数理解析研究所講究録 1248 巻 2002 年 32-42

Sum theorems for infinite-dimensions

静岡大学大学院理工学研究科

菰田智恵子 (Chieko Komoda)

1 はじめに

考える空間は全て正規空間であると仮定する。

この小論では、無限次元に関する Sum Theorem について考察する。

Sum Theorem を考える場合、cover の条件をどうするか、空間の条件をどうするかの 2 つの要素がある。cover の条件としては、有限個の cover (Finite Sum Theorem)、可算個の cover (Countable Sum Theorem)、locally finite cover (Locally Finite Sum Theorem) などが挙げられる。空間の条件としては、可分距離空間、距離空間、paracompact、 hereditarily normal、collectionwise normal、countably paracompact などが挙げられる。

この小論では、A-weakly infinite-dimensional と C-space に関する Sum Theorem について概説するとともに、C-space に関しては、空間の条件を弱めても Sum Theorem が成り立つことを紹介する。

2 C-space の定義

C-space は Haver [4] によって 1973 年に距離空間に対して定義された。

定義 (Haver [4]) 距離空間 (X,d) に対し、

(X,d) : *C-space in the sense of Haver* (以下、H-C-space と略記する)

$\overset{def}{\iff} \forall \varepsilon_i > 0 \quad (i < \omega)$

$\exists \mathcal{H}_i$: pairwise disjoint collection of open subsets of X $(i < \omega)$

s.t. $\forall H \in \mathcal{H}_i$ に対して、$d(H) < \varepsilon_i$, $\bigcup_{i<\omega} \mathcal{H}_i$: cover of X

Haver は他の次元との関係として次のことを証明した。

定理 (Haver [4]) 距離空間 (X,d) に対し、

X : *countable-dimensional* $\Longrightarrow (X,d)$: *H-C-space*

Haverの意味での C-spaceは距離空間に対してのみ定義できるが、一般の位相空間に対しても定義するため、Addis と Gresham は 1978年に次のように C-spaceを再定義した。

定義 (Addis and Gresham [1])　空間 X に対し、

X : C-*space*
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \mathcal{G}_i$: open cover of X　$(i < \omega)$
　$\exists \mathcal{H}_i$: pairwise disjoint collection of open subsets of X $(i < \omega)$
　　s.t.　$\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i$　$(i < \omega)$,　$\bigcup_{i<\omega} \mathcal{H}_i$: cover of X

Addis と Gresham は他の次元との関係として次のことを証明した。

定理 (Addis and Gresham [1])

countable-dimensional $\overset{\textit{hereditarily paracompact}}{\Longrightarrow}$ C $\Longrightarrow$ *A-weakly infinite-dimensional*

3　C-spaceとH-C-spaceの関係

距離空間 (X, d) に対しては、 Haverの意味での C-spaceと Addis と Greshamの意味での C-spaceの 2 つが定義されている。これらが同じものであるか否かが当然問題となる。この節では、C-spaceと H-C-spaceの関係を調べる。

容易にわかることとして次が挙げられる。

命題　距離空間 (X, d) に対し、

X : C-*space* $\Longrightarrow$ (X, d) : H-C-*space*

証明　$\varepsilon_i > 0$ に対して、$\mathcal{G}_i = \{U(x, \varepsilon_i/2) : x \in X\}$ を考えればよい。

コンパクト距離空間 (X, d) に対しては逆も成り立つ。

命題　コンパクト距離空間 (X, d) に対し、

X : C-*space* $\Longleftrightarrow$ (X, d) : H-C-*space*

証明　前の命題で、$\Longrightarrow$ は示したので、$\Longleftarrow$ を示せばよい。
open cover $\mathcal{G}_i$ of X に対して、$\mathcal{G}_i$ に関するルベーグ数 ε_i を考えればよい。

空間がコンパクトでなければ逆は成り立たない。

例　R. Polは、weakly infinite-dimensionalなコンパクト距離空間Yと、A-weakly infinite-dimensionalではない Y の部分距離空間 X を構成した。

この空間 X は H-C-spaceであるが C-spaceではない。

実際、空間 Y は C-spaceであることもわかるので、上の命題から Y は H-C-spaceとなり、その部分空間 X も H-C-spaceとなる。一方、X は A-weakly infinite-dimensionalではないので、C-spaceではない。

