c$ のモードは $\lambda_k < 0$ となり安定であるが、 $k < k_c$ のモードは $\lambda_k > 0$ なので不安定化し、その波数に対応したサイズの空間構造が出現する。言い換えると、システムサイズ L を大きくしていくと、空間的一様解が安定から不安定へ転移する臨界システムサイズ

$$L_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{\lambda_0}} \quad (8)$$

が存在する。このことを示したのが図 1 である。 $L < L_c$ では不安定モードは $k = 0$ だけであるが、 $L > L_c$ では、 $k = 0$ 以外にも不安定モードが存在し、その波数に対応したサイズの空間構造が現れる。

なお、以下でモードを記述する際は、

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y), \quad n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

のように、 \mathbf{n} を以って表すことにする。また、 k モードリアブノフ指数についても $\lambda_{\mathbf{k}} \equiv \lambda_{(n_x, n_y)}$ のように表すことにする。

以下の章で行なう数値実験では、反応項としてブラッセレータモデル

$$F(X, Y) = A + X^2Y - (B + 1)X, \quad G(X, Y) = BX - X^2Y \quad (10)$$

を使用する [2, 8, 9]。パラメータは、濃度場 $A = 0.4$ 、 $B = 1.2$ 、周期外場の振幅 $a = 0.12$ 、周期外場の振動数 $\Omega = 0.9$ 、拡散係数 $D = 0.1$ と固定する。また、コントロールパラメー

タとしてシステムサイズ L を採用する. このとき最大リアプノフ指数は $\lambda_0 = 0.0347$ となり, これから臨界システムサイズが $L_c = 10.67$ と定まる. 3章および4章では $L \gtrsim L_c$ を考え, $10.68(= 1.001L_c) \leq L \leq 11.21(= 1.05L_c)$ の範囲で計算し, 5章では $L \sim 2L_c$ について計算する.

3 不安定化直後における1次元系と2次元系の比較

前章で行なった一様状態の線形安定性の議論より, 等方2次元反応拡散系における k モードリアプノフ指数 λ_k は

$$\lambda_k = \lambda_0 - D \left[\left(\frac{2\pi n_x}{L} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n_y}{L} \right)^2 \right] \quad (11)$$

となる. つまり, この系が持っている等方性により, 一様解が不安定化する方向が x 方向と y 方向の二つが存在し, 不安定モードは縮退して存在すると予想される. 例えばシステムサイズが $L \gtrsim L_c$ だとすると, $k = 0$ 以外に $(\pm 1, 0)$ モードと $(0, \pm 1)$ モードが不安定化すると予想される. そうであるなら, 不安定化する方向が一方しかない1次元系とは異なる振舞が見られるはずである.

さて, 2次元系の数値実験について, 一様状態から x 方向と y 方向のどちらにどの程度外れているかを見るために以下の時系列を考える.

$$l_x(t) \equiv \sqrt{|\tilde{X}_{(1,0)}(t)|^2 + |\tilde{Y}_{(1,0)}(t)|^2}, \quad (12)$$

$$l_y(t) \equiv \sqrt{|\tilde{X}_{(0,1)}(t)|^2 + |\tilde{Y}_{(0,1)}(t)|^2} \quad (13)$$

また, 直接 $l_x(t), l_y(t)$ の時系列を見る以外に, 次のような物理量

$$\theta(t) = \arctan \frac{l_y(t)}{l_x(t)}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (14)$$

を定義する. x 方向にパターンができて y 方向に一様なときは $\theta(t) = 0$, 逆に y 方向にパターンができて x 方向に一様なときは $\theta(t) = \pi/2$ を示すよう定義しており, この量を見ることで x 方向と y 方向のいずれの方向にパターンができていくかを知ることができる.

図2は $L = 10.70(= 1.0028L_c)$ における時系列である. この結果は予想と異なり, 過渡状態を経た後にどちらか一方の不変多様体に吸引され, 不変多様体 V_x, V_x 近傍間を飛び移るという現象は観測されないことを示している. つまり, 一様状態が不安定化した直後では, 等方性は破れており, 1次元的な振舞しか示さない.

