数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 134-138

楕円型微分方程式の解集合について

山形大・工　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
茨城大・工　岡　裕和 (Hirokazu Oka)
山形大・工　三浦　毅 (Takeshi Miura)

実 Banach 空間 E と $[0,1]\times E$ から E への連続関数 $f(t,x)$ 及び実数の組 (a,b,c,d) を考える。更に $f(t,x)$ は第 2 変数に関して Lipschitz 連続と仮定し、その Lipschitz 定数を L_f で表す。このとき次のような第 3 種問題 $(\#)=(\#;a,b,c,d)$:

$$u''(t)=f(t,u(t))\ (0\le t\le 1),\ au'(0)+bu(0)=0 \text{ and } cu'(1)+du(1)=0$$

が考えられる。この問題の解集合を $S_f=S_f(a,b,c,d)$ で表す。ここで解集合 S_f は上の方程式を満たす関数 $u\in C^2([0,1],E)$ の集合で、maximum norm の入った Banach 空間 $C([0,1],E)$ の部分集合と考える。

我々の目的は、E の任意の閉集合 C に対して、C と S_f とが同相となるような f が存在するか、また存在するとすればどんな f がそれを満たすのかという問題を考察することである。問題 $(\#;0,1,0,1)$ は Direchlet 問題と呼ばれている。このときは、もし $L_f<\pi^2$ であれば解集合の濃度は 1 であることが知られているが、[2] において Herzog と Lemmert は、E の任意の閉集合 C に $S_f(0,1,0,1)$ が同相となるような関数 f が存在し、しかもその Lipschitz 定数 L_f が π^2 にいくらでも近づけることができることを示した。

我々は先ず [2] の中で用いられた射撃関数の手法を応用して、次の結果を示す。

Theorem 1. Suppose $a^2+b^2\neq 0$ and $c^2+d^2\neq 0$. Then given any closed subset C of E, there is a continuous function $f:[0,1]\times E\to E$ which is Lipschitz continuous in its second variable such that S_f is homeomorphic to C.

Remark 1. If either $a=b=0$ or $c=d=0$ and $abcd\neq 0$, then S_f is homeomorphic to E for any continuous function $f:[0,1]\times E\to E$ which is Lipschitz continuous in its second variable. Moreover if $a=b=c=d=0$, then S_f is homeomorphic to $E\oplus E$ for any continuous function $f:[0,1]\times E\to E$ which is Lipschitz continuous in its second variable.

上記の結果は、E の任意の閉集合 C に対して、C と $S_f(a,b,c,d)$ とが同相となるような f の存在性を述べたものであるが、そのような f がどのくらいあるのか、また Lipschitz 定数はどのくらい小さくできるのかには言及していない。実際、実数の組 (a,b,c,d) が一般の場合は、これを決めることは難しい。しかしながら特殊なケースに対しては、ある程度決定することができる。次の結果はこのことを述べたものである。

Theorem 2. Let C be an arbitrary closed subset of E and $\varepsilon > 0$.

(i) There are many continuous functions $f : [0, 1] \times E \to E$ with $L_f \le \varepsilon$ such that $S_f(1, 0, 1, 0)$ is homeomorphic to C.

(ii) There are many continuous functions $f : [0, 1] \times E \to E$ with $L_f \le \frac{\pi^2}{4} + \varepsilon$ such that $S_f(1, 0, 0, 1)$ is homeomorphic to C. Similarily for $S_f(0, 1, 1, 0)$

(iii) (Herzog-Lemmert [2]) There are many continuous functions $f : [0, 1] \times E \to E$ with $L_f \le \pi^2 + \varepsilon$ such that $S_f(0, 1, 0, 1)$ is homeomorphic to C.

定理の証明の方針：

Let $x \in E$. Let $P_f = P_f(x\,; a, b, c, d)$ be a initial condition of $u''(t) = f(t, u(t))$ $(0 \le t \le 1)$ depending on x, a, b, c and d. Then there exists a unique solution $u \in C^2([0, 1], E)$, say $v_x = v_{x, f, a, b, c, d}$, which satisfies $u''(t) = f(t, u(t))$ $(0 \le t \le 1)$ and P_f. For the following 5-cases, we define P_f and N_f:

(1) $a \ne 0 : P_f = [u(0) = x$ and $u'(0) = -\frac{b}{a}x]$, $N_f = \{x \in E : cv_x'(1) + dv_x(1) = 0\}$.

(2) $a = 0, c \ne 0 :$ $P_f = [u(1) = x$ and $u'(1) = -\frac{d}{c}x]$, $N_f = \{x \in E : bv_x(0) = 0\}$.

(3) $a = c = 0, b \ne 0, d \ne 0 : P_f = [u(0) = 0$ and $u'(0) = \frac{\pi}{2}x]$, $N_f = \{x \in E : v_x(1) = 0\}$.

