数理解析研究所講究録 1244 巻 2002 年 56-64

1次元自己重力多体系におけるべき相関構造の自発形成

名古屋大学理学研究科　　小山博子*　　小西哲郎†

概要

宇宙における物質分布に、広い範囲のスケールにおいてべき相関構造が見られることが知られている。しかし、その成因についてはよくわかっていない。我々の研究目標は、重力多体系における運動法則のスケールフリー性と、状態のスケールフリー性、この両者の因果関係を理論的に解明することである。ここでは、1次元自己重力多体系において、ある初期条件のもとでは空間相関にべき的なふるまいが自発的に形成されることを発見したのでそれを紹介する。

1　重力多体系とべき相関構造

我々の住んでいる地球は、他の惑星及び太陽とともに太陽系という集団を形成している。さらに、太陽をはじめとする恒星が、約1000億個も集まって、天の川銀河という集団を形成している。さらに、我々の天の川銀河と同様な銀河がいくつか集まって銀河団という集団を形成している。また、銀河の中では、恒星がいくつか集まって星団とよばれる集団を組んでいるものもある。このように、宇宙には、広大なスケールにわたって階層的に構造が存在している。

ここでいう「階層的」とは、どのスケールで見ても、似たような構造が見られると言いかえられる。観測データから、銀河あるいは銀河団の分布の2点相関がべき型になっていることが知られている。また、銀河の中で星団を構成している恒星の分布の2点相関がべき型になっているという例もある。べき型の相関は特徴的なスケールを持たない。すなわち、スケールを変えても要素 (天体) 間の相関の仕方は形が変わらないことを意味する。では、そのようなべき相関構造はどのようにして形成されたのだろうか？

銀河団、銀河、星団などは、主にお互いの重力によって相互作用しながら運動している。これらの集団運動の様子は、重力多体系としてモデル化して調べることができる。つまり、”自己重力多体系とは、ある系に粒子 (天体) が複数個存在し、各々の粒子が系内の質点とみなせる他の粒子からの重力による万有引力のみ受けて、全体として束縛されながら運動している系を一般には指す。このような系での粒子の運動がどうなっており、粒子のある場所での存在確率 (密度分布に対応) や速度の分布がどうなっているのか、またその分布の進化などを探り出そうというのが、重力多体系での力学構造の問題である” ([1] より抜粋)。

上で述べた「重力多体系に見られる階層構造」の原因については、「重力がスケールフリーだから」であると一般に信じられている。実際、多くの教科書で、そのような記述を見ることができる。確かに、両者は「スケールフリー」という共通のキーワードを持っている。しかし一般に、相互作用ポテンシャルのスケールフリー性と、そのポテンシャルで運動する多体系の空間相関がスケールフリーであることの間の因果関係は明らかでない。すなわち、スケールフリーな引力型ポテンシャルのもとでべき型の空間相関が実現しているからといって、その種のポテンシャルは必ずべき相関を生ずるのか、それとも、何か他の条件が必要なのか、例えば、初期にべき相関が予め与えられている必要があるのか、それとも、相互作用の結果としてべき相関が動的に形成され得るのかは、よく分かってない。また、ポテンシャルのべきの指数によって、これらの結論はどのように変わるのかも自明でない。重力多体系における運動法則のスケールフリー性と、状態のスケールフリー性、この両者の関係を解明したいというのが我々の研究目標である (図1)。

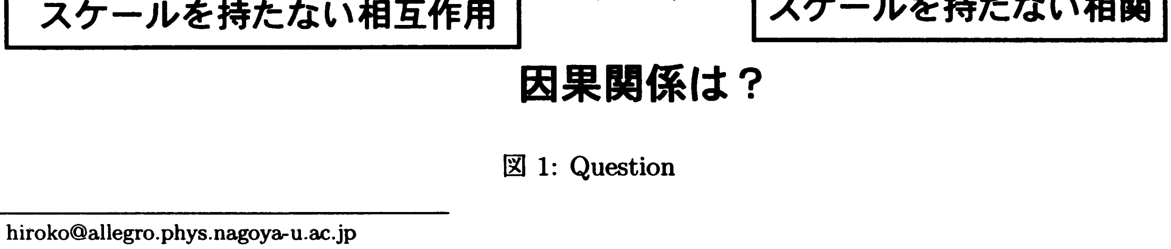


図 1: Question

*Email: hiroko@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp
†Email: tkonishi@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

ここで我々が提起する問題は、

- べき型の空間相関が力学により、すなわち運動方程式での時間発展により形成されることはあるのか？
- あるとすれば、その条件と理由は？
- 力学的にはどのように理解できるのか？
- 物理的意味づけ・適用が可能か？

