数理解析研究所講究録 1245 巻 2002 年 135-146

SPHERICAL NILPOTENT ORBITS FOR SYMMETRIC PAIRS — THE CASE OF $U(p,p)$ —

西山 享 (KYO NISHIYAMA)

京都大学 総合人間学部

ABSTRACT. 対称対 $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}}) = (U(p,p), U(p) \times U(p))$ の場合に、球巾零軌道をすべて分類した。分類の手法として、より小さな不定値ユニタリ群 $U(r,s)$ からの巾零軌道の持ちあげ (theta lifting) を用いる。この手法は、対称対 $(U(p,q), U(p) \times U(q))$ の場合にも適用可能である。

本報告では、対称対の巾零軌道の性質について述べるが、巾零軌道と巾零多様体の性質や、リー群のユニタリ表現論との関係を [N3] にも解説している。そちらもあわせて参照していただければより分かりやすくなると思う。

1. 球多様体

この節では、多様体、代数群などはすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。ほとんど全ての議論は、複素数体を標数がゼロの代数的閉体で置き換えてもそのまま通用するはずである。

G を $\mathbb{C}$ 上の線型代数群で reductive とし、既約な代数多様体[1]X に (代数的に) 作用しているとする。

Definition 1.1. (1) 作用 $G \curvearrowright X$ をもつ代数多様体 X が**球多様体 (spherical variety)** であるとは、ある Borel 部分群 $B \subset G$ に関して X が開 B 軌道を持つときにいう。つまり $\exists x \in X$ が存在して、$B \cdot x \subset X$ が開かつ稠密となる。
(2) G の部分群 H が**球部分群 (spherical subgroup)** であるとは、G/H が球多様体になるときにいう。明らかにこれは、G の Borel 部分群 B であって、$B \cdot H \subset G$ が開かつ稠密になるようなものが取れることと同値である。

Example 1.2.

(A) 対称空間: $\sigma : G \to G$ を対合的自己同型とし、$H = G^{\sigma}$ をその固定部分群とする。すると良く知られているように、H は球部分群であって、G/H は球多様体になる。この場合、H は reductive であって、G/H はアフィン、非コンパクトな多様体である。

Key words and phrases. nilpotent orbit, spherical variety, theta lifting, multiplicity-free action.
RIMS 研究集会「新世紀への表現論と調和解析」(2001/7/24 – 27) 講究録原稿.

[1]このノートでは、被約な代数多様体のみを考える。また、代数多様体上の位相は、特に断らなければ Zariski 位相を考える。

(B) 一般化された旗多様体: $P \subset G$ を放物型部分群とすると、P は球部分群である。旗多様体 $X = G/P$ は球多様体になるが、これは射影多様体[2]であって、コンパクトである。

(C) 重複度自由な表現: G の有限次元ベクトル空間 V 上の表現が**重複度自由**とは、$\mathbb{C}[V] \simeq S(V^*)$ が G の表現として重複度自由に分解するときに言う。ここに $\mathbb{C}[V]$ は、V 上の多項式環、$S(V^*)$ は V^* の対称代数を表す。$G \curvearrowright V$ が重複度自由な表現であることと、V が球多様体であることとは同値である。この場合 V は概均質ベクトル空間の特殊な場合になっていて、さまざまな研究がある。例えば、[K], [HU] を参照されたい。

$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とすると、G は $\mathfrak{g}$ に随伴作用で作用している。

$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ に含まれている巾零元の全体を表そう。ただし $x \in \mathfrak{g}$ が巾零であるとは、$\operatorname{ad} x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が巾零写像であることと定める。これは x を通る随伴 G 軌道 $\operatorname{Ad} G \cdot x \subset \mathfrak{g}$ の閉包が 0 を含むことと同値であり、次数が正の不変式 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G_+$ の共通零点として代数多様体となっている[3]。これを**巾零多様体 (nilpotent variety)** と呼ぶ。次数が正の不変式の共通零点は不変式論ではしばしば **null cone** と呼ばれるていることに注意しておこう。

明らかに $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ は随伴作用で不変であるが、次が成り立つ。

Theorem 1.3. $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ の随伴 G 軌道は有限である。

$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ の随伴 G 軌道を**巾零軌道**と呼ぶ。巾零軌道の分類は G (の半単純部分) が単純の時にはよく知られている。古典型の G について結果だけ記しておく。

Example 1.4. 以下の例については、例えば [CM, §5.1] を参照されたい。

(A) 一般線型群：$G = GL_n(\mathbb{C})$ のときには、$\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{C})$ は全行列環であって、随伴作用は通常の行列による共役と一致する。また Lie 環としての巾零元であることと、行列として巾零行列であることは一致している。したがって、$\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ の G 軌道の分類は、巾零行列のジョルダン標準形の理論に他ならず、巾零軌道と n の分割は一対一に対応する。n の分割は、箱の個数が n 個の Young 図形と一対一に対応するので、巾零軌道は Young 図形で分類されると言ってもよい。

