数理解析研究所講究録 1245 巻 2002 年 52-58

表現の制限と微分作用素

藤原　英徳(Hidenori Fujiwara)
近畿大学・九州工学部
School of Engineering in Kyushu, Kinki Univ.

表現の誘導と制限の間に Frobenius の相互律のように強い双対性のあることは周知の事実である。Corwin-Greenleaf は巾零リー群の単項表現に伴う直線束上の不変微分作用素の研究において基本的とも言える論文 [5] において、誘導表現に対し得られた彼等の成果を手に、表現の制限について何が言えるかと問いかけている。筆者は最近フランスの Lion, Magneron, Mehdi 諸氏 との共同研究 [10] で巾零リー群の単項表現が既約表現への分解において有限重複度を持つことと、随伴する不変微分作用素環が可換であることが同値であることを知った (cf. [9]) 。ここでは誘導表現に対するこの研究過程を表現の制限に対して翻訳し、もって上記問いかけに答えたい。この仕事はチュニジア・スファックス大学の Ali Baklouti 氏との共同研究 [1] である。

以下 $G=\exp\mathfrak{g}$ は常にリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ連結、単連結な有限次元実巾零リー群とし、Kirillov [11] による軌道の方法を用いることとする。G のユニタリ表現の部分群への制限を既約分解するため、$K=\exp\mathfrak{k}$ を G の任意の連結閉部分群とする。G のユニタリ双対を $\hat{G}$ で表す。$\pi\in\hat{G}$ の余随伴軌道 $\Omega(\pi)$ 上には G−不変測度、いわゆる Kostant 測度 [2] が存在することが容易に解るが、それに同値な有限測度 $\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}_\pi$ を $\Omega(\pi)$ 上で考え、これを $\mathfrak{g}^*$ 上の測度とみなそう。$p:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{k}^*$ を制限写像とし $\gamma=(\rho_K\circ p)_*(\tilde{\gamma})$ とおく。ここで $\rho_K:\mathfrak{k}^*\to\hat{K}$ は K の Kirillov 写像を表す。さらに $\sigma\in\hat{K}$ の余随伴軌道 $\omega(\sigma)=(\rho_K)^{-1}(\sigma)\subset\mathfrak{k}^*$ を考え、$\Omega(\pi)\cap p^{-1}(\omega(\sigma))$ に含まれる K−軌道の個数を $n_\pi(\sigma)$ で表す。このとき $\hat{K}$ 上の測度 γ と関数 $n_\pi(\sigma)$ が $\pi\in\hat{G}$ の K への制限 $\pi|_K$ の既約分解を与

定理 1 ([3], [8]). $\pi|_K \cong \int_{\hat{K}}^{\oplus} n_\pi(\sigma)\sigma d\gamma(\sigma)$。

任意の $\ell\in\mathfrak{g}^*$ に対し、$\mathfrak{g}$ 上の双線形形式 B_ℓ を $B_\ell(X,Y)=\ell([X,Y])$ で定義しよう。軌道の方法における表現論的なさまざまな現象を演出するのが B_ℓ が余随伴軌道 $G\cdot\ell$ に与えるシンプレクティック構造である [7]。まず $\pi|_K$ が有限重複度をもつための条件を以下の形に述べておこう。

定義 1． 部分リー環 $\mathfrak{k}$ が $\ell\in\mathfrak{g}^*$ において余等方的であるとは、

$$\mathfrak{k}^\ell=\{X\in\mathfrak{g}:B_\ell(X,Y)=0,\forall Y\in\mathfrak{k}\}$$

が形式 B_ℓ に関して等方的部分空間であること。つまり $B_\ell(\mathfrak{k}^\ell,\mathfrak{k}^\ell)=\{0\}$ となることとする。

注意 1． この定義はDufloの定義 $\mathfrak{k}^\ell\subset\mathfrak{k}$ [6] よりやや広く、根基 $\mathfrak{g}(\ell)$ 分だけ自由度がある。