さて, この1次元的な振舞を適当な統計量を用いて確認してみよう. 2次元系では x 方向と y 方向のいずれに軌道が落ち込むか分からないので, 空間的一様状態からのずれを表す変数 $l(t)$ を次のように定義する.

$$l(t) = \sqrt{|l_x(t)|^2 + |l_y(t)|^2}. \quad (15)$$

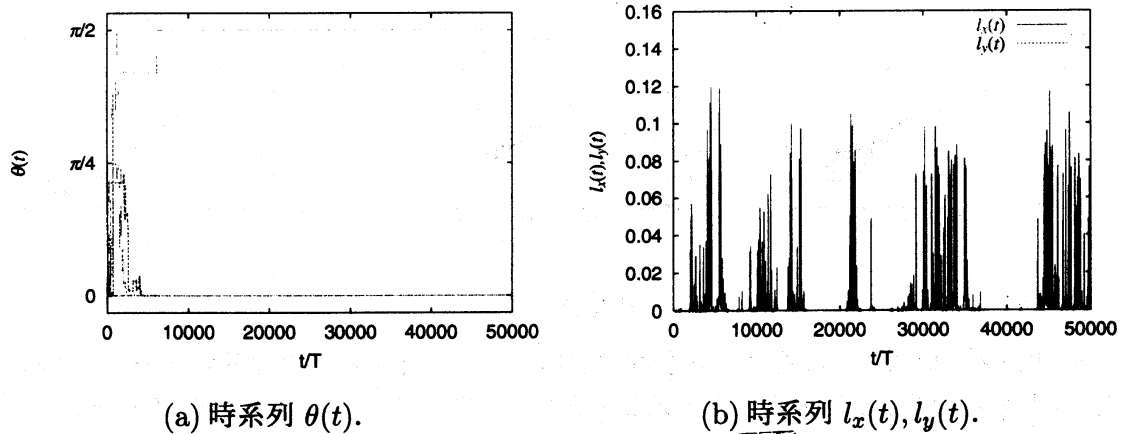


図 2: (a) は V_x 近傍の異なる初期状態から時間発展させた軌道, (b) はそのうちの一つの軌道についてのみ $l_x(t)$ と $l_y(t)$ の時系列をプロットしてある. (b) は過渡状態後, $l_y(t)$ は不安定化せず, $l_x(t)$ のみが間欠的に強く不安定化している. ($L = 10.70$)

また, 1次元系については

$$l(t) = \sqrt{|\tilde{X}_1(t)|^2 + |\tilde{Y}_1(t)|^2} \quad (16)$$

とする.

一般に結合振動子系などにおいて, カオス特解である同期状態が不安定化する際, オンオフ間欠性と呼ばれる現象が観測されることが知られている [3, 4, 5, 6, 7]. この現象は, 少数自由度系だけでなく, 大自由度系においても1次元系については観測されることが報告されている [2]. もし2次元系でも1次元的な振舞をしているのであれば, 1次元系と同じ統計性を示すはずである.

オンオフ間欠性に特徴的な統計則として, (1) バーストの強度 (振幅) l の分布 $P(l)$, (2) ラミナー状態の継続時間 τ の分布 $Q(\tau)$, (3) $l(t)$ のパワースペクトル $I(\omega)$ の三つがよく調べられている. 我々も1次元系と2次元系について, これら統計則の比較を行なった. 図3に示したように, 1次元系と2次元系とで統計則は一致した. これは上でも述べたように, 2次元系においても, 一樣状態が不安定化した直後は1次元的な振舞をしているからである.

本章をまとめると, 一樣解の線形安定性の議論では, 一樣解が不安定化した直後は $(\pm 1, 0)$ モードと $(0, \pm 1)$ モードが同時に不安定化すると思われていたが, 実は等方性が破れており, どちらか一方のモードが不安定化したら, もう一方は不安定化せず, 1次元的なパターンしかできないことが分かった.

では, この破れた対称性はどのようにしたら回復するのであろうか?そこで, 4章ではシステムサイズは本章と同じままにして熱雑音を加えた場合, 5章では熱雑音は加えずに, システムサイズを大きくしていった場合について考えることにする.