(B) 直交群：$G = O_n(\mathbb{C})$ の時には、まず $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ と埋め込み、$\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ と考える。すると $x \in \mathfrak{g}$ が巾零であることは、やはり行列として巾零であることと一致する。このとき、G 軌道 $\mathbb{O}_x = \operatorname{Ad} G \cdot x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ は、もちろん x を通る $GL_n(\mathbb{C})$ 軌道に含まれているので、それから Jordan タイプが決まる。結局この Jordan タイプで巾零軌道は分類されるが、すべての Jordan タイプが現れるわけではない。直交群の場合には、Jordan タイプを箱の個数が n の Young 図形で表したときに、偶数の長さの行が偶数の重複度を持つという条件を満たすもののみが分類として現れる。

直交群では、$n = 2m$ で D_m 型の時、$O_{2m}(\mathbb{C})$ による随伴軌道と $SO_{2m}(\mathbb{C})$ による随伴軌道は一般には一致せず、Young 図形の行の長さがすべて偶数の場合 (very even case) $O_{2m}(\mathbb{C})$ 軌道が二つの $SO_{2m}(\mathbb{C})$ 軌道に分解する。その他の場合は、$O_n(\mathbb{C})$ 軌道と $SO_n(\mathbb{C})$ 軌道は一致する。また、n が奇数のとき (B_m 型の時) には $O_n(\mathbb{C})$ 軌道と $SO_n(\mathbb{C})$ 軌道はすべて一致している。

---

[2]つまり、射影空間 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ の閉部分多様体。

[3]実は既約な正規多様体となっていることが Kostant によって証明されている。

(C) シンプレクティック群 : $G = Sp_{2n}(\mathbb{C})$ のとき、やはり直交群と同じように考えれば、巾零軌道は Jordan タイプで分類される。Jordan タイプとして許されるのは、箱の数が $2n$ の Young 図形であって、奇数の長さの行が偶数の重複度を持つ場合のみである。

さて、巾零軌道 $\mathbb{O} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g})$ が球多様体であるときに**球巾零軌道**と呼ばれる。球巾零軌道は比較的 "小さな" 軌道であって、例えば極小巾零軌道 (ゼロでない、閉包関係について最小の軌道) は球巾零軌道である。G (またはその実形) の (無限次元) 表現には自然に巾零軌道を対応させることができるが、一般に球巾零軌道に対応する表現は "小さな" 表現であって、表現論との関係で最近さまざまな研究がなされている。このような研究については、[V1], [BK], [NOT], [HL], [NZ1] などを見られたい。

G が古典型の時にはこれらの球巾零軌道はすべて分類されている。また一般の G に対しても、球巾零軌道であるための簡単な条件が Panyushev [P, §2] によって得られているので、それを紹介しよう。

Theorem 1.5 (Panyushev, McGovern).
(1) n の分割を $[n^{e_n} \cdots 3^{e_3} \cdot 2^{e_2} \cdot 1^{e_1}]$ で表す。この時、球巾零軌道に対応する分割は次のように与えられる。

G	分割	条件
GL_n	$[2^k \cdot 1^l]$	$k, l \geq 0;\ 2k + l = n$
Sp_{2n}	$[2^k \cdot 1^l]$	$k, l \geq 0;\ 2k + l = 2n$
O_n	$[3^\varepsilon \cdot 2^k \cdot 1^l]$	$\varepsilon = 0, 1;\ k \geq 0 :$ even ; $3\varepsilon + 2k + l = n$

(2) 一般の reductive な G に対して、$\mathbb{O}$ を巾零軌道とするとき、次の三条件 (a)–(c) は、互いに同値である。

(a) $\mathbb{O}$ は球巾零軌道である。

(b) $\mathbb{O}$ は高々 3-step の ad-巾零元 $x \in \mathbb{O}$ を含む、つまり $(\operatorname{ad} x)^4 = 0$ が成り立つ。

(c) 互いに直交するような単純ルートの部分集合 $\{\alpha_i\}$ が存在して、$\mathbb{O} \ni \sum_i X_{\alpha_i}$ となる。ただし $X_\alpha \in \mathfrak{g}$ はルート α に対応するルートベクトルを表す。

対称対 (G, H) に対しても巾零 H 軌道が考えられるが、それがいつ球巾零軌道になるのかについては今のところまったく分かっていない。以下、不定値ユニタリ群の場合に、球巾零軌道の分類について得られた結果を紹介するが、その前に対称対の巾零軌道について述べておこう。

2. 対称対の球巾零軌道と問題の設定

ここでは表現論への応用も視野に入れて、 Riemann 対称対 $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}})$ を考えることにしよう。任意の複素対称対は、 Riemann 対称対の複素化によって得られるので、複素対称対を考えるときにはこれは制約にはならない。