命題 1． $\pi|_K$ が有限重複度をもつ。$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{k}$ は $\Omega(\pi)$ 上 $\tilde{\gamma}$ に関して殆ど至る所余等方的である。

この結果をDufloの一般原理に沿って解釈すると次のようになる。我々は π を固定しているので、以下簡単のため $\Omega=\Omega(\pi)$ とする。任意の $\ell\in p(\Omega)\subset\mathfrak{k}^*$ に対し、$\omega=K\cdot\ell$、$\sigma=\rho_K(\ell)\in\hat{K}$ とする。また、$\ell\in\mathfrak{k}^*$ の K における固定化群を $K(\ell)$ で表す。

命題 2． $\pi|_K$ が有限重複度をもつ。$\Leftrightarrow$ $\tilde{\gamma}$ に関して殆ど至る所、$K(\ell)-$軌道は $\Omega\cap p^{-1}(\ell)$ の開集合である。また、この条件下で $\pi|_K$ における σ の重複度は $\Omega\cap p^{-1}(\ell)$ に含まれる $K(\ell)-$軌道の数である。

さてこの有限重複度の条件がその可換性と同値になるようなある $K-$不変微分作用素環を導入しよう。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の複素普遍包絡環とし、

$$\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}=\{A\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}):[A,Y]\in\ker\ \pi,\forall Y\in\mathfrak{k}\}$$

とおく。我々の扱うのは商環 $\mathcal{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}/\ker\ \pi$ の π による像 $D_\pi(G)^K$ である。

$$D_\pi(G)^K \cong \mathscr{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} \big/ \ker \pi = \left(\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \big/ \ker \pi \right)^K$$

である。ここに右辺は $\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \big/ \ker \pi$ の K-不変な元の全体である。

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},\ \dim \mathfrak{g}_k = k\ (0 \le k \le n) \qquad (☆)$$

を $\mathfrak{g}$ のイデアルの Jordan-Hölder 列とし、

$$\mathscr{I} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_d\} = \{1 \le i \le n : \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_i \ne \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{i-1}\}$$

とおく。$\mathfrak{k}_s = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{i_s}$ $(1 \le s \le d)$ として $\mathfrak{k}$ のイデアル列

$$\{0\} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{d-1} \subset \mathfrak{k}_d = \mathfrak{k},\ \dim \mathfrak{k}_s = s\ (1 \le s \le d)$$

を得、$Y_s \in \mathfrak{k}_s \setminus \mathfrak{k}_{s-1}$ $(1 \le s \le d)$ を選んで $\mathfrak{k}$ のマルツエフ基底 $\{Y_s : 1 \le s \le d\}$ をうる。

後の主要定理の証明のため、Pedersen [12] の結果を一般化しておく。

定理 2．$\tilde{\gamma}$ に関し殆どすべての $\ell \in \Omega$ について $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k}_k \ne \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k}_{k-1}$ とする。このとき $W \in \mathscr{U}(\mathfrak{k}_k) \cap \ker \pi$ で $W = \sum_{j=0}^{m} P_j Y_k^j$, $P_j \in \mathscr{U}(\mathfrak{k}_{k-1})$ $(0 \le j \le m)$, $\pi(P_m) \ne 0$ の形のものが存在する。

さて

$$\mathscr{J} = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_q\} = \{1,2,\ldots,n\} \setminus \mathscr{I} \quad (q = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k})$$

とおき、$\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{k}_{d+r} = \mathfrak{k} + \mathfrak{g}_{j_r}$ $(1 \le r \le q)$ を構成する。このとき $\mathfrak{g}$ の部分環列

$$\{0\} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{d-1} \subset \mathfrak{k}_d = \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}_{d+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{n-1} \subset \mathfrak{k}_n = \mathfrak{g},\ \dim \mathfrak{k}_r = r\,(0 \le r \le n)$$