である。我々は、べき相関が動的に形成される可能性の有無に特に興味がある。もしそれが有るならば、それは多自由度力学系での構造形成に関して新しい概念を提唱できる可能性がある。したがって、重力多体系におけるべき相関構造の力学構造を解明することは、天体物理だけでなく、他の物理現象に対しても重要になると期待している。

2 モデル

2.1 1次元自己重力多体系

3次元空間での重力多体系の計算 (いわゆる N 体計算) は、多くの研究者が奮闘しているが、以下のような困難がある。

- ポテンシャルが $1/r$ と発散しているので、2粒子が近接したときには非常に注意深く計算しなければならない。
- 粒子系でしかも長距離力なので、計算量が膨大となる。これは、多数の粒子 (天体) を考えたい場合に困る。

そこで、単純化されたモデルで現象の本質を引き出せればメカニズムの理解に役立ち幸いだと考える。我々が着目しているのは、重力のスケールフリー性である。これは、重力ポテンシャルがべき型であると言いかえることができる。ここでは、そのような系で最も単純な1次元自己重力多体系を使って調べる。

モデルとして、無限に広がった一様なシートが、それに垂直な方向にのみ運動するようなものを考える (図 2)。それぞれのシートのもつ自由度は1次元なので、これを1次元自己重力多体系 (または、シートモデル) とよんでいる。それぞれのシートは、互いの重力に従って運動し、シートの交差が起こったときには、互いにすり抜けると考える。各シートの位置を x_i、運動量を p_i、シートの面密度を m とすると、この系のハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + 2\pi G m^2 \sum_{i>j} |x_i - x_j|, \qquad -\infty < x_i < \infty \tag{1}$$

と書くことができる。以後の計算では、$4\pi G = 1, mN \equiv M = 1, 1/\sqrt{4\pi GM} = 1$ でスケーリングしてある。

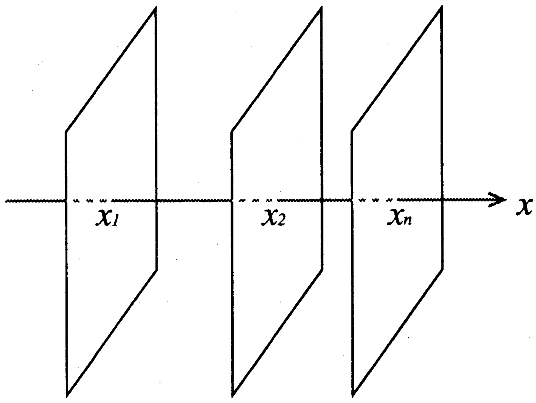


図 2: A schematic picture of the sheet model

2.2 2点相関関数

今、我々が興味あるのは、多体系の空間相関が距離のべき型になる場合である。「べき型の空間相関」とは、2点相関関数 $\xi(r)$ が距離のべき型

$$\xi(r) \propto r^{-\alpha} \tag{2}$$

となることである。このとき相関には特徴的なスケールがない。ここで 2 点相関関数 $\xi(r)$ は、ある粒子から距離 r にある微小体積 dV に別の粒子が存在する確率を dP、平均密度を n とすると、

$$dP = ndV(1 + \xi(r)) \tag{3}$$

により定義される (図 3)。

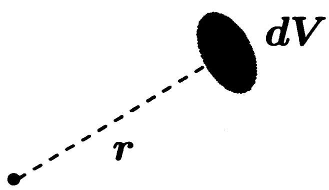
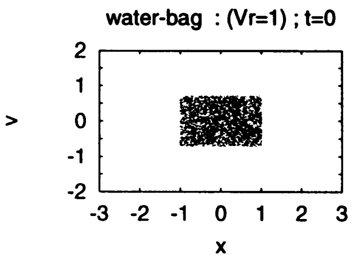


図 3:

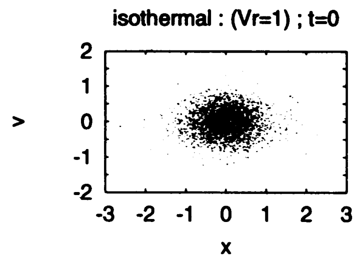
また、ここで「べき相関」というのは、2 点相関関数 (2) の指数 α がゼロでない場合を指す。なぜなら我々は、多体系を構成している粒子 (天体) が全くランダム (無相関) に分布しているのではなく、非自明なフラクタル構造を形成している場合に興味があるからである。