$G_{\mathbb{R}}$ を実 reductive Lie 群とし、$K_{\mathbb{R}}$ をその極大コンパクト部分群とする。その Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$、複素化したものを $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ と書こう。すると、$K_{\mathbb{R}}$ に付随した Cartan 対合によって、複素 Lie 環の Cartan 分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

が得られる。$\mathfrak{g}$ の随伴群 (の適当な被覆) を G, G の中で $\mathfrak{k}$ に対応する部分群を K と書こう。これは単なる $G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}}$ の複素化にすぎない[4]。すると、K は随伴作用によって $\mathfrak{s}$ に自然に働く。$\mathcal{N}(\mathfrak{s}) = \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{s}$ を $\mathfrak{s}$ の巾零元全体とする。これはやはり代数多様体であるが、もはや既約とは限らない。K は $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ に作用しているが、$\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ の巾零 K 軌道は有限個しかないことが Kostant-Rallis によって分かっている。

$\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ の巾零 K 軌道であって、K の作用に関して球多様体になるものを**球巾零軌道 (spherical nilpotent orbit)** と呼ぼう。G の作用と紛わしい場合には特に**球巾零 K 軌道**と書くことにする。よく知られている球巾零軌道の例として、自明な軌道と極小巾零軌道がある。

Example 2.1. (1) **自明な軌道** $\{0\}$ は明らかに球巾零軌道である。自明な軌道自身はつまらないが、後で分かるように巾零軌道の持ち上げによって球巾零軌道を産み出すもととなる重要な軌道である。(例 4.9 参照)
(2) 自明な軌道以外の巾零軌道のうち、次元の最小なもの (= 閉包の包含関係について極小なもの) を**極小巾零軌道**と呼ぶ。極小巾零軌道は球巾零軌道である (Vogan [V1])。$\mathfrak{g}$ が単純であれば、$\mathfrak{g}$ の極小巾零 G 軌道と $\mathfrak{s}$ の共通部分は高々二つの連結成分を持つ。これらの連結成分が、極小巾零 K 軌道である。この例は G の球巾零軌道を $\mathfrak{s}$ に制限しても球巾零軌道であることを示唆しているように見える。

上の例でも触れたが、対称対の軌道を考える際に G 軌道との関係を見るのは重要である。その際、次の原理が役に立つ ([V2, Cor. 5.20])。

Theorem 2.2. $\mathbb{O}^G = \mathrm{Ad}\, G \cdot x$ を $x \in \mathfrak{g}$ を通る G 軌道とする。このとき $\mathbb{O}^G \cap \mathfrak{s}$ は有限個の K 軌道の和に分解し、それらを $\{\mathbb{O}_i^K \mid 1 \leq i \leq l\}$ と書くと、$2 \dim \mathbb{O}_i^K = \dim \mathbb{O}^G$ $(1 \leq i \leq l)$ が成り立つ。

実は、G 軌道上の自然なシンプレクティック構造を考えると、各 $\mathbb{O}_i^K$ は $\mathbb{O}^G$ の Lagrange 部分多様体になっていることが分かるが、我々はこの事実を必要としない。

この定理と対応して、古典型の Lie 環の場合には、巾零 K 軌道が **符号つきの Young 図形 (signed Young diagram)** で分類されている。つまり、巾零 G 軌道がその Jordan タイプ (= Young 図形) で分類され、さらにそれを $\mathfrak{s}$ に制限したときに、その連結成分を符号をつけて表すのである。一般の古典群の場合は [CM] を参照していただくとして、ここでは $U(p,q)$ の場合の分類を述べておく。

Example 2.3. $G_{\mathbb{R}} = U(p,q)$ とすると、$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{p+q}, \mathfrak{k} = \mathfrak{gl}_p \oplus \mathfrak{gl}_q$ であって、$\mathfrak{s} = M_{p,q} \oplus M_{p,q}^*$ である。ただし $M_{p,q}$ は $p \times q$ の複素行列の全体であって、$K = GL_p \times GL_q$ は $M_{p,q} \simeq \mathbb{C}^p \otimes (\mathbb{C}^q)^*$

[4]厳密には被覆の問題と連結成分の問題がある。もっとも、被覆の問題は随伴作用を考える場合には障害にならない。以下では $G_{\mathbb{R}} = U(p,q)$ を考えるが、このときには $G = GL_{p+q}(\mathbb{C})$ ととる。

によって作用する。

$$\mathfrak{g} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathfrak{gl}_p & M_{p,q} \\ \hline M_{q,p} & \mathfrak{gl}_q \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathfrak{gl}_p & \\ \hline & \mathfrak{gl}_q \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline & M_{p,q} \\ \hline M_{q,p} & \\ \hline \end{array} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s} \qquad (M_{q,p} = M^*_{p,q})$$