は $\mathfrak{k}$ の随伴作用に関しては Jordan-Hölder 列である。したがって $X_k \in \mathfrak{k}_k \setminus \mathfrak{k}_{k-1}$ $(1 \le k \le n)$ を選んで構成する $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_k : 1 \le k \le n\}$ は $\mathfrak{k}$ の作用に関する Jordan-Hölder 基底である。射影 $p_k : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{k}_k^*$ $(1 \le k \le n)$ は K-作用と可換であり、$\ell \in \mathfrak{g}^*$ に対して $e_k(\ell) = \dim K \cdot p_k(\ell)$ $(1 \le k \le n)$ とおいて n 個の非負整数の組 $e(\ell) = \left(e_1(\ell), \ldots, e_n(\ell)\right)$ をうる。逆に任意の n 個の非負整数の組 $e = (e_1, \ldots, e_n)$ に対し、K-軌道の層

$$U_e = \{\ell \in \mathfrak{g}^* : e_k(\ell) = e_k,\ 1 \le k \le n\}$$

をうる。このとき、$\Omega \cap U_e$ が Ω の Zariski 開集合となる層 U_e が一つ唯一つ存在する。この層 U_e についてジャンプ指数の集合を

$$S(e) = \{1 \le k \le n : e_{k-1} \ne e_k\}、$$

非ジャンプ指数の集合を

$$T(e)=\{1\le k\le n: e_{k-1}=e_k\}$$

とおく。ただし $e_0=0$ とする。すると、誘導表現の場合と同様、定理2を用いて我々は次をうる。

定理 3． 部分環 $\mathfrak{k}_{k-1}$ から $\mathfrak{k}_k$ に移るとき、我々の微分作用素環 $D_\pi(G)^K$ は、$k\in T(e)$ なら拡大し、$k\in S(e)$ ならそのままである。より詳しく、

（1）もし $k\in T(e)$ ならば、

$$\left(\mathscr{U}(\mathfrak{k}_k)\big/\mathscr{U}(\mathfrak{k}_k)\cap\ker\pi\right)^K\neq\left(\mathscr{U}(\mathfrak{k}_{k-1})\big/\mathscr{U}(\mathfrak{k}_{k-1})\cap\ker\pi\right)^K$$

であり、$W\in\mathscr{U}(\mathfrak{k}_k)\cap\mathscr{U}_\pi(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ で、$W=aX_k+b,\ a,\ b\in\mathscr{U}(\mathfrak{k}_{k-1}),\ \pi(a)\neq 0$ の形のものがある。

（2）もし $k\in S(e)$ ならば、

$$\left(\mathscr{U}(\mathfrak{k}_k)\big/\mathscr{U}(\mathfrak{k}_k)\cap\ker\pi\right)^K=\left(\mathscr{U}(\mathfrak{k}_{k-1})\big/\mathscr{U}(\mathfrak{k}_{k-1})\cap\ker\pi\right)^K$$

である。

以上の準備の下、我々は目標とする次の結果をうる。

定理 4． $\pi|_K$ が有限重複度をもつ。$\Leftrightarrow$　$D_\pi(G)^K$ は可換である。

さて以上の議論の延長線上で $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ における $\mathfrak{k}$ の中心化環の可換性を調べよう。$\mathfrak{g}^*$　において余随伴軌道が最大次元をもつようなの元のなすZariski 開集合を $\mathcal{O}$ で表す。任意の $\phi\in\mathcal{O}$ に対し

$$d_K(\phi)=\max_{\ell\in G\cdot\phi}\ \dim(K\cdot\ell),\quad d'_K(\phi)=\max_{\ell\in G\cdot\phi}\ \dim(K\cdot p(\ell))$$

とおくと、d_K, d'_K は $\mathcal{O}$ 上 $G-$不変な整数値関数である。最後に

$$d_K=\max_{\phi\in\mathcal{O}} d_K(\phi),\quad d'_K=\max_{\phi\in\mathcal{O}} d'_K(\phi)$$