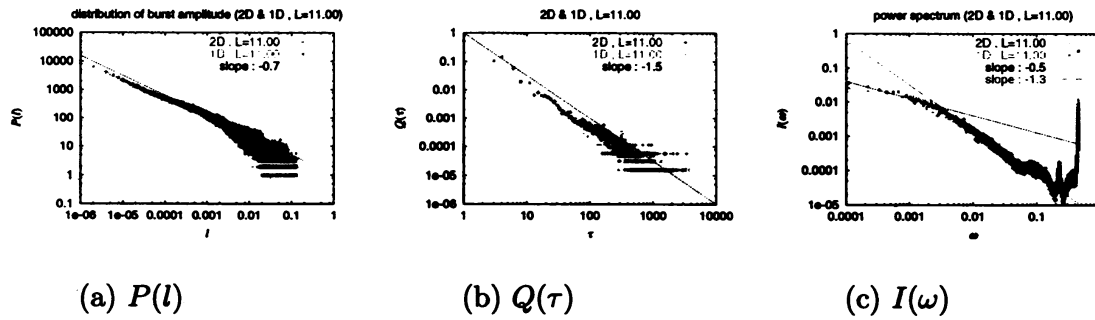


図 3: オンオフ間欠性の特徴的な統計性について, 1次元系と2次元系の比較. いずれの統計性も1次元系と2次元系とで一致しており, 2次元系においても1次元的な振舞をしている.

4 熱雑音の影響

前章で, 一様状態が不安定化しオンオフ間欠性が出現すると同時に, 対称性(等方性)が破れることが数値実験により見出された. しかし, 現実世界の現象においても対称性の破れが観測されるとは限らないであろう. 何故なら, 数値実験を行なったモデルは理想化された決定論的方程式であるのに対し, 現実世界では熱雑音の影響を受けると考えられるからである. 果して熱雑音下でも対称性は破れているのか? それとも対称性を保持しているのか?

ここでは, 熱雑音としてガウス白色ノイズ $\xi_X(\mathbf{r}, t)$, $\xi_Y(\mathbf{r}, t)$ を加えた

$$\begin{cases} \dot{X}(\mathbf{r}, t) = F(X, Y) + a \cos \Omega t + D \nabla^2 X + \xi_X(\mathbf{r}, t) \\ \dot{Y}(\mathbf{r}, t) = G(X, Y) + D \nabla^2 Y + \xi_Y(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (17)$$

を考える [11]. 相加ノイズ ξ は

$$\langle \xi_l(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad l = \{X, Y\} \quad (18)$$

$$\langle \xi_l(\mathbf{r}, t) \xi_{l'}(\mathbf{r}', t') \rangle = 2\gamma \delta_{ll'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad l, l' = \{X, Y\} \quad (19)$$

の性質を持つとする. γ はノイズの強度を表す. また, 境界条件は周期的境界条件としてある.

図 4 は, 相加ノイズ下での $\theta(t)$ の時系列である. このとき, 不変多様体 V_x, V_y 近傍間を間欠的に飛び移る現象が観測され, 対称性が回復している. つまり, 熱雑音下では対称性は破れない.

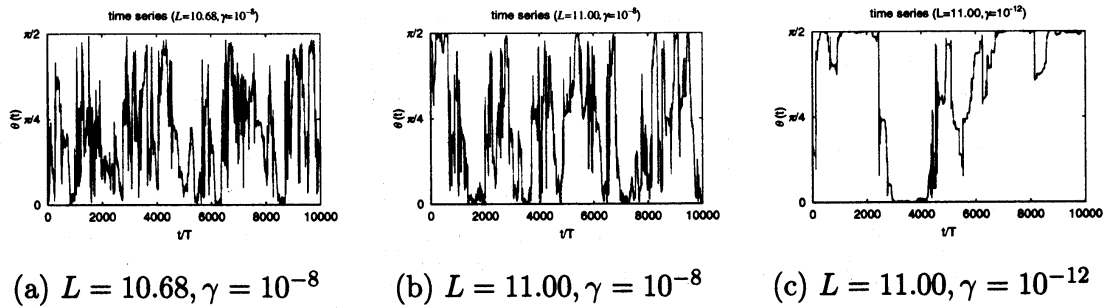


図 4: 相加ノイズを加えた時の時系列 $\theta(t)$. ノイズを加えると, 対称性が回復する. L が L_c から離れるに従い, また, ノイズの強度 γ が小さくなるに従い, $\mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y$ 近傍に滞在する時間が長くなっている.