$n = p + q$ とし、巾零 G 軌道を表す Young 図形を分割と同一視して $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と書いておこう。この軌道を $\mathfrak{s}$ に制限すると、いくつかの巾零 K 軌道に分解するが、分解した各軌道を、この Young 図形の各々の箱の中に符号 $\pm$ を配置して記述する。ただし、その際次の規則に従う。

(i) 箱の中に入れる $+$ の個数は p 個で、$-$ の個数は q 個である。
(ii) 各行において、$+$ と $-$ は交互に並ぶ。
(iii) 同じ長さの行を入れ替えた符合つき Young 図形は同一視する (同一の軌道を表す)。

このようにして符号つきの Young 図形によって分類された巾零 K 軌道の閉包関係は、太田琢也 ([O1]) によって組み合わせ論的に記述できることが分かっている。ここでは $U(3,2)$ の場合の全軌道と、その閉包関係を記しておこう (次ページの図 1 参照)。

我々が以下考える問題を一般的に述べると次のようになる。

Problem 2.4. $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ の巾零 K 軌道のうち、K の作用に関して球巾零軌道になるものを分類せよ。

次の簡単な事実に注意しておく。

Lemma 2.5. 上の設定の下に、$\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ の巾零 K 軌道を考える。
(1) 巾零軌道 $\mathbb{O}$ に対して、次の (a)–(c) は互いに同値である。

(a) $\mathbb{O}$ は球巾零軌道である。

(b) $\mathfrak{s}$ における閉包 $\overline{\mathbb{O}}$ は球多様体である。

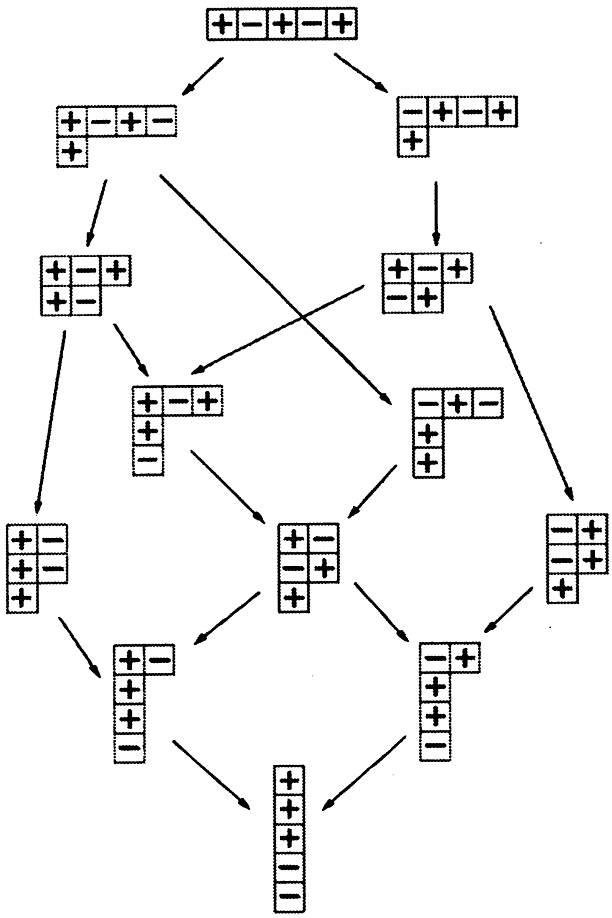
(c) $\overline{\mathbb{O}}$ の正則関数環 $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}}]$ は K 加群として重複度自由に分解する。

(2) $\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2$ を二つの巾零軌道とする。このとき、$\mathbb{O}_2$ が球巾零軌道であって、閉包関係 $\overline{\mathbb{O}_2} \supset \overline{\mathbb{O}_1}$ が成り立っていれば $\mathbb{O}_1$ も球巾零軌道である。

Proof. (1) の (a) と (b) の同値性は定義より明らか。(b) と (c) の同値性は [K, Th. 3.1] の証明とまったく同様にして示すことができる。
(2) は K 同変な全射 $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_2}] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_1}]$ があることと、$\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_2}]$ が重複度自由に分解すること、および (1) の同値性から従う。 □

補題の (2) は、$\mathbb{O}_1$ が球巾零軌道でなく、しかも閉包関係 $\overline{\mathbb{O}_1} \subset \overline{\mathbb{O}_2}$ が成り立っていれば $\mathbb{O}_2$ も球巾零軌道ではないことと同値だが、これは球巾零軌道が“小さい”軌道であることを示唆している。実際、球巾零軌道はそれほどたくさんは存在しない。

FIGURE 1. $U(3,2)$ の巾零 K 軌道と閉包関係



3. 主結果: $U(p,p)$ の球巾零軌道の分類

我々の主結果を述べよう。

Theorem 3.1. $U(p,p)$ の球巾零 K 軌道は、次の分割に対応する符合つき Young 図形で尽くされる。Young 図形の符号は、例 2.3 の (i)–(iii) を満たす限り、任意につけてよい。

$$[3^{\varepsilon}\cdot 2^{k}\cdot 1^{l}] \qquad \varepsilon=0,1\,;\ k,l\geq 0\,;\ 3\varepsilon+2k+l=2p$$