2.3 よく知られている初期条件からの時間発展例

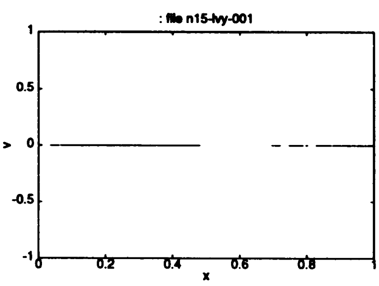
シートモデルの使用例として、楕円銀河の進化に関する研究がある [3][4]。それらでは、銀河を想定した重力多体系の緩和過程について主に調べられてきた。ここでは、従来からよく使われている初期条件からの時間発展例で、2 点相関関数に注目する。まず、初期分布としてべき相関を持ってない場合を考える。楕円銀河の緩和過程の研究 [4] [4] で用いられている初期条件 "water bag" 型と、"isothermal"型の場合、べき的な空間相関は生じないことが分かっている。



(a) water bag 型の初期分布



(b) isothermal 型の初期分布



(c) Levy flight 型の初期分布

つまり、図 1 で提起した「因果関係」の観点から言えば、重力がスケールフリーだからといって、必ずしも重力多体系がべき型の空間相関を持つというわけではないことは明らかである。では次に、初期分布がべき相関を持っている場合を考える。ここではその一例として、

$$x_i : \text{Levy flight distribution in } [-1, 1] \qquad v_i = 0 \tag{4}$$

のように μ 空間での $v_i = 0$ 上に、Levy flight 型の初期分布を与えた場合の時間発展を調べると、ある程度時間が経った後でもべき相関は保持されている。

以上の例から、むしろ次の仮説が成立しそうに思われる。

- **仮説：空間相関がべき型であるためには、初期条件としてべき相関を持った種が必要である。**

これは本当か？ 結論からいうとそうではない。その詳細を次の section で述べる。

3 べき相関構造の自発形成

ここで、粒子の初期条件 $(x_i(0), v_i(0))$ が次のような場合を考えてみる。

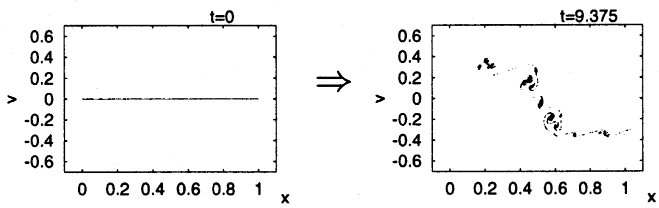
$$v_i(0) = 0, \quad x_i(0) = \text{uniformly random in } [0, 1] \tag{5}$$

現実の宇宙にこのような、"cold"な状況があるかどうかの真偽はここでは考えない。我々は、このような初期条件の下では、重力相互作用を通じて、べき相関構造が自発的に発生することを発見した [5]。

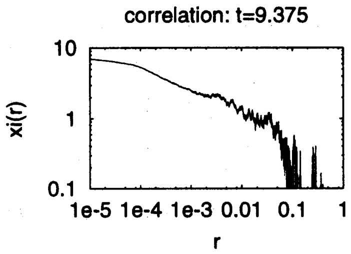
3.1 初期状態に依存した、べき相関の発生の有無

3.1.1 case I. 初期状態 (5) の場合

初期条件 (5) の下での μ 空間での時間発展と 2 点相関関数を調べると、図 4 のようになる。



(d) μ 空間での分布の時間発展



(e) 相関関数 $\xi(r)$

図 4: μ 空間での初期分布を (5) とした場合の時間発展

図 4 (a) から、μ 空間において、始めに小さなスケールでギザギザができて、それらが小さな渦を巻くようになり、さらに小さな渦を巻き込んで大きな渦を形成していく様子がわかる。また、2 点相関関数を測ると図 4 (b) のようになり、距離のべき型になっていることが分かる (図 4)。これは、**べき相関をもたない初期状態から、重力相互作用を通じてべき相関構造が自発的に形成されている**ことを意味している。図 1 で掲げた「因果関係」の観点でいうと、