5 システムサイズと対称性

前章では熱雑音を加えることで対称性が回復することを見たが, では, 熱雑音なしで, システムサイズを大きくしていくことにより対称性は回復しないのだろうか? 1次元的なパターンではなく2次元的なパターンが現れるには $(\pm 1, \pm 1)$ モードの不安定化が必要だと考えられる. そこで, システムサイズ L を変化させたときの分岐図を図5に示す. 図5より, 線形安定性の議論から予想される $L \gtrsim \sqrt{2}L_c$ の領域では周期窓が現われているが, さらにシステムサイズを大きくしていくと, 1次元的な振舞から2次元的な振舞への転移が見られることが分かる.

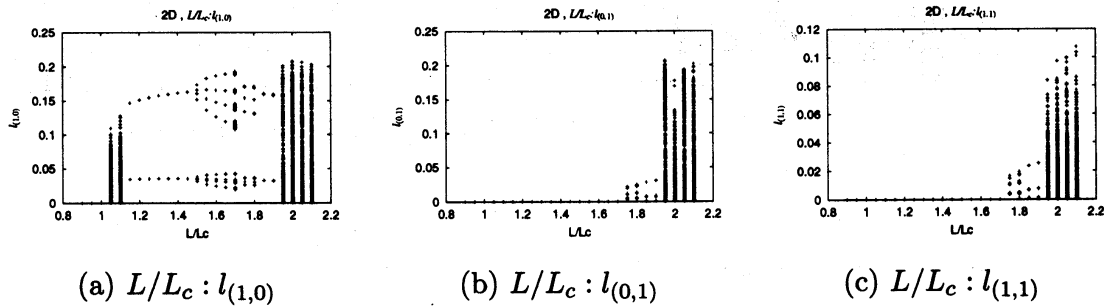


図 5: 2次元系の $0.90L_c < L < 2.10L_c$ における分岐図. L によって, 1次元的な周期運動が現れる領域, 1次元的な非周期運動の領域, 2次元的な周期運動の領域, 2次元的な非周期運動の領域が見える. L/L_c を大きい方から 0.05 刻みずつプロット.

そこで次に, 2次元的なカオス運動が現われる $L \gtrsim 1.95L_c$ について時系列を調べた. どちらの不変多様体近傍に滞在しているかを示す $\theta(t)$ の時系列と, $(1, 1)$ モードの時系列

を示したのが図6である。これより、不変多様体近傍間を遷移するタイミングと同時に、(1,1)モードの振幅(強度)が大きくなっていることが分かる。このことは、パターンへの向きの変化には(1,1)モードの不安定化が関係していることを示唆している。

このことを確認するために、図7を見てみよう。これより、 $\sqrt{l_{(1,0)}(t)^2 + l_{(0,1)}(t)^2}$ の振幅が大きくなっても $\delta\theta(t)$ は0付近しか取らず、パターンへの向きをあまり変えないが、 $l_{(1,1)}(t)$ の振幅が大きくなると、 $\delta\theta(t)$ も大きく動くことが可能であることが分かる。つまり、パターンへの向きを変えるには、 $(\pm 1, \pm 1)$ モードが重要である。