この定理と定理 1.5 を比較することによって、 $U(p,p)$ の場合には、球巾零 G 軌道と球巾零 K 軌道の間に次の二つの事実が成り立っていることが分かる。

- $\mathbb{O}^G$ を巾零 G 軌道とする。$\mathbb{O}^G\cap\mathfrak{s}$ の連結成分の一つが球巾零 K 軌道ならば、他の連結成分もすべて球巾零軌道である。
- $\mathbb{O}^G$ を球巾零 G 軌道とすると、$\mathbb{O}^G\cap\mathfrak{s}$ の連結成分はすべて球巾零 K 軌道である。

しかし、特に注目すべきことは、$\mathbb{O}^G$ が球巾零 G 軌道でなくても、$\mathbb{O}^G \cap \mathfrak{s}$ の連結成分が球巾零 K 軌道になりうることである。この gap が何を意味しているかについては、これからの考察を待ちたい。

さて、以下主定理の証明の粗筋を述べるが、証明の戦略は次のようになっている。

[戦略]

(1) 球巾零軌道の良い族を多数構成する。これには巾零軌道の持ちあげを利用する。

(2) 球巾零軌道に決してならない軌道を特定、除外する。ここでは、単に次元の計算によってこれを行なう。

(3) 残りの軌道を各個撃破する。

実は最後の項は $U(p,p)$ の場合には出てこない。これが $U(p,p)$ の事情が簡単な理由である。最初の二つの項については $U(p,q)$ でもそのまま使えるので、$U(p,q)$ についての分類もそう難しくないだろうと考えている。

以下、項目の (1), (2) について解説しよう。特に巾零軌道の持ち上げは、それ自身非常に面白い話題である。

4. $U(p,q)$ の巾零軌道の持ち上げ

I 型の reductive dual pair $(G_\mathbb{R}, G'_\mathbb{R}) = (U(p,q), U(r,s))$ を考える。Howe による dual pair の理論をここで紹介することは筆者の手にあまるので詳しくは述べないが、この二つの群は、これらを含む大きなシンプレクティック群 $Sp(2(p+q)(r+s), \mathbb{R})$ の中で、互いに相手の交換子になっている。このようなときには、自然にモーメント写像と呼ばれる、$(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')$ の double fibration が構成できる。ここで、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ は $G_\mathbb{R}$ の複素化された Cartan 分解を表し、$G'_\mathbb{R}$ のそれを $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{s}'$ と書く。その他、以前に $G_\mathbb{R}$ に対して定義された記号も適宜 $'$ をつけて、説明なく使うことにする。

一般論はさておき、モーメント写像を $(G_\mathbb{R}, G'_\mathbb{R}) = (U(p,q), U(r,s))$ の場合に具体的に書き下すと次のように全く初等的な写像になる。まず、$W = M_{p+q,r+s}$ を $(p+q) \times (r+s)$ 行列の空間とし、$X \in W$ を $(p,q) \times (r,s)$ にブロック分けして、

$$W = M_{p+q,r+s} \ni X = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r & s \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array}$$

と書いておく。このとき、$K \times K' = (GL_p \times GL_q) \times (GL_r \times GL_s)$ は W へ次のように作用する。

$$((k_1,k_2),(h_1,h_2)) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 A\, {}^t h_1 & {}^t k_1^{-1} B h_2^{-1} \\ {}^t k_2^{-1} C h_1^{-1} & k_2 D\, {}^t h_2 \end{pmatrix}$$

$$\big((k_1,k_2) \in GL_p \times GL_q, (h_1,h_2) \in GL_r \times GL_s\big)$$

以上の設定の下に、**モーメント写像**$\varphi : W \to \mathfrak{s}, \psi : W \to \mathfrak{s}'$ を次の式で定義する。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & W = M_{p+q,r+s} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathfrak{s} = M_{p,q} \oplus M_{q,p} & & M_{r,s} \oplus M_{s,r} = \mathfrak{s}' \end{tikzcd}$$

$$M_{p+q,r+s} \ni X = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} r & s \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array} \text{ に対して}$$

$$\varphi(X) = (A\,{}^tC, D\,{}^tB) \in M_{p,q} \oplus M_{q,p}$$
$$\psi(X) = ({}^tAB, {}^tDC) \in M_{r,s} \oplus M_{s,r}$$

モーメント写像は次の性質を持っている。

Proposition 4.1. モーメント写像 φ, ψ は閉写像であり、$\varphi : W \to \varphi(W) \subset \mathfrak{s}$ は K 同変であって、K' によるアフィン商写像である。また、ψ は K' 同変であって、K によるアフィン商写像である。