- **重力は、重力多体系の空間分布がべき的相関をもつ状態を造る作用を持っている。**

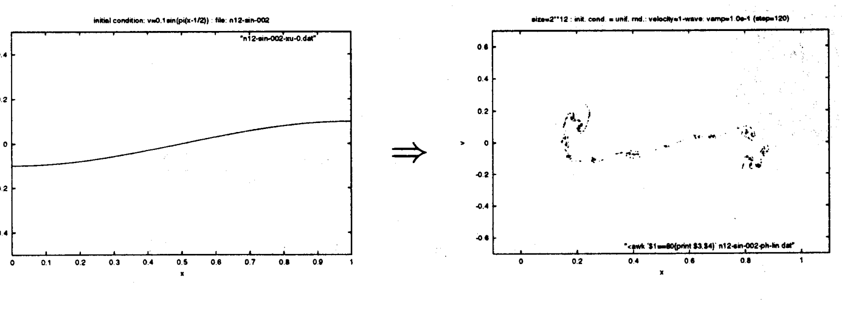
ここではそのようなサンプルを一つ発見したことになる。だがこのようなことは、water-bag あるいは isothermal 型初期条件の例から明らかなように、任意の初期条件で起こることではない。では、どのような初期条件のクラスで起こることなのだろうか？それを絞るために、次に典型的と思われる例について検証してみる。

3.1.2 case II μ 空間における初期分布が直線でない場合

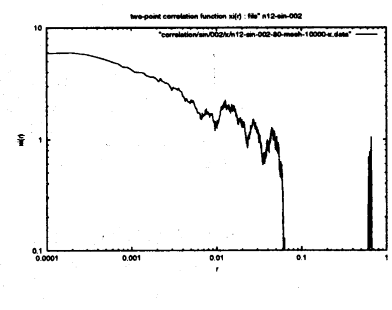
$v_i(0) = 0$ の初期条件が重要なのかどうかを確かめるために、初期条件が

$$x_i : \text{random in } [0,1] \qquad v_i = 0.1 \sin \pi (x_i - 1/2) \tag{6}$$

の場合について調べてみた (図 5)。初期条件 (6) からも、べき相関構造が形成されていることが分かる。$v = 0$ という条件が重要なのではないらしい。



(a) μ 空間での分布



(b) 相関関数 $\xi(r)$

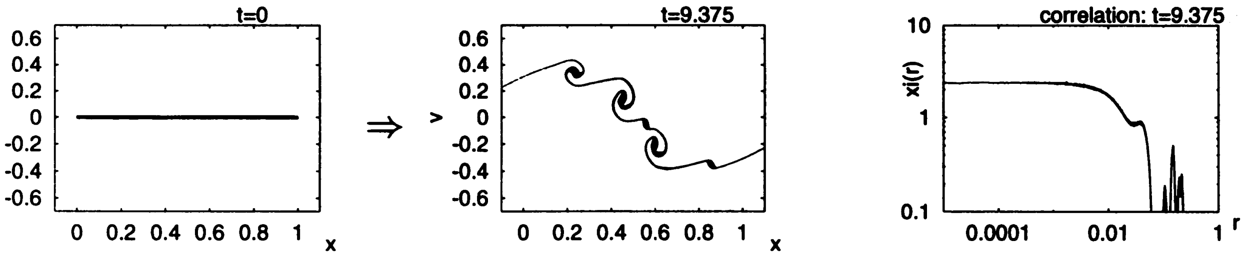
図 5: μ 空間での初期分布を (6) とした場合の時間発展 ($t = 9.375$)

3.1.3 case III. μ 空間における初期分布が 1 次元的でない場合

次に、初速度が初期位置の関数として一意には定まらない初期条件の場合を考える。ここでは速度分散が 0 ではない初期条件

$$x_i: \text{ uniformly random in } [0,1] \qquad v_i: \text{ uniformly random in } [-0.01, 0.01] \tag{7}$$

の場合について調べてみた (図 6)。この場合、べき相関構造が形成されていない。



(a) μ 空間での分布の時間発展

(b) 相関関数

図 6: μ 空間での初期分布を (7) とした場合の時間発展 ($t = 9.375$)

以上の典型例から、べき相関が発生するための初期条件は、

$$\forall i \quad v_i(0) = f(x_i(0)) \tag{8}$$

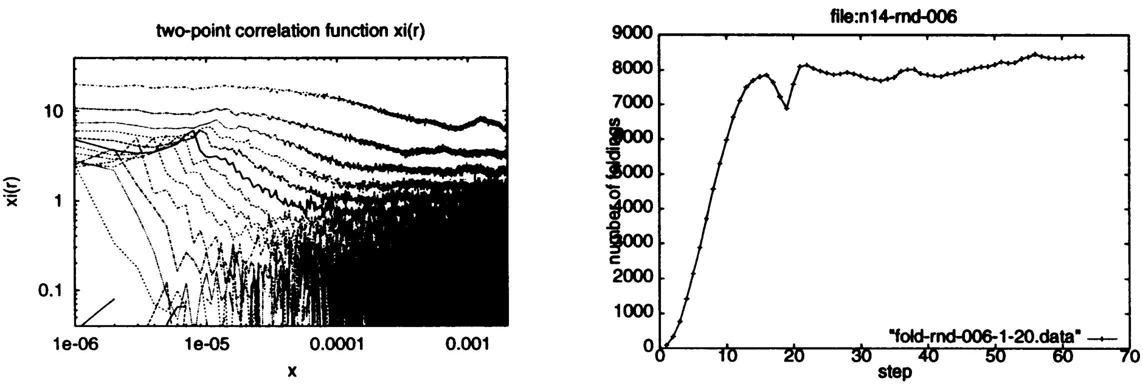
(f は適当な関数) のように、初速度が初期位置の関数として一意に定まるというクラス (「速度分散なし」あるいは、"cold" とよばれる) まで拡張できそうである。

