数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 10-18

APPROXIMATING SOLUTIONS OF MAXIMAL MONOTONE OPERATORS IN BANACH SPACES

Shigeo Ohsawa (大沢 繁夫), Wataru Takahashi (高橋 渉)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology
(東京工業大学大学院 情報理工学研究科)

1 はじめに

近年，数学，物理学，工学，オペレーションズ・リサーチ，数理経済学などの分野で扱われる非線形問題の研究が盛んになるにつれ，凸集合や凸関数といった凸に関する言葉を耳にすることが多くなってきている．凸の概念は線形と非線形の中間に位置するものであり，凸集合や凸関数などの凸性をもったものの性質ならびにその周辺を研究する分野が凸解析学である．

一方，不動点の存在を仮定し，あるプロセスを経てその不動点を求める方法を不動点近似法という．その近似法は非線形問題の解を求める近似法に刺激され進歩してきている．凸解析学と不動点近似法は，数学の中で比較的若い分野ではあるが，コンピュータの急速な進歩とともに，種々の非線形問題の研究と関連しながらその必要性を増してきている．

本研究では，Banach 空間における maximal monotone operator の resolvent の収束定理と凸最小化問題の解の近似法，ならびに変分不等式の解への収束定理を考える．まず最初に Hilbert 空間での研究について触れておこう．

H を Hilbert 空間とし $T \subset H \times H$ を maximal monotone operator, $T^{-1}0 \neq \emptyset$ とする．このとき $0 \in Tz$ となるような $z \in H$ (T のゼロ点) を見つける問題はたくさんの研究者によって研究されてきた．この問題を解く最も一般的な一つの方法は近接点法である．近接点法は初期点 $x_1 \in H$ をとり順次点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

で構成していく．ここで $J_{r_n} = (I + r_n T)^{-1}$, $r_n > 0$ である．(1) によって構成された点列はある条件の下でゼロ点に弱収束し，さらに T に強い仮定をおくことによりゼロ

点に強収束することが知られている. 最近, 上村 - 高橋 [2] は以下の 2 つのタイプの点列構成法を考え出した.

$$x_{n+1} = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

ここで $0 \leq \alpha_n \leq 1$, $r_n > 0$ である. 彼らは (2) によって構成された点列がゼロ点に強収束し, (3) によって構成された点列がゼロ点に弱収束することを示した. 一方, Solodov, Svaiter [4] は以下の数理計画で用いるハイブリッド法を考案した.

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ y_n = J_{r_n} x_n, \\ C_n = \{z \in H : \langle y_n - z, x_n - y_n \rangle \geq 0\}, \\ D_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_1 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1), \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

ただし $r_n > 0$, P は距離射影である. 彼らは (4) によって構成された点列が $P_{T^{-1}0}(x_1)$ に強収束することを示した. 本研究では, このハイブリッド法を用いて Banach 空間においても同様の結果が得られたことを示す.

2 準備

E を Banach 空間とする. E が一様凸であるとは, 任意の $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E$ に対して

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$$

ならば $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである. また, E が一様凸であることと, 任意の $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$$

ならば $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることは同値であることがわかる. さらに, E が一様凸 Banach 空間であるときに $x_n \rightharpoonup x$ かつ $\|x_n\| \to \|x\|$ であれば $x_n \to x$ であることもよく知られている. ただし, ここで $\rightharpoonup$ は弱収束を表している. また, C を一様凸 Banach 空間 E の空でない閉凸集合とするとき $x_1 \in E$ をとると, 任意の $y \in C$ に対して $\|x_1 - x\| \leq \|x_1 - y\|$ を満たす $x \in C$ が一意に存在する. そこで, $x = P_C(x_1)$ とおき P_C を C の距離射影と呼ぶことにする.

E を Banach 空間とし, E^* を共役空間とする. $x \in E$ に対して

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を考える. すると Hahn-Banach の定理から $J(x)$ は空でないことがわかる. そこで $J \subset E \times E^*$ を E の duality mapping と呼ぶことにする. $S(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする. Banach 空間 E が smooth であるとは

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が任意の $x, y \in S(E)$ に対して存在することである. E が smooth ならば duality mapping J は一価写像になる. 主定理の証明の中で使われる 3 つの定理を以下に挙げる.