$\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ には K, K' が随伴作用で働いていたことに注意しよう。上の同変性はこの作用に関するものである。したがって、$\mathfrak{s}$ への K' の作用を自明に取れば、φ は $K \times K'$ 同変とみなすこともできる。ψ についても同様である。

モーメント写像の構成と、シンプレクティック幾何におけるモーメント写像との同一視については、たとえば、[O2], [O3], [NZ1], [NZ2] などを参照して欲しい。次の補題は初等的に分かる。

Lemma 4.2. $\varphi\big(\psi^{-1}(\mathcal{N}(\mathfrak{s}'))\big) \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s})$

さて、巾零軌道の持ちあげ (theta lifting) について述べるため、stable range の仮定をおくことにする。つまり、以下我々は次を仮定する。

Assumption 4.3. 対 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}) = (U(p,q), U(r,s))$ は $r + s \leq \min\{p,q\}$ を満たすと仮定する。このとき、この対は **stable range** にあるという ([L])。

Theorem 4.4. 対 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}) = (U(p,q), U(r,s))$ は stable range にあるとする。

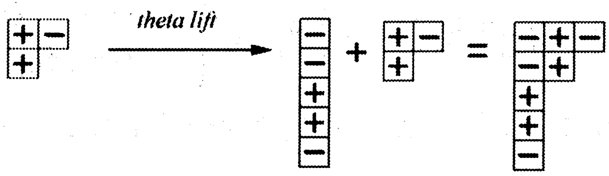
このとき、任意の巾零 K' 軌道 $\mathbb{O}' \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s}')$ に対して、ある巾零 K 軌道 $\mathbb{O} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s})$ が存在し、$\varphi\big(\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'})\big) = \overline{\mathbb{O}}$ が成り立つ。巾零軌道 $\mathbb{O}$ を $\mathbb{O}'$ の持ち上げ **(theta lift)** と呼ぶ。

実際に theta lift を計算するには、符号つきの Young 図形を用いるのが便利である。

Lemma 4.5. 符号つきの Young 図形 D に対応する巾零軌道を $\mathbb{O}_D$ と書き、$\mathbb{O}'_{D'} \to \mathbb{O}_D$ を巾零軌道の持ち上げとする。このとき D は、D' に $(p+q) - (r+s)$ 個の箱を持つ列を第一列としてつけ加えて得られる図形に等しい。

このようにして D' に第一列をつけ加えると、第一列目の箱の符号は他の箱の符号および符号のつけ方の制約 (例 2.3 (i)–(iii)) から一意的に決まってしまうことに注意する。

Example 4.6. 次の例では、$U(2,1)$ の巾零軌道を、$U(4,4)$ の巾零軌道に持ち上げている。第一列の符合は一意的に決まってしまうことが容易に見て取れる。



さて、対 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ のうちの小さいの方の巾零軌道 $\mathbb{O}'$ は常に持ち上げ可能であるが、大きな方の巾零軌道 $\mathbb{O}$ が全て得られるわけではない。そこで theta lifting として得られる軌道 $\mathbb{O}$ の特徴付けをまず行なっておこう。

巾零軌道 $\mathbb{O} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s})$ に対応する分割を $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(n = p+q)$ と書き、その転置を $\mu = {}^t\lambda$ と書こう。分割の転置は Young 図形で言えば、逆対角線に沿って折り返す操作になっていることに注意しておく。すなわち、μ_1 は Young 図形の深さ (= 分割の長さ) を表している。

Lemma 4.7. 上の設定の下に、巾零軌道 $\mathbb{O} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s})$ が stable range となるような適当な (r,s) に対して theta lift として書けるための必用十分条件は $\mu_1 \geq \max\{p,q\}$ となることである。

さて、$\mathbb{O}' \to \mathbb{O}$ を theta lift としよう。このとき、軌道の閉包上の正則関数環同士の対応 $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}}] \Longleftrightarrow \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}'}]$ を正確に書き下すことができる。

Theorem 4.8 (Zhu-N). $r+s \leq \min\{p,q\}$ とし、$\mathbb{O}' \to \mathbb{O}$ を stable range における巾零軌道の持ち上げとする。このとき、次が成り立つ。

$$\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}}] = \sum_{\substack{\alpha,\gamma \in P_r \\ \beta,\delta \in P_s}}^{\oplus} \mathrm{Hom}_{K'}\left((\tau_\alpha^{(r)*} \otimes \tau_\gamma^{(r)}) \boxtimes (\tau_\beta^{(s)} \otimes \tau_\delta^{(s)*}), \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}'}]\right) \otimes \left(\tau_{\alpha\odot\beta}^{(p)}{}^* \boxtimes \tau_{\gamma\odot\delta}^{(q)}\right)$$

$$(K = GL_p \times GL_q\text{-加群としての分解、}K' = GL_r \times GL_s)$$

ここに、P_k は長さが k 以下の分割の全体を表し、自然に $GL_m (m \geq k)$ の既約有限次元表現の最高ウェイトとみなす。また $\tau_\lambda^{(m)}$ $(\lambda \in P_k)$ はその (有限次元) 既約最高ウェイト表現を表している。記号 $\odot$ は、$\alpha \in P_r, \beta \in P_s$ に対して、

$$\alpha \odot \beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0, -\beta_s, \ldots, -\beta_1) = (\alpha, 0, \beta^*)$$