4 C_f-space について

2 節では C-space 性は countable-dimensional と A-weakly infinite-dimensional の間にある概念であることを紹介した。このことより、C-space 性が、次元論的な性質であることがわかる。この節では、C-space 性がどのような有限次元の性質を拡張したものであるかを考察し、C-space という定義の条件への拡張の不自然さを指摘し、自然な拡張として C_f-space という概念を提出する。

はじめに、一般の空間に対する C-space の定義は無限次元の定義としては好ましいものではないことを指摘する。すなわち、weakly infinite-dimensional のように有限次元を全て含むか、strongly infinite-dimensional のように有限次元を 1 つも含まないことが好ましいが、C-space はそのどちらでもない。

実際、$I = [0,1]$ が C-space であることは明らかである。また、0 次元で C-space ではない空間も存在する。

例 (Addis and Gresham [1]) $W_0 = [0, \omega_1)$ は、$\dim W_0 = 0$ だが C-space ではない。

考える空間を paracompact 空間に限れば、有限次元の空間は C-space のクラスに含まれる。

命題 (Addis and Gresham [1]) *paracompact* 空間 X に対し、

$$\dim X \leq n \Longrightarrow X : C\textit{-space}$$

すなわち、paracompact 空間に限れば、C-space 性は無限次元の性質としては問題ない。

次に、C-space 性がどのような有限次元の性質を拡張したものであるかを見ていく。

Ostrand は、被覆次元 dim を次のように特徴付けた。

Ostrand's theorem 空間 X に対し、次は同値である。

(1) $\dim X \leq n$

(2) $\forall \mathcal{G}$: *finite open cover of* X
$\exists \mathcal{H}_i (i = 0, 1, ..., n)$: *pairwise disjoint collection of open subsets of* X
s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}$ $(i = 0, 1, ..., n)$, $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{H}_i$: *cover of* X

(3) $\forall \mathcal{G}$: *locally finite open cover of* X
$\exists \mathcal{H}_i (i = 0, 1, ..., n)$: *pairwise disjoint collection of open subsets of* X
s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}$ $(i = 0, 1, ..., n)$, $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{H}_i$: *cover of* X

$n+1$ 個の列 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_n$ の代わりに、可算列 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, ...$ を考える。すなわち、次の条件 ($\sharp$) を満たす空間 X を考える。

($\sharp$) $\forall \mathcal{G}$: finite (あるいは、locally finite) open cover of X

$$\exists \mathcal{H}_i (i < \omega) : \text{pairwise disjoint collection of open subsets of } X$$
$$\text{s.t.} \quad \mathcal{H}_i < \mathcal{G} \quad (i < \omega), \quad \bigcup_{i<\omega} \mathcal{H}_i : \text{cover of } X$$

条件 ($\sharp$) は、C-space の定義と一見似ているが、Hilbert cube I^ω も条件 ($\sharp$) を満たしてしまうことから、次元の定義としては良くないと言える。そこで、Ostrand's theorem を次のように書き直す。

命題　空間 X に対し、次は同値である。

(1) $\dim X \leq n$

(2)

$\forall \mathcal{G}_i (i = 0, 1, ..., n)$: *<u>finite</u> open cover of* X

$\exists \mathcal{H}_i (i = 0, 1, ..., n)$: *pairwise disjoint collection of open subsets of* X

s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i = 0, 1, ..., n), \quad \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i$: *cover of* X

(3) $\forall \mathcal{G}_i (i = 0, 1, ..., n)$: *<u>locally finite</u> open cover of* X

$\exists \mathcal{H}_i (i = 0, 1, ..., n)$: *pairwise disjoint collection of open subsets of* X

s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i = 0, 1, ..., n), \quad \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i$: *cover of* X

同様に、$n+1$ 個の元から成る 2 つの有限列 $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n$ と $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_n$ をそれぞれ可算列 $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, ...$ と $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, ...$ に代えると次の定義が得られる。

定義　空間 X に対し、

(1) X : C_f*-space*

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \mathcal{G}_i$: <u>finite</u> open cover of $X \quad (i < \omega)$

$\exists \mathcal{H}_i$: pairwise disjoint collection of open subsets of X $(i < \omega)$

s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i < \omega), \quad \bigcup_{i<\omega} \mathcal{H}_i$: cover of X

(2) X : $C_{\ell f}$*-space*

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \mathcal{G}_i$: <u>locally finite</u> open cover of $X \quad (i < \omega)$

$\exists \mathcal{H}_i$: pairwise disjoint collection of open subsets of X $(i < \omega)$

s.t. $\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i < \omega), \quad \bigcup_{i<\omega} \mathcal{H}_i$: cover of X