3.2 べき相関の形成過程

次に、べき相関構造が形成されていく過程に注目してみる。ここでは、べき相関構造が形成される典型的初期条件 (5) の場合について調べてみる。2 点相関関数の時間発展を調べると、図 7 (a) のようになる。また、粒子の空間的並び方の折りたたみ数を

$$f(t) \equiv \text{number of } i (1 < i < N) \quad \text{which satisfies } (x_{i+1}(t) - x_i(t))(x_i(t) - x_{i-1}(t)) < 0 \tag{9}$$

で定義し、その時間発展を調べると、図 7 (b) のようになる [7]。



(a) 相関関数の時間変化：Evolution of correlation function $\xi(r)$ at $t = \frac{5}{64}l$, $l = 3, 4, \ldots, 17$ (from bottom to top). System size $N = 2^{14}$, Initial condition x_i = random in $[0, 1)$, $v_i = 0$

(b) 式 (9) で定義された折りたたみ数の時間変化

図 7: 2 点相関関数と 折りたたみ数の 時間変化

べき相関は小さな空間スケールから発生し、それが大きなスケールへと成長している。この様子は、宇宙の構造形成論で提唱された"**hierarchical clustering**" シナリオと似ている。つまり、まず小さな空間スケールで構造 (小さなクラスター) が作られ、それらがさらに大きな構造を組み上げていく。

3.3 ポテンシャルのベキの指数を変えた場合

シートの場合とポテンシャルのべきの指数が変化すると、べき相関構造の形成にどのように影響するのか知るために、ここでは Milanovic [6] らによって提案されたハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + 2\pi G m^2 \sum_{i>j} |x_i - x_j|^{3/2}, \qquad -\infty < x_i < \infty \tag{10}$$

の場合について調べた。$\boldsymbol{\mu}$ 空間での分布の時間発展 ($N = 2^{11}$)