を表している[5]。

[5]この表記法では、真中に挟み込むゼロの個数によって $\alpha \odot \beta$ の長さが変ることに注意する。したがって、$\tau_{\alpha\odot\beta}^{(p)}$ を考えるときには、真中にゼロを $p-(r+s)$ 個挟み込むことになる。

Proof. この定理の証明については、[N2], [NZ2] を参照して欲しい。 □

Example 4.9. **自明な軌道の持ちあげ**:
$\mathcal{O}' = \{0\}$ を自明な軌道として、その theta lift を $\mathcal{O}$ とする。すると $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}'}] = \mathbb{C}$ は自明な表現となるので、定理の式において、

$$\operatorname{Hom}_{K'}\left((\tau_\alpha^{(r)*} \otimes \tau_\gamma^{(r)}) \boxtimes (\tau_\beta^{(s)} \otimes \tau_\delta^{(s)*}), \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}'}]\right) = \begin{cases} \mathbb{C} & (\alpha = \gamma \text{ かつ } \beta = \delta \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。したがって定理より $K = GL_p \times GL_q$ の表現として、

$$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}] = \sum_{\substack{\alpha \in P_r \\ \beta \in P_s}}^{\oplus} \tau_{\alpha\odot\beta}^{(p)}{}^* \boxtimes \tau_{\alpha\odot\beta}^{(q)}$$

と分解することが分かる。特にこの分解は重複度自由なので、$\mathcal{O}$ は球巾零軌道である (補題 2.5 (1) 参照)。

この定理 4.8 を用いることによって、theta lift として表されている場合には巾零軌道の閉包上の正則関数環が具体的に計算でき、さらにそれが重複度自由であれば、球巾零軌道であることが判定できる。次の定理はそのようにして case-by-case の計算で示すことができる。

Theorem 4.10. $G_{\mathbb{R}} = U(p,q)$ で考える。$\mathcal{O} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s})$ を stable range における巾零軌道の持ち上げとする (補題 4.7 参照)。このとき、$\mathcal{O}$ が球巾零軌道であることと、$\mathcal{O}$ の Jordan タイプをあらわす分割が

$$[3^\varepsilon \cdot 2^k \cdot 1^l] \qquad \varepsilon = 0, 1;\ k, l \geq 0;\ 3\varepsilon + 2k + l = p + q$$

となっていることは同値である。

Remark 4.11. この定理は一見主定理 3.1 と同じように見えるが、群は一般の $U(p,q)$ でよい。ただし、巾零軌道は **theta lift として表されるものだけ**を扱っている点に注意する。また、符号数の制約があるので、上で示した Jordan タイプすべてが巾零 K 軌道の Jordan タイプとして可能ではないことにも注意する。

この定理によって、主定理における $U(p,p)$ の巾零軌道はすべて球巾零軌道になることが分かるが、あとは、$p = q$ のときに、theta lifting として得られないような巾零軌道が球巾零軌道ではないことを確かめておく必要がある。それについて以下述べよう。

5. $U(p,p)$ の球巾零軌道の分類

$G_{\mathbb{R}}, G, K$ 等は §2 の通りとし、$B_K \subset K$ を K の Borel 部分群とする。

Lemma 5.1. 巾零 K 軌道 $\mathcal{O}$ に対して、$\dim \mathcal{O} \geq \dim B_K$ ならば、$\mathcal{O}$ は球巾零軌道では

Proof. 球巾零軌道の定義は B_K が稠密開軌道を持つということなので、$\dim \mathbb{O} > \dim B_K$ ならば、$\mathbb{O}$ は球巾零軌道ではないのは明らかである。しかし、稠密開 B_K 軌道の代表元としてトーラスのウェイトベクトルが取れること、さらに B_K を適当に取り替えることにより、このトーラスは B_K に含まれるとしてよいことから、実際には稠密解軌道の次元は $\dim B_K - 1$ 以下であることが分かる。これより補題が従う。 □

Lemma 5.2. $G_{\mathbb{R}} = U(p,q)$ の巾零 K 軌道を $\mathbb{O}$ とし、$\mathbb{O}$ の Jordan タイプをあらわす分割を λ、$\mu = {}^t\lambda$ とおく。すると、このとき次が成り立つ。

$$\dim \mathbb{O} \geq \dim B_K \iff 2pq - (p+q) \geq \sum_{i=1}^{l} \mu_i^2 \tag{5.1}$$