(4) $a = c = b = 0, d \ne 0 : P_f = [u(1) = 0$ and $u'(1) = -\frac{\pi}{2}x]$, $N_f = E$.

(5) $a = c = d = 0, b \ne 0 : P_f = [u(0) = 0$ and $u'(0) = -\frac{\pi}{2}x]$, $N_f = E$.

Set

$$\Phi_f(x) = v_x \quad (x \in E).$$

Φ_f は E から $C([0, 1], E)$ への関数であるが、このとき、

(*) $\Phi_f(N_f) = S_f$ and $m\|x - y\| \le \|\Phi_f(x) - \Phi_f(y)\| \le M\|x - y\|$ $(0 < m, M :$ constants)

が成り立つことがわかる。さて $a^2 + b^2 \ne 0$ and $c^2 + d^2 \ne 0$ を仮定する。このとき、we can choose $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, $\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R})$ and $\varphi \in C^2([0, 1], \boldsymbol{R})$ such that $\lambda \ne 0$, $\mu \ne 0$, $\varphi''(t) = \xi(t)\varphi(t)$ $(0 \le t \le 1)$, $\varphi(0) = -\lambda a$, $\varphi'(0) = \lambda b$, $\varphi(1) = \mu c$ and $\varphi'(1) = -\mu d$. 今 x_0 を E の norm one の元とする。最初 $C = \varnothing$ の場合については、

$$f(t, x) = \xi(t)x + \varphi(t)x_0 \quad (0 \le t \le 1,\ x \in E).$$

とおくと、f は $[0, 1] \times E$ から E への $\|L_f\| = \|\xi\|$ を満たす連続関数で、この場合 $S_f = \varnothing$ を示すことができる。次に $C \ne \varnothing$ の場合については、

$$f(t, x) = \xi(t)x + \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|} h(t, x)\varphi(t)x_0 \quad (0 \le t \le 1,\ x \in E)$$

とおく。但し $\varepsilon > 0$, $h(t, x) = \inf\limits_{c \in C} \dfrac{\|\varphi(t)c - x\|}{1 + \|c\|}$ $(0 \le t \le 1,\ x \in E)$ である。このとき、f は $[0, 1] \times E$ から E への $L_f \le \|\xi\| + \varepsilon$ を満たす連続関数で、$C = N_f$ を示すことができる。従って (*) から定理 1 が示される。

定理２については、先ず

$A_1 = \{\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R}) : \exists\varphi \in C^2([0, 1], \boldsymbol{R})$
$\quad s.t.\ \varphi''(t) = \xi(t)\varphi(t)\ (0 \le t \le 1),\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,\ \varphi(0) = 1\},$

$A_2 = \{\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R}) : \exists\varphi \in C^2([0, 1], \boldsymbol{R})$
$\quad s.t.\ \varphi''(t) = \xi(t)\varphi(t)\ (0 \le t \le 1),\ \varphi'(0) = \varphi(1) = 0,\ \varphi(0) = 1\}$

and

$A_3 = \{\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R}) : \exists\varphi \in C^2([0, 1], \boldsymbol{R})$
$\quad s.t.\ \varphi''(t) = \xi(t)\varphi(t)\ (0 \le t \le 1),\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$

とおく。更に $\rho_i = \inf\{|\xi| : \xi \in A_i\}\ (i = 1, 2, 3)$ とおく。このとき、任意 $\varepsilon > 0$ に対して、次のことを示すことができる：

(i) There are many functions $\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R})$ and $\varphi \in C^2([0, 1], \boldsymbol{R})$ such that

$$0 < |\xi| < \varepsilon,\ \varphi''(t) = \xi(t)\varphi(t)\ \ (0 \le t \le 1),\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \text{ and } \varphi(0) = 1.$$

(ii) There are many functions $\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R})$ and $\varphi \in C^2([0, 1], \boldsymbol{R})$ such that

$$\frac{\pi^2}{4} < |\xi| < \frac{\pi^2}{4} + \varepsilon,\ \varphi''(t) = \xi(t)\varphi(t)\ \ (0 \le t \le 1),\ \varphi'(0) = \varphi(1) = 0 \text{ and } \varphi(0) = 1.$$

(iii) There are many functions $\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R})$ and $\varphi \in C^2([0, 1], \boldsymbol{R})$ such that

$$\pi^2 < |\xi| < \pi^2 + \varepsilon,\ \varphi''(t) = \xi(t)\varphi(t)\ \ (0 \le t \le 1) \text{ and } \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

(iv) $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \dfrac{\pi^2}{4}$ and $\rho_3 = \pi^2$.

このことと、定理１の証明で作られた f をよく観察すると、定理２が得られる。

証明終

問題。Let C be a closed subset of a Banach space E. Let x_0 be a norm one element of E, $\xi \in C([0, 1], \boldsymbol{R})$ and $h : [0, 1] \times E \to E$ a continuous function which is Lipschitz continuous in its second variable. Set

$$f(t, x) = \xi(t)x + h(t, x)x_0\ \ (0 \le t \le 1,\ x \in E).$$

We ask a condition on ξ and h such that $N_f = C$.