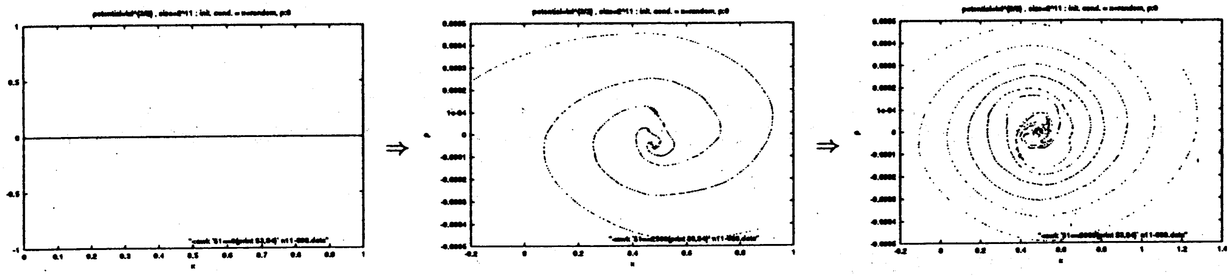


図 8: μ 空間での時間変化。左から $t = 0, t = 25, t = 50$

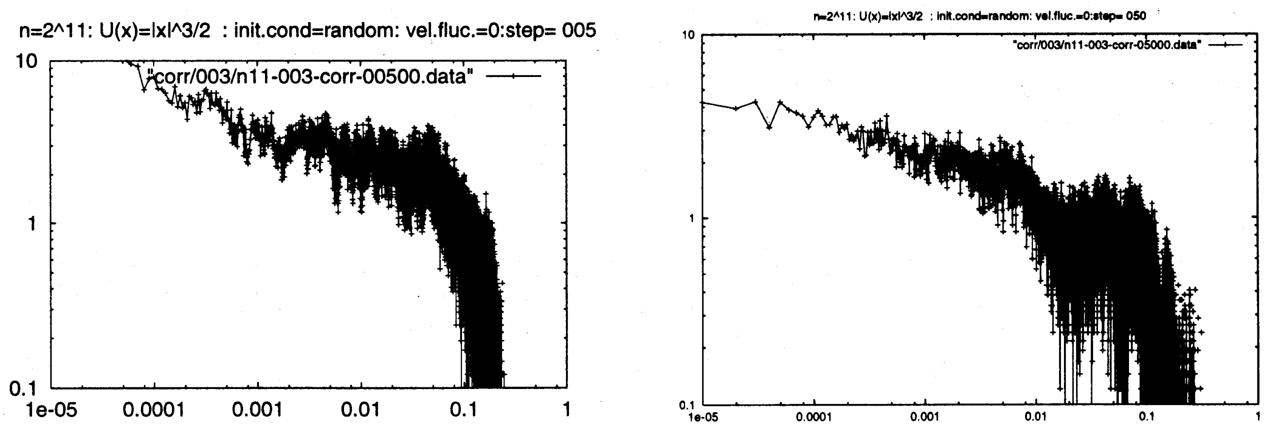


図 9: 2 点相関関数。左から $t = 25, t = 50$

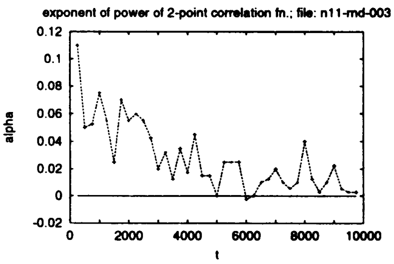
ポテンシャルのべきの指数を変えても、べき的な空間相関が発生することがわかる。ただし、μ 空間での様子はシートモデルの場合と異なるので、べき相関の形成されるメカニズムが異なるかもしれない。

3.4 べき相関の緩和過程

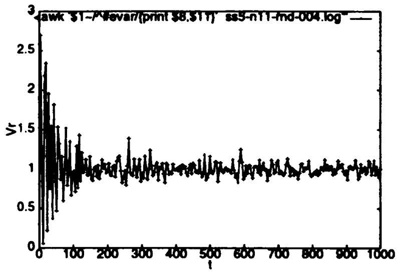
前の subsection で 重力相互作用によってべき相関が自発的に形成されることを述べた。しかし、その力学構造はまだ明らかでない。ここでは、そもそもこの「べき相関をもった状態」が何者かを知るために、次の疑問を提起する。

- べき相関が形成された後、系はどうなっていくのだろうか?
  つまり、べき相関がある状態は、長時間続く準定常状態なのか、あるいは transient なのか?
- べき相関が消失するならば、その機構は何か?既知の緩和過程との関係は何か?

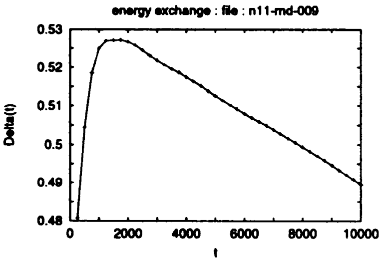
ここでも、べき相関構造が形成される典型的初期条件 (5) の場合について調べてみる。まず長時間にわたって 2 点相関関数のべきの指数を目測で調べると図 3.4(a) のようになる。



(a) 2 点相関関数のべきの指数の時間変化



(b) ビリアル比の時間発展



(c) Temporal evolution of $\Delta(t)$ for $0 \le t \le 10000$

べきの指数は、ゼロに収束していくようにみえる。これは、一旦形成されたべき相関構造はやがて消失していくことを意味する。では、べき相関構造が形成され、消失していく物理的メカニズムは何なのか？ ここでは、既知の緩和過程との関係を調べてみた [8]。

3.4.1 ビリアル比とべき指数の時間発展

系の動力学的状態を測る指標のひとつに、ビリアル比がある。これは、各瞬間での運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの比

$$\frac{2E_{kin}(t)}{E_{pot}(t)} \tag{11}$$

で定義される。ここでは、べき相関が形成されているタイムスケールと、ビリアル比の変化の関係を調べてみる。初期条件 (5) からの時間発展において、各時刻でのビリアル比を測定すると、図 3.4 (b) のようになる。系はやがてビリアル平衡に落ち着くことが分かる。この時刻 t_{vr} とべき相関が形成される時刻を比較すると、次の結論が得られる。

- **系がビリアル平衡に達した後もべき相関は維持されている。**
  べき相関が消失するのはそれよりもっと後である。

3.4.2 粒子間のエネルギー分配

今考えている系の進化において、べき相関の消失よりも先ず動力学的平衡状態 (ビリアル平衡) が達成されることが分かった。その後、ある種の緩和が起きることにより、べき相関が消失すると考えられる。ここでは、粒子間のエネルギー分配を測ることにより、ミクロな緩和が起きる時間を調べ、べき相関が喪失する時間と比較してみる。1 粒子エネルギーは、各粒子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で定義できる。

$$\epsilon_i(t) = \frac{1}{2}v_i^2(t) + 2\pi Gm \sum_{j=1}^{N} |x_j(t) - x_i(t)| \tag{12}$$