ただし、$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ と書いた。

Proof. $\mathbb{O}$ の生成する G 軌道 $\mathbb{O}^G$ については、次元公式がよく知られていて、

$$\operatorname{codim} \mathbb{O}^G = \sum_{i=1}^{l} \mu_i^2$$

となっている (例えば、[CM, Th. 6.1.3] 参照)。一方、定理 2.2 により、$2\dim \mathbb{O} = \dim \mathbb{O}^G$ となっていることに注意する。後は Borel 部分群の次元だが、$K = GL_p \times GL_q$ なので、$\dim B_K = p(p+1)/2 + q(q+1)/2$ である。これらの次元と前補題を組み合わせればよい。 □

Corollary 5.3. $G_{\mathbb{R}} = U(p,p)$ (i.e., $p = q$) に対して、$p \geq 3$ ならば stable range からの theta lift でない巾零 K 軌道は球巾零軌道ではありえない。

Proof. 補題 4.7 より、theta lift でないことは $\mu_1 \leq p - 1$ と同値なので、あとはこれを用いて上の不等式 (5.1) を確認すればよい。 □

この系と定理 4.10 より主定理 3.1 は従う。

References

[BK] R. Brylinski and B. Kostant, Minimal representations, geometric quantization, and unitarity. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **91**(1994), 6026 – 6029.

[CM] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent Orbits in semisimple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold, 1993.

[HU] Roger Howe and Tôru Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions. *Math. Ann.*, **290** (1991), 565 – 619.

[HL] J.-S. Huang and J.-S. Li, Unipotent representations attached to spherical nilpotent orbits, *Amer. Jour. Math.*, **121** (1999), no. 3, 497–517.

[K] Friedrich Knop, Some remarks on multiplicity free spaces. In *"Representation Theories and Algebraic Geometry"* edited by A. Broer and A. Daignault, Kluwer Acad. Publ., 1998, pp. 301 – 317.

[L] J.-S. Li, Singular unitary representations of classical groups. *Invent. Math.*, **97** (1989), 237 – 255.

[N1] Kyo Nishiyama, Multiplicity-free actions and the geometry of nilpotent orbits. ***Math. Ann.***, **318** (2000), 777 – 793.

[N2] Kyo Nishiyama, Theta lifting of two-step nilpotent orbits for the pair $O(p,q) \times Sp(2n,\mathbb{R})$. In ***"Infinite Dimensional Harmonic Analysis"***, Transaction of a Japanese-German Symposium (Kyoto, September 1999), Kyoto 1999, pp. 278 – 289.
`http://w3rep.math.h.kyoto-u.ac.jp/ kyo/mypaper.html#JSPS`

[N3] 西山 享, 巾零軌道とリー群の表現論, In "第45回代数学シンポジウム報告集"(九州大学), pp. 121 – 141. `http://w3rep.math.h.kyoto-u.ac.jp/ kyo/mypaper.html#algsympo2000`

[NOT] Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai and Kenji Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules — Hermitian symmetric case —. ***Astérisque***, **273**(2001), 13 – 80.

[NZ1] Kyo Nishiyama and C.-B. Zhu, Theta lifting of holomorphic discrete series, (The case of $U(p,q) \times U(n,n)$). ***Trans. AMS.***, **353** (2001), 3327-3345.

[NZ2] Kyo Nishiyama and C.-B. Zhu, Theta lifting of nilpotent orbits and singular highest weight modules, in preparation.

[O1] Takuya Ohta, The closures of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities. ***Tôhoku Math. J.***, **43**, 161 – 211.

[O2] Takuya Ohta, Nilpotent orbits of $\mathbb{Z}_4$-graded Lie algebra and geometry of the moment maps associated to the dual pair $(U(p,q), U(r,s))$, in preparation.

[O3] Takuya Ohta, Nilpotent orbits of $\mathbb{Z}_4$-graded Lie algebra and geometry of the moment maps associated to the dual pairs $(O(p,q), Sp(2n,\mathbb{R}))$ and $(O^*(2n), Sp(p,q))$, in preparation.

[P] Dmitri I. Panyushev, On spherical nilpotent orbits and beyond. ***Ann. Inst. Fourier, Grenoble***, **49** (1999), 1453 – 1476.

[V1] David A. Vogan Jr., Singular unitary representations. In ***"Non commutative harmonic analysis and Lie groups"***, LNM **880**(1981), pp. 506 – 535.

[V2] David A. Vogan, Jr., Associated varieties and unipotent representations. In ***"Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989)"***, pp. 315–388, Progr. Math. **101**, Birkhäuser, 1991.

KYO NISHIYAMA, FACULTY OF IHS, KYOTO UNIVERSITY, SAKYO, KYOTO 606-8501, JAPAN
E-mail address: `kyo@math.h.kyoto-u.ac.jp`