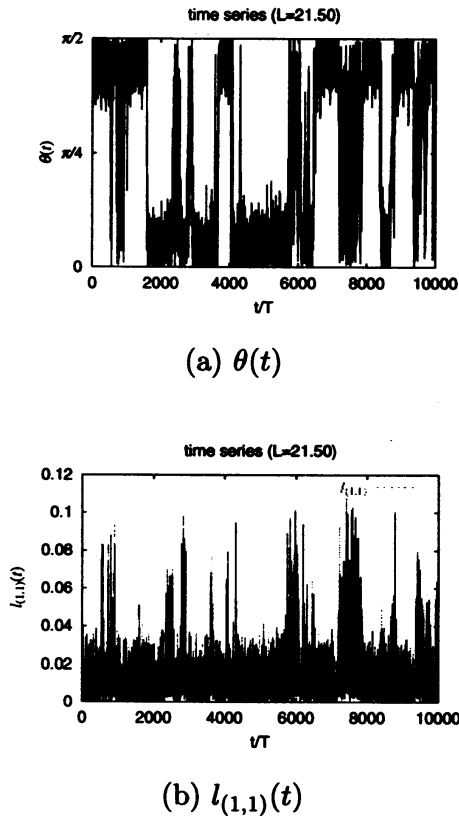
(a) $\theta(t)$ (b) $l_{(1,1)}(t)$

図 6: (a) $\theta(t)$ および
(b) (1,1)モードの時系列.
($L = 21.50 = 2.01L_c$)

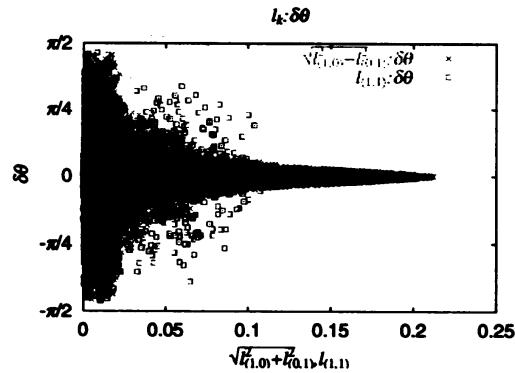


図 7: $\sqrt{l_{(1,0)}(t)^2 + l_{(0,1)}(t)^2} : \delta\theta(t)$ と
 $l_{(1,1)}(t) : \delta\theta(t)$. (1,0)モードや(0,1)モード
の強度が大きくても $\delta\theta$ はあまり大きく変化
しないが、(1,1)モードが大きくなると $\delta\theta$ は
大きく変化する。 $\delta\theta(t) = \theta(t) - \theta(t-T)$.

6 結論

モードが縮退している等方2次元系において、カオス的な一様状態が不安定化した直後では、対称性(等方性)が破れ、1次元的な振舞をしており、オンオフ間欠性が観測される

ことが分かった。

この破れた対称性は、熱雑音がないときは対称性が破れているようなパラメータ領域であっても、熱雑音を加えることによって対称性が回復した。

また、熱雑音がなくても、コントロールパラメータであるシステムサイズを大きくすることによっても対称性が回復することを確かめた。この対称性の回復には $(\pm 1, \pm 1)$ モードの不安定化が重要であることが分かった。

参考文献

- [1] A. Krawiecki and A. Sukiennicki: *Acta Phys. Pol.* **88**(1995), 269. ;
F. T. Rödelsperger, A. Čenys and H. Benner: *Phys. Rev. Lett.* **75**(1995), 2594. ;
J. Becker, F. Rödelsperger, Th. Weyrauch, H. Benner, W. Just and A. Čenys: *Phys. Rev. E* **59**(1999), 1622.
- [2] H. Fujisaka, K. Ouchi, H. Hata, B. Masaoka and S. Miyazaki: *Physica D* **114**(1998), 237.
- [3] H. Fujisaka and T. Yamada: *Prog. Theor. Phys.* **74**(1985), 918; **75**(1986), 1087.
- [4] 藤坂博一: 応用数理 Vol.9 No.1, 28 (岩波書店, 1999)
- [5] E. Ott and J. C. Sommerer: *Phys. Lett. A* **188**(1994), 39.
- [6] Y. -C. Lai and C. Grebogi: *Phys. Rev. E*, **52**(1995), R3313.
- [7] M. Zhan and G. Hu: *Phys. Rev. E* **62**(2000), 375.
- [8] T. Kai and K. Tomita: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **64**(1978), 280. ;
K. Tomita and T. Kai: *Prog. Theor. Phys.* **61**(1979), 54.
- [9] T. Yamada and H. Fujisaka: *Prog. Theor. Phys.* **70**(1983), 1240.
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegan (Eds.): *Handbook of Mathematical Functions*,
Chap. 25, Dover Publications, New York, 1972.
- [11] A. C. Brańka and D. M. Heyes: *Phys. Rev. E* **58**(1998), 2611.