とおき

$$\mathcal{Z}=\{\phi\in\mathcal{O}:\ d_K(\phi)=d_K,\ d'_K(\phi)=d'_K\}$$

を考える。すると $\mathcal{Z}$ は $G-$不変で、ある Zariski 開集合 $\tilde{\mathcal{Z}}$ を含み、$\tilde{\mathcal{Z}}$ 上 $G-$軌道、$K-$軌道及び $\mathfrak{k}^*$ へ射影して得られる $K-$余随伴軌道のいずれも最大次元をもっている。$\tilde{\mathcal{Z}}$ の元から Kirillov 写像で得られる G の既約ユニタリ表現を $K-$generic であると言うことにする。

定理 5．次の３つの主張は互いに同値である。

(1) G のプランシュレル測度に関し殆どすべての $\pi\in\hat{G}$ に対し、$\pi|_K$ は有限重複度をもつ。

(2)$\pi|_K$ が有限重複度をもつような K－generic な表現 $\pi\in\hat{G}$ が存在する。

(3) $\mathfrak{k}$ の $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ における中心化環は可換である。

幾つか簡単な例を見てみよう。

例 1．$\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{g}$ の中心に含まれるとする。π がユニタリ指標のときそのときに限り $\pi|_K$ が有限重複度をもつ。このとき、任意の $\ell\in\Omega(\pi)$ に対し $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}'$ であり、多元環 $D_\pi(G)^K$ は自明な $\mathbb{C}$ に他ならない。逆にもし π がユニタリ指標でなければ、$D_\pi(G)^K\cong\mathscr{U}(\mathfrak{g})/\ker\pi$ は非可換である。

例 2．典型的巾零リー環として $\mathfrak{g}$ を５次元 Heisenberg リー環とする、つまり $\mathfrak{g}=\langle P_1, P_2, Q_1, Q_2, Z\rangle_{\mathbb{R}}$；$[P_i,Q_j]=\delta_{i,j}Z$ $(1\le i,j\le 2)$。更に $\dim\pi=\infty$ と仮定する。

(1) $\mathfrak{k}=\langle P_1, P_2\rangle_{\mathbb{R}}$ とすると、$\pi|_K$ は有限重複度をもち、多元環 $D_\pi(G)^K$ は可換である。

(2) $\mathfrak{k}=\langle P_1, Q_1\rangle_{\mathbb{R}}$ とすると、$\pi|_K$ は無限重複度をもち、多元環 $D_\pi(G)^K$ は非可換である。

例 3．$\mathfrak{g}=\langle X_0, X_1, \ldots, X_n\rangle_{\mathbb{R}}$; $[X_0,X_j]=X_{j+1}$ $(1\le j\le n-1)$（フィリフォーム・リー環）とし、$\dim\pi=\infty$ と仮定する。このとき、$\dim\Omega(\pi)=2$。$\mathfrak{k}$ として $\mathfrak{g}$ の可換イデアル $\sum_{j=1}^{n}\mathbb{R}X_j$ に含まれる１次元部分リー環 $\mathbb{R}Y$ をとる。

(1) $\ell([X_0,Y])\neq 0$ となる $\ell\in\Omega(\pi)$ が存在するとき、$\pi|_K$ は有限重複度をもち、多元環 $D_\pi(G)^K$ は可換である。

(2) 任意の $\ell\in\Omega(\pi)$ に対し $\ell([X_0,Y])=0$ となるとき、$\pi|_K$ は無限重複度をもち、多元環 $D_\pi(G)^K$ は非可換である。

定理４及び定理５の結果は巾零リー群を超えて、例えば完全可解リー群に対して成り立つであろうか？これらの結果は最初に触れた誘導表現

に関する結果同様指数型可解リー群に対してはもはや成立しない。これは、巾零リー群の場合には無限重複度といえば連続濃度型の一種類しかありえないが、指数型可解リー群の場合には可算無限型と連続濃度型の二種類が存在し、前者の場合問題の各 K-軌道は有限重複度の場合同様それを含むG-軌道のシンプレクティック構造に関して極大等方的になっているという事情によるものと思える。最後にその辺りの例を見ておくことにしよう。