注意。実 Hilbert 空間 H を考えると、$\varphi(0) = 0$ or $\varphi(1) = 0$ なる $\varphi \in C^1([0, 1], H)$ に対して、不等式 $\int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt \le \dfrac{4}{\pi^2}\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt$ が成り立つ (cf. [1])。今、連続関数 $f : [0, 1] \times H \to H$ を考え、各 $u \in C^2([0, 1], H)$ に対して、

$$(\Phi u)(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau f(\sigma, u(\sigma))d\sigma - t\int_0^1 f(\tau, u(\tau))d\tau\ \ (0 \le t \le 1)$$

とおくと、$(\Phi u)(0) = (\Phi u)'(1) = 0$ が成り立ち、更に標準的手法と上の不等式から、

$$|\Phi u - \Phi v|_{L^2([0, 1], H)} \le \frac{4L_f}{\pi^2}|u - v|_{L^2([0, 1], H)}$$

を得る。従って、card $S_f(0, 1, 1, 0) =$ card $S_f(1, 0, 0, 1) \le 1$ whenever $L_f < \dfrac{\pi^2}{4}$.

最後に表にして纏めてみよう。先ず我々の中心的問題を振り返ってみる：次の E と f を考える。

E : a real Banach space

$f:[0,1]\times E\to E$: a Lipschitz continuous function in its second variable with Lipschitz constant L_f

このとき第３種問題

$$u''(t)=f(t,u(t))\ (0\le t\le 1),\ au'(0)+bu(0)=0 \text{ and } cu'(1)+du(1)=0$$

が考えられるが、その解集合を $S_f=S_f(a,b,c,d)$ とする。このとき、E の任意の閉集合 C に S_f が同相となるような f が存在するか？また存在したとすると、そのような f の L_f の下限の値は何か？この問題に対して、a,b,c,d がそれぞれゼロかそうでないかによって１６通りの場合に分かれるが、それぞれについて述べたものが下図である。(1)～(5) については Theorem 1 によってそのような f は存在することは分かるが、L_f の下限の値については未解決である。(6)～(12) については、Remark 1 により任意の f について、$S_f\cong E$ また $S_f\cong E\oplus E$ なので、我々の問題に適さない。また (13)～(16) については、やはり Theorem 1 によってそのような f は存在することが分かり、Theorm 2, 注意及び [2] によってその下限が決定される。但し (15)～(16) については、E が Hilbert space の場合しか分かっていない。

(1) $a\ne 0, b\ne 0, c\ne 0, d\ne 0$: $\inf L_f$ is unknown

(2) $a\ne 0, b\ne 0, c\ne 0, d=0$: $\inf L_f$ is unknown

(3) $a\ne 0, b\ne 0, c=0, d\ne 0$: $\inf L_f$ is unknown

(4) $a\ne 0, b=0, c\ne 0, d\ne 0$: $\inf L_f$ is unknown

(5) $a=0, b\ne 0, c\ne 0, d\ne 0$: $\inf L_f$ is unknown

(6) $a\ne 0, b\ne 0, c=0, d=0$: $S_f\cong E$ for any f

(7) $a\ne 0, b=0, c=0, d=0$: $S_f\cong E$ for any f

(8) $a=0, b\ne 0, c=0, d=0$: $S_f\cong E$ for any f

(9) $a=0, b=0, c\ne 0, d\ne 0$: $S_f\cong E$ for any f

(10) $a=0, b=0, c\ne 0, d=0$: $S_f\cong E$ for any f

(11) $a=0, b=0, c=0, d\ne 0$: $S_f\cong E$ for any f

(12) $a=0, b=0, c=0, d=0$: $S_f\cong E\oplus E$ for any f

(13) $a\ne 0, b=0, c\ne 0, d=0$: $S_f\cong C$, $\inf L_f=0$ (Neumann problem)

(14) $a=0, b\ne 0, c=0, d\ne 0$: $S_f\cong C$, $\inf L_f=\pi^2$ (Direchlet problem)

(15) $a=0, b\ne 0, c\ne 0, d=0$: $S_f\cong C$, $\inf L_f=\dfrac{\pi^2}{4}$ if E is a Hilbert space

(16) $a\ne 0, b=0, c=0, d\ne 0$: $S_f\cong C$, $\inf L_f=\dfrac{\pi^2}{4}$ if E is a Hilbert space

References

[1] S.-E. Takahasi and T. Miura, A note on the Wirtinger-Beesack's integral inequality, submmited for publication.

[2] G. Herzog and K. Lemmert, On the structure of the solution set of $u'' = f(t, u)$, $u(0) = u(1) = 0$, Math. Nachr., 215(2000), 103-105.