エネルギー分配を計る量 $\Delta(t)$ を次のように定義する。

$$\Delta(t) \equiv \frac{1}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \epsilon_i(t')dt' - \epsilon_0\right]^2} \tag{13}$$

ここで ϵ_0 は

$$\epsilon_0 \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \epsilon(t)dt = \frac{5}{3}E_{total} \tag{14}$$

$\Delta(t)$ の時間発展は、図 3.4 (c) のようになる：粒子間のエネルギー分配が起きるくらいの時間のオーダーで、べき相関が消失している。したがって

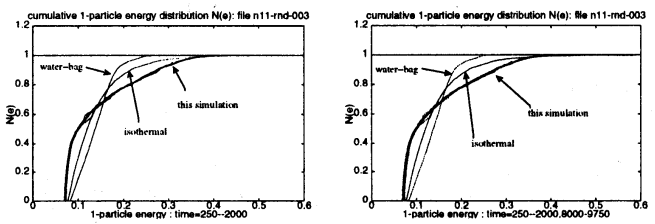
- **粒子間のエネルギー交換が起きることにより、べき相関は消失していく**

と考えられる。

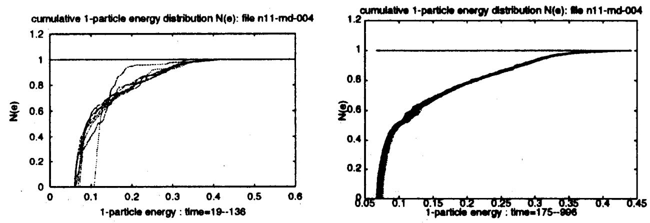
また、形成された"べき相関をもった状態" において、図 3.4 から分かるように、べきの指数は時々刻々と変化している。その意味で、自発形成されるべき相関構造は transient な状態である。この "transient" の意味をより明らかにするために、この状態を、1粒子エネルギー分布の時間変化として調べてみる。1粒子エネルギー分布 $\nu(\epsilon)$ は

$$\nu(\epsilon) \equiv \frac{1}{N}(\text{number of particles whose energy } \epsilon_i < \epsilon) \tag{15}$$

で定義される。$\nu(\epsilon)$ の時間変化は、図 10 のようになる。



(d) $\nu(\epsilon)$ for $t = 250, 300, \ldots, 2000$(left) and $t = 250, 300, \ldots, 2000, 8000, 8050, \ldots, 9750$(right)



(e) $\nu(\epsilon)$ for $19 < t < 136$ (left) and $175 < t < 996$ (right). Each figure represents $\nu(\epsilon)$ before and after virialization, respectevely.

図 10: 1粒子エネルギー分布 $\nu(\epsilon)$ の時間発展

ビリアル緩和と1粒子エネルギー分布 $\nu(\epsilon)$ が収束する時間は同じオーダーである。その後、べき相関が消失していく間 (べきの指数が変化していく間)、$\nu(\epsilon)$ はほとんど変化していない。したがって、

- **形成されたべき相関構造は、べきの指数としては transient であるが、エネルギー分布がほとんど変化していないと言う意味では準定常な状態である。**

4 まとめ

今回分かったことをまとめると、

- 1次元自己重力多体系で、初期にべき相関がなくても自発的にべき相関が生じることを発見した [5]。これを、図 1 で掲げた「因果関係」の観点でいうと、
  - 初期分布がべき相関を持っていなくても、重力相互作用により、べき相関構造がダイナミカルに形成されることが (初期状態に依っては) ある。

  べき相関を発生させる初期条件は、速度 0 で空間分布がランダムなものが代表的である (予想としては、μ 空間で1次元的な分布であればよさそうである)。
- べき相関の形成過程は、小さなスケールから始まり、大きなスケールへと成長していく。この様子は、宇宙の構造形成論で提唱された、hierarchcal clustering シナリオと同様である [7]。
- ポテンシャルのべきの指数を変えた場合でも、べき相関構造が形成される。しかし、μ 空間での時間変化の様子はシートモデルの場合とは異なる。
- べき相関は、系がビリアル緩和した後も維持されているが、その後、粒子間のエネルギー交換とともに消失していく [8]。