定理 2.1. [5, p.196] C を一様凸で smooth な Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし, $x_1 \in E$ とする. このとき $x = P_C(x_1)$ であることとすべての $z \in C$ に対して

$$\langle x - z, J(x_1 - x) \rangle \geq 0$$

となることは同値である. ただし, P_C は C への距離射影であり, J は E の duality mapping である.

$T \subset E \times E^*$ が monotone であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つことである. monotone operator T が maximal であるとは, そのグラフ $G(T) = \{(x, y) : y \in Tx\}$ が他の monotone operator のグラフに真に含まれないことである. 次の定理は monotone operator T の極大性に関する重要な定理である.

定理 2.2. [1, p.39] E を一様凸で smooth な Banach 空間とし, $T \subset E \times E^*$ を monotone operator とする. このとき T が maximal であることと, 任意の $r > 0$ に対して

$$R(J + rT) = E^*$$

が成り立つことは同値である. ただし $R(J + rT)$ とは $J + rT$ の値域のことである.

さらに duality mapping J に関する次の定理も得られている.

定理 2.3. [5, p.102] E を一様凸で smooth な Banach 空間とし, $x, y \in E$ とする. もし

$$\langle x - y, J(x) - J(y) \rangle = 0$$

ならば $x = y$ である.

3 強収束定理

E を 一様凸で smooth な Banach 空間とし, $T \subset E \times E^*$ を maximal monotone operator, $T^{-1}0 \neq \emptyset$ とする. 任意の $x \in E$ と $r > 0$ に対して, 次の方程式を考える.

$$J(x_r - x) + rTx_r \ni 0.$$

ただし, J は duality mapping である. この方程式は一意の解 x_r を持つ [1]. よって J_r を

$$x_r = J_r x$$

によって定義し, J_r を T の resolvent と呼ぶことにする. ここで, 以下の点列構成法を考える.

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ y_n = J_{r_n} x_n, \\ C_n = \{z \in E : \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : \langle x_n - z, J(x_1 - x_n)\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1), \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{5}$$

ただし, $J(y_n - x_n) + r_n T y_n \ni 0$, $r_n > 0$ である. この点列に関して次の主定理が成り立つ.

定理 3.1. E を 一様凸で smooth な Banach 空間とし, $T \subset E \times E^*$ を maximal monotone operator で $T^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たすとする. $\{x_n\}$ を (5) により構成された点列とし, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ とする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{T^{-1}0}(x_1)$ に強収束する.

証明 まず最初に $\{x_n\}$ が well-defined であることを示す. $C_n \cap D_n$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して閉凸集合となることは明らかである. $(z, 0) \in T$ とする.
$(y_n, \frac{1}{r_n}J(x_n - y_n)) \in T$ であることと, T が monotone であるので

$$\langle y_n - z, \frac{1}{r_n}J(x_n - y_n)\rangle \geq 0$$

となる. つまり

$$\langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0$$

となり, $z \in C_n$ である. よって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T^{-1}0 \subset C_n$ である.

次に数学的帰納法を用いて, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T^{-1}0 \subset C_n \cap D_n$ であることを示そう. $T^{-1}0 \subset C_1$ であり, $D_1 = E$ なので $T^{-1}0 \subset C_1 \cap D_1$ である. $k \in \mathbb{N}$ に対して $T^{-1}0 \subset C_k \cap D_k$ であると仮定しよう. すると $x_{k+1} = P_{C_k \cap D_k}(x_1)$ となるよう

な $x_{k+1} \in C_k \cap D_k$ が一意に存在する. $x_{k+1} = P_{C_k \cap D_k}(x_1)$ であることと定理 2.1 から, 任意の $z \in C_k \cap D_k$ に対して

$$\langle x_{k+1} - z, J(x_1 - x_{k+1})\rangle \geq 0$$

が成り立つ. $T^{-1}0 \subset C_k \cap D_k$ であるから, 任意の $z \in T^{-1}0$ に対しても

$$\langle x_{k+1} - z, J(x_1 - x_{k+1})\rangle \geq 0$$

が成り立つ. よって, $T^{-1}0 \subset D_{k+1}$ がいえる. つまり $T^{-1}0 \subset C_{k+1} \cap D_{k+1}$ がいえた. よって $\{x_n\}$ は well-defined である.