定義から、$C \Longrightarrow C_{\ell f} \Longrightarrow C_f$ であることがわかる。

このように定義すれば、次が成り立つ。

命題　空間 X に対し、

$$\mathit{dim} X \leq n \Longrightarrow X : C_{\ell f}\text{-}\mathit{space}$$

次に、C_f-space と $C_{\ell f}$-space のどちらが自然な定義であるかを考える。

最初に dim の定義を確認する。

定義　空間 X に対し、

$\dim X \leq n$

$\overset{def}{\iff} \forall\mathcal{U}$: $\underline{\text{finite}}$ open cover of X　$\exists\mathcal{V}$: open refinement of $\mathcal{U}$ s.t. ord $\mathcal{V} \leq n+1$

Dowker は、finite cover を locally finite cover に代えても良いことを示した。

Dowker's theorem　空間 X に対し、

$\dim X \leq n$

$\iff \forall\mathcal{U}$: *$\underline{\text{locally finite}}$ open cover of* X
　$\exists\mathcal{V}$: *open refinement of* $\mathcal{U}$ *s.t. ord* $\mathcal{V} \leq n+1$

したがって、dim の定義が finite cover に対する条件なので、C_f-space の方が $C_{\ell f}$-space よりも自然と思われる。

また、C_f-space に関する Sum Theorem は $C_{\ell f}$-space に関するそれより、考える空間の条件がより弱い条件の下で成立することを証明することができる。（C_f-space であるが $C_{\ell f}$-space ではない空間の存在は知られていない。また、$C_{\ell f}$-space に関する Sum Theorem についても C_f-space に関するそれと同じ条件の下で成り立つかもしれない。）

以上より、C_f-space の方が $C_{\ell f}$-space よりも自然な概念であると思われる。

Rohm [9] は 1987 年に次の概念を提出した。

定義 (Rohm [9])

(1) 空間 X と $n \geq 2$ に対し、

X : *C_n-space*

$\overset{def}{\iff} \forall\mathcal{G}_i$: open cover of X with $\sharp\mathcal{G}_i \leq n$　$(i < \omega)$
　$\exists\mathcal{H}_i$: pairwise disjoint collection of open subsets of X $(i < \omega)$
　　s.t.　$\mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i$　$(i < \omega)$,　$\bigcup_{i<\omega} \mathcal{H}_i$: cover of X

(2) 空間 X に対し、

X : *C_∞-space* $\overset{def}{\iff}$ X : C_n-space for every $n \geq 2$

これらの次元の関係について容易にわかることとして次が挙げられる。

命題

$C \Longrightarrow C_{\ell f} \Longrightarrow C_f \Longrightarrow C_\infty \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow C_{n+1} \Longrightarrow C_n \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow C_2 \iff$ *A-w.i.d.*

Rohm [9] は次の命題を示した。

命題 (Rohm [9])　空間 X と $n \geq 2$ に対し、

C_n-space $\iff$ *C_{n+1}-space*

したがって、C_∞-*space* $\Longleftrightarrow$ C_n-*space* が成り立つ。

例　W_0 は $C_{\ell f}$-space だが C-space ではない。

注 (1) dim の場合は Dowker's thorem から、最初に与える cover として locally finite cover を考えても finite cover を考えても同値であるが、「C_f-space $\Longleftrightarrow$ $C_{\ell f}$-space」が成り立つか否かはわからない。

(2) コンパクト空間ならば、「C-space $\Longleftrightarrow$ C_f-space」であるが、コンパクト距離空間に対し、「C-space $\Longleftrightarrow$ A-w.i.d.」となるかどうかわかっていない。したがって、コンパクト距離空間に対しても、「C_f-space $\Longleftrightarrow$ C_∞-space」が成り立つか否かはわからない。

5　A-w.i.d. に関する Sum Theorem

A-w.i.d. に関しては次の定理が知られている。

Countable Sum Theorem (Levšenko [6])

X : *countably paracompact* (あるいは、*hereditarily normal*)

$X = \bigcup_{i<\omega} F_i$, F_i : *closed* A-*w.i.d.* $(i < \omega)$

$\Longrightarrow$ X : A-*w.i.d.*

Locally Finite Sum Theorem (Hadziivanov [3])

X : *countably paracompact*

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$ 　$\{F_s : s \in S\}$: *locally finite* , F_s : *closed* A-*w.i.d.* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X : A-*w.i.d.*

Hereditarily Closure-preserving Sum Theorem (