例 4． $\alpha \neq 0$ を実数とし、$\mathfrak{g}_\alpha = \langle T, X, Y \rangle_{\mathbb{R}}$; $[T,X] = X - \alpha Y$, $[T,Y] = \alpha X + Y$ とおく。このとき対応する $G_\alpha = \exp \mathfrak{g}_\alpha$ は完全可解ではない指数型可解リー群である。$\mathfrak{g}_\alpha^*$ の元 $f_\theta = (\cos\theta)X^* + (\sin\theta)Y^*$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ から Kirillov 写像で得られる G_α の既約ユニタリ表現を π_θ とすれば、$\dim \pi_\theta = \infty$。今 $\mathfrak{k} = \mathbb{R}X$, $K = \exp \mathfrak{k}$ とおくと、制限 $\pi_\theta|_K$ は有限重複度をもつが、$D_\pi(G)^K \cong \mathbb{C}[X,Y]$（$X$, Y で生成される多項式環）は可換である。

さて、表現の誘導や制限と関連する不変微分作用素環の研究においては複素普遍包絡環$\mathscr{U}(\mathfrak{g})$の特別な元が重要な役割を果たす。巾零の場合、それらの元は Corwin-Greenleaf [5] において導入された。$\mathfrak{g}$ のイデアルの Jordan-Hölder 列 (☆) への G の随伴作用に関してその次元のなす n 個の非負整数の組 e を作り、以前同様対応する G-軌道の層 U_e を考える。$\ell \in U_e$ から構成される G の既約ユニタリ表現を π_ℓ とすると、定理２の箇所で触れたように、非ジャンプ指数の集合 $T(e)$ に属する各ステップ j において、Pedersen [12] は $\pi_\ell(X_j) = 0$ となる元 $X_j \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$ を構成した。無論 X_j は軌道 $G \cdot \ell$ に依存するが、Corwin-Greenleaf はこの X_j を修正し、$\mathfrak{g}^*$ のある Zariski 開集合と U_e との共通部分の任意の ℓ において $\pi_\ell(\tilde{X}_j)$ がスカラー作用素となるような元 $\tilde{X}_j$ を構成した。e-中心元と呼ばれるこれらの元 $\{X_j : j \in T(e)\}$ は $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ の中心元の拡張であり、ある意味で我々の不変微分作用素環の生成系を形成している。

巾零リー群を超えて問題を考えるとき、例えば $ax+b$ 群のように余随伴開軌道が存在すると $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ の中心は自明な $\mathbb{C}$ に一致してしまうが、上記 Pedersen や Corwin-Greenleaf の結果はどのように拡張されるのであろ

参考文献

[1] A. Baklouti et H. Fujiwara, Commutativité des opérateurs différentiels sur l'espace des représentations restreintes d'un groupe de Lie nilpotent, à paraître.

[2] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris, 1972.

[3] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Spectrum and multiplicities for restrictions of unitary representations of nilpotent Lie groups, Pacific J. Math. 135 (1988), 233 - 267.

[4] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Representations of Nilpotent Lie Groups and Their Applications, Part I: Basic theory and examples, Cambridge University Press, 1990.

[5] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 681 - 748.

[6] M. Duflo, Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, Acta Math., 149 (1982), 153 - 213.

[7] M. Duflo, Open problems in representation theory of Lie groups, edited by T. Oshima, 1986, 1 - 5.

[8] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, Invent. math., 104 (1991), 647 - 654.

[9] 藤原英徳、可解リー群の表現論、平成12年度表現論シンポジュウム講演集、19 - 32.

[10] H. Fujiwara, G. Lion, B. Magneron et S. Mehdi, Un critère de commutativité pour l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène nilpotent, C.R. Acad. Sci. Paris. Série I, 332 (2001), 597 - 600.

[11] A. A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Math. Nauk. 17 (1962), 57 - 110.

[12] N. Pedersen, On the infinitesimal kernel of irreducible representations of nilpotent Lie groups, Bull. Soc. Math. France 112 (1984), 423 - 467.