$T^{-1}0$ は空でない閉凸集合であるから, $z_1 = P_{T^{-1}0}(x_1)$ となるような $z_1 \in T^{-1}0$ が一意に存在する. $x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1)$ なので, 任意の $z \in C_n \cap D_n$ に対して

$$\|x_{n+1} - x_1\| \leq \|z - x_1\|$$

である. また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $z_1 \in T^{-1}0 \subset C_n \cap D_n$ であるから

$$\|x_{n+1} - x_1\| \leq \|z_1 - x_1\| \tag{6}$$

となる. よって $\{x_n\}$ は有界である.

次に $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0$ を示そう. (5) と定理 2.1 から $x_n = P_{D_n}(x_1)$ である. $x_{n+1} \in D_n$ なので, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|x_1 - x_n\| \leq \|x_1 - x_{n+1}\|$$

となる. よって $\{\|x_1 - x_n\|\}$ は単調非減少列である. $\{x_n\}$ は有界なので $\{\|x_1 - x_n\|\}$ の極限が存在する. $\lim_{n\to\infty} \|x_1 - x_n\| = a$ とおくと, 一般性を失うことなく $a > 0$ としてよい. また, $x_n = P_{D_n}(x_1)$ であり, D_n は凸集合だから $\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \in D_n$ なので

$$\|x_1 - x_n\| \leq \|x_1 - \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\| \leq \frac{1}{2}(\|x_1 - x_n\| + \|x_1 - x_{n+1}\|)$$

となる. つまり

$$\lim_{n\to\infty} \|x_1 - \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\| = a$$

が成り立つ. いま E は一様凸なので $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0$ が示せた.

(5) と定理 2.1 から $y_n = P_{C_n}(x_n)$ である. $x_{n+1} \in C_n$ なので

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|$$

となる. よって $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ である. $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を使えば

$$\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{r_n}J(x_n - y_n)\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n}\|x_n - y_n\| = 0$$

となる.

一方, $\{x_n\}$ は有界であるので $x_{n_i} \rightharpoonup w$ となる部分列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ がとれる. すると $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ なので $y_{n_i} \rightharpoonup w$ となる. 任意に $(u, v) \in T$ をとると $(y_{n_i}, \frac{1}{r_{n_i}}J(x_{n_i} - y_{n_i})) \in T$ と T が monotone であることから

$$\langle y_{n_i} - u, \frac{1}{r_{n_i}}J(x_{n_i} - y_{n_i}) - v\rangle \geq 0$$

である. ここで $i \to \infty$ とすると

$$\langle w - u, 0 - v\rangle \geq 0$$

となる. T は maximal なので

$$(w, 0) \in T$$

である. $z_1 = P_{T^{-1}0}(x_1)$ とノルムが下半連続であることと (6) を使えば

$$\|x_1 - z_1\| \leq \|x_1 - w\| \leq \liminf_{i\to\infty}\|x_1 - x_{n_i}\| \leq \limsup_{i\to\infty}\|x_1 - x_{n_i}\| \leq \|x_1 - z_1\|$$

を得る. よって

$$\lim_{i\to\infty}\|x_1 - x_{n_i}\| = \|x_1 - w\| = \|x_1 - z_1\|$$

である. E が一様凸であることより $x_1 - x_{n_i} \to x_1 - w$ となり, つまり

$$x_{n_i} \to w = z_1$$

である. よって $x_n \to z_1$ である. □

4 応用

まず初めに, 主定理を下半連続で凸な関数の最小化問題に応用してみる.

定理 4.1. E を 一様凸で smooth な Banach 空間とする. $f : E \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続で凸な関数とし, $(\partial f)^{-1}0 \neq \emptyset$ とする. $r_n > 0$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ とし,

$\{x_n\}$ を以下により構成された点列とする.

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ y_n = \underset{z\in E}{\operatorname{argmin}}\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2\}, \\ C_n = \{z \in E : \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : \langle x_n - z, J(x_1 - x_n)\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1), & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

このとき, $\{x_n\}$ は x_1 から一番近い f の最小値を与える点に強収束する.

