数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 195-199

一般のＢＡＮＡＣＨ空間における非拡大写像族の共通不動点への収束定理

新潟大学・大学院自然科学研究科　　鈴木 智成 (Tomonari Suzuki)

1. 序

Banach 空間 E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $x, y \in E, \|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ ならば

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

が成立することである. $1 < p < \infty$ のとき, L^p は狭義凸であり, L^1, L^∞ は狭義凸ではない.

T を Banach 空間 E の閉凸集合 C 上の写像とする. 写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成立することである.

1953 年に Mann [4] は次のような iteration について考察した.

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} y_j, \qquad y_{n+1} = T(x_n)$$

ここで, T はある写像, $\{\beta_{nj}\}$ は 2 重数列で, $\beta_{nj} \geq 0$, $\beta_{nj} = 0 (j > n)$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} = 1$ を満たすものとする. 特に, 2 重数列 $\{\beta_{nj}\}$ が $\beta_{n+1,j} = (1 - \beta_{n+1,n+1})\beta_{nj} (j \leq n)$ を満たすとき, iteration は

(1) $$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n$$

と表現できる. ここで, $\alpha_n = \beta_{n+1,n+1}$ である. この iteration に関連して, Outlaw [5], Reich [6] は次の定理を証明している.

定理 1 (Outlaw [5]). C を狭義凸な Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} T x_n + \frac{1}{2} x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

定理 2 (Reich [6]). E を一様凸でかつ Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とする. C を E の閉凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とし, 不動点を持つと仮定する. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$

を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき, (1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

Mann による iteration に関連して, 次のような可換な複数の非拡大写像の共通不動点への収束定理も得られている.

定理 3 (Atsushiba and Takahashi [1]). E を一様凸な Banach 空間で, Fréchet 微分可能なノルムを持つ, もしくは Opial 条件を満たす Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, S と T を C 上の可換でかつ共通不動点を持つ非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $\liminf_n \alpha_n > 0$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} S^i T^j x_n + (1-\alpha_n) x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ弱収束する.

本稿では, 非拡大写像に関する収束定理において, Banach 空間の狭義凸性を仮定しないものについて論じたい. そして, 著者によって得られた収束定理の証明を述べる. また, 本稿で定義されていない概念については, [8] を参照のこと.

2. 収束定理

Ishikawa [2] は定理 1 を次のように拡張した.

定理 4 (Ishikawa [2]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. T を C 上の非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ強収束する.

Ishikawa はさらに次の定理を証明している.

定理 5 (Ishikawa [3]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ を C 上の非拡大写像の可換な族とする. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in (0,1)$ を定数とし, $x \in C, i = 1, 2, \ldots, k$ に対して, $S_i x = \alpha_i T_i x + (1-\alpha_i) x$ と置く. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \Big[\prod_{n_{k-1}=1}^{n} \Big[S_k \prod_{n_{k-2}-1}^{n_{k-1}} \Big[S_{k-1} \cdots \Big[S_3 \prod_{n_1=1}^{n_2} \Big[S_2 \prod_{n_0=1}^{n_1} S_1 \Big]\Big] \cdots \Big]\Big]\Big] x_1$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ の共通不動点へ強収束する.

定理 5 は非常に興味深い定理であるが, 少し複雑である. 例えば, $k=4$ のとき, この iteration は以下のようになる:

$$
\begin{aligned}
x_2 =& S_4S_3S_2S_1x_1 \\
x_3 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_2 \\
x_4 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_3 \\
x_5 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1 \\
& S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_4
\end{aligned}
$$

定理 3 の iteration を用いて, 著者 [7] は次の定理を得た.

定理 6 (Suzuki [7]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とする. S と T を C 上の可換な非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \le \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$$

を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. $x_1 \in C$ を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} S^iT^jx_n + (1-\alpha_n)x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点へ強収束する.

この定理を証明するにあたり, 著者は次の 2 つの補助定理を用いている.