べき相関構造の生成から消失までを模式的にかくと図 11 のようになる。

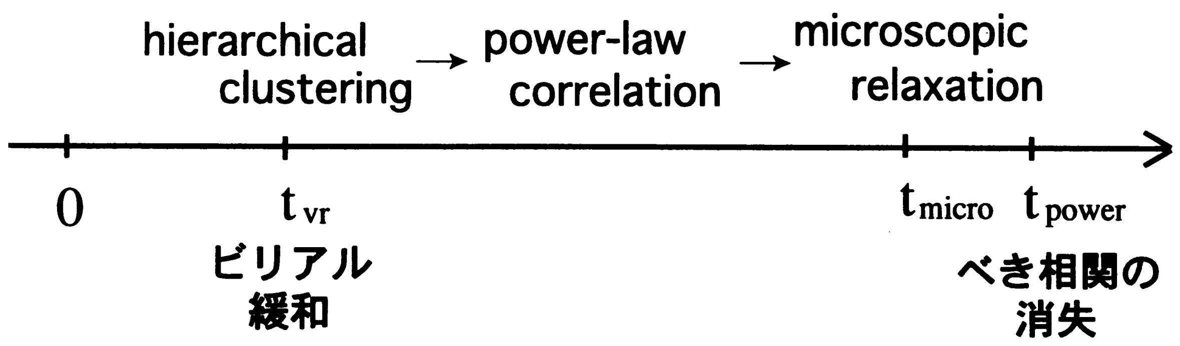


図 11: time evolution

最後に、今回の研究に関して、非線形ダイナミクスとしての意味付けと展望を述べる。今回我々が発見したべき相関の自発形成という現象は、非線形物理の問題としても興味深い。まず、この系はハミルトニアンで記述される保存系であるにもかかわらず、その時間発展が単なる熱平衡への単調な緩和過程とはならずに一旦相関を形成しているのは特異な現象である。熱平衡に単調に緩和する系の範囲はどのように定義できるのかは未だわかっていない。

また、この系に散逸が入っているならば、べき相関構造を持った状態が実はアトラクタになっていて、その状態へ系が漸近する、と解釈出来る可能性があるが、ハミルトン系であるからもちろんそうは解釈できない。

近可積分なハミルトン系の場合、規則的な運動をする準周期軌道 (トーラス) 近傍に長時間滞在する (いわゆる「淀み運動」) ことが一見アトラクタ的に見えることもある。べき相関が見えている状態がこの種の淀み運動であるとすると、それは、空間的にべき相関を持った準周期軌道の存在を示唆することになる。その準周期軌道の存在を示せるかどうか、更に、解析的に得ることができるかどうかは 3 次元への拡張も含めて興味深い問題である。

一方、淀み運動でないとすれば、べき相関の自発形成は、多自由度の保存系で起きている現象で、カオス的で、熱平衡ではなく、トーラス近傍の運動でもない事になる。このような状態としては、これまで同じモデル (シートモデル) で知られている準平衡状態があるが、それらは相関が失われた状態であり、今回発見されたものとは異なる。すなわち、この状態は、空間相関がベキ的であるという顕著な特徴を持った状態でありながら、力学系としてはその性質をうまく説明できない事になる。この場合、ポテンシャル (運動法則) のスケールフリー性が状態あるいは相空間構造に与える制約を定式化することが理解の助けになると考えられる。

多自由度の力学系の動的な振舞いを如何に記述するかというのは現在の力学系研究の大きな課題である。少数自由度系を元に作られて来た記述用語だけでは多自由度系の振舞いは理解しきれないのかも知れない。今回我々が発見した現象が新しい概念を生み出す端緒となれば極めて意義深い。

参考文献

[1] 郷田直輝：「自己重力多体系の物理」, 数理科学, No.441, 3 月号, p.76, 2000.

[2] 土屋俊夫, 郷田直輝, 小西哲郎：「重力シート多体系の緩和過程とカオス的遍歴」, 日本物理学会誌, vol.52, No.10, p.783, 1997.

[3] T. Yamashiro, N. Gouda, and M. Sakagami: Progress of Theoretical Physics 88 (1992) 269.

[4] T. Tsuchiya, T. Konishi and N. Gouda: Phys.Rev. E **50**(1994) 2607,
T. Tsuchiya, N. Gouda and T. Konishi: Phys.Rev. E **53**(1996) 2210.

[5] H. Koyama and T. Konishi: Phys. Lett. A. **279**, 226 (2001)

[6] Milanovic, Posh, and Thirring: Phys. Rev. E **57** 2763 (1998)

[7] H. Koyama and T. Konishi: astro-ph/0008507

[8] H. Koyama and T. Konishi: astro-ph/0010030