証明 $f : E \to (-\infty, \infty]$ は proper かつ下半連続な凸関数なので, Rockafellar の定理 [3] によって f の劣微分

$$\partial f(z) = \{x^* \in E^* : f(y) \geq f(z) + \langle y - z, x^*\rangle, \forall y \in E\}, \quad \forall z \in E$$

は maximal monotone operator になる. さらに,

$$y_n = \underset{z\in E}{\operatorname{argmin}}\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2\}$$

であることと

$$(\partial f)y_n + \frac{1}{r_n}J(y_n - x_n) \ni 0$$

であることは同値である. [6, p.146] よって

$$J(y_n - x_n) + r_n(\partial f)y_n \ni 0$$

となる. ここで定理 3.1 を使えば結論を得る. □

次に, 主定理を変分不等式の解への収束定理に応用してみる. その前に, 記号の定義をいくつか与える. K を Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし, T を K から E^* への写像とする. このとき変分不等式の解の集合 $VI(K,T)$ を

$$VI(K,T) = \{z \in K : \langle u - z, Tz\rangle \geq 0 \quad (\forall u \in K)\}$$

で定義する. また $z \in K$ における K の normal cone $N_K(z)$ を

$$N_K(z) = \{z^* \in E^* : \langle z - u, z^*\rangle \geq 0 \quad (\forall u \in K)\}$$

で定義する.

定理 4.2. K を一様凸で smooth な Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする. T を K から E^* への写像とし, $(T+N_K)$ が maximal monotone operator であるとする. さらに $VI(K,T) \neq \emptyset$ とする. $r_n > 0$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ とし, $\{x_n\}$ を以下により構成された点列とする.

$$\begin{cases} x_1 = x \in K, \\ y_n \in K \text{ s.t. } \langle u - y_n, J(y_n - x_n) + r_n T y_n \rangle \geq 0 \quad (\forall u \in K), \\ C_n = \{z \in E : \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\}, \\ D_n = \{z \in E : \langle x_n - z, J(x_1 - x_n)\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1), & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

このとき, $\{x_n\}$ は $P_{VI(K,T)}(x_1)$ に強収束する.

証明 まず $y_n = J_{r_n} x_n$ であることを示す. ただし, J_{r_n} は $(T+N_K)$ の resolvent である.

$$y_n \in K \quad \text{かつ} \quad \langle u - y_n, J(y_n - x_n) + r_n T y_n \rangle \geq 0 \quad (\forall u \in K)$$

であることと

$$y_n \in K \quad \text{かつ} \quad N_K(y_n) \ni -J(y_n - x_n) - r_n T y_n$$

は同値である. これは

$$y_n \in K \quad \text{かつ} \quad J(y_n - x_n) + r_n(T+N_K)y_n \ni 0$$

のことであるから $y_n = J_{r_n} x_n$ である.

次に $VI(K,T) = (T+N_K)^{-1}0$ を示す. $z \in VI(K,T)$ とすると

$$z \in K \quad \text{かつ} \quad \langle u - z, Tz \rangle \geq 0 \quad (\forall u \in K)$$

である. つまり

$$z \in K \quad \text{かつ} \quad N_K(z) \ni -Tz$$

である. これは $(T+N_K)z \ni 0$ のことであるから, $z \in (T+N_K)^{-1}0$ である. 逆も同様にできるので, $VI(K,T) = (T+N_K)^{-1}0$ である. よって $(T+N_K)$ に対して定理 3.1 を使えば結論を得る. □

参考文献

[1] Barbu, V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces,* Editura Academiei R.S.R., Bucuresti (1976)

[2] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating Solutions of Maximal Monotone Operators in Hilbert Spaces,* J. Approx. Theory **106** (2000), 226-240.

[3] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions,* Pacific J. Math. **17** (1966), 497-510.

[4] M.V.Solodov and B.F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space,* Math. Programming Ser. A. **87** (2000), 189-202.

[5] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis,* Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[6] 高橋渉, " 凸解析と不動点近似", 横浜図書 (2000).