補助定理 1. $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ を Banach 空間 E の元よりなる有界な点列とする. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \liminf_n \alpha_n \le \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1]$ 区間の数列とする. そして以下を仮定する: $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1-\alpha_n)z_n$ である; 任意の自然数 k に対して,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\|w_n - w_{n+k}\| - \|z_n - z_{n+k}\|\right) \le 0$$

が成立する. このとき, $\liminf_n \|w_n - z_n\| = 0$ が成立する.

補助定理 2. C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合とし, S と T を C 上の可換な非拡大写像とする. このとき,

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} S^iT^jz - z\right\| = 0$$

を満たす $z \in C$ は S と T の共通不動点である.

定理 6 の証明. 任意の自然数 n, および C の元 x に対して,

$$M(n,x) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S^iT^jx$$

と置く. このとき, すべての自然数 n に対して, C 上の写像 $M(n,\cdot)$ は非拡大となっている. 実際, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\begin{aligned}\|M(n,x) - M(n,y)\| &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|S^iT^jx - S^iT^jy\| \\ &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|x-y\| \\ &= \|x-y\|\end{aligned}$$

である. また, このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n M(n,x_n) + (1-\alpha_n)x_n$$

がすべての自然数 n で成立している. 今, すべての自然数 k に対して,

$$\limsup_{n\to\infty}\|M(n,x_n) - M(n+k,x_{n+k})\| - \|x_n - x_{n+k}\| \leq 0$$

が成立しているので, 補助定理 1 より, $\liminf_n \|M(n,x_n) - x_n\| = 0$ が言える. C はコンパクトであるから, $\lim_k \|M(n_k,x_{n_k}) - x_{n_k}\| = 0$ を満たし, かつある点 $z_0 \in C$ に収束するような $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する. この z_0 に関して,

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\|M(n_k,z_0) - z_0\| \\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\big(\|M(n_k,z_0) - M(n_k,x_{n_k})\| + \|M(n_k,x_{n_k}) - x_{n_k}\| \\ &\quad + \|x_{n_k} - z_0\|\big) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\big(2\|x_{n_k} - z_0\| + \|M(n_k,x_{n_k}) - x_{n_k}\|\big) = 0\end{aligned}$$

が言える. すなわち,

$$\liminf_{n\to\infty}\|M(n,z_0) - z_0\| = \lim_{k\to\infty}\|M(n_k,z_0) - z_0\| = 0$$

である. よって補助定理 2 より, z_0 は S と T の共通不動点であることが言える. また,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z_0\| &\leq \alpha_n\|M(n,x_n) - z_0\| + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\| \\ &\leq \alpha_n\|x_n - z_0\| + (1-\alpha_n)\|x_n - z_0\| \\ &= \|x_n - z_0\|\end{aligned}$$

より,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_0\| = \lim_{k\to\infty}\|x_{n_k} - z_0\| = 0$$

であることが分かる. これで証明を完了する. □

定理 6 において, 空間の狭義凸性は仮定していない. もし空間が狭義凸性を満たしているとすると, 共通不動点 w に関して,

$$\|M(n, x_n) - w\| \leq \|x_n - w\|$$

より,

$$\|x_{n+1} - w\| < \|x_n - w\|$$

が言える. すなわち, 反復を 1 度すれば必ず共通不動点へ近づくのである. しかしながら, 空間が狭義凸性を満たさない場合は, $<$ の所は $\leq$ となり, 必ずしも共通不動点へ近づくとは言えない. ここに, 空間の狭義凸性を仮定しない収束定理の難しさがあり, 同時にそれは研究する上で非常に面白い所でもある. このあたりの事情は定理 4, 5 に関しても同様である.

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Bull. Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[2] S. Ishikawa, *"Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space"*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 65–71.

[3] S. Ishikawa, *"Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings"*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.

[4] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[5] C. L. Outlaw, *"Mean value iteration of nonexpansive mappings in a Banach space"*, Pacific J. Math., **30** (1969), 747–750.

[6] S. Reich, *"Weak convergence theorems for nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.

[7] T. Suzuki, *"On strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, submitted.

[8] 高橋渉: "凸解析と不動点近似", 横浜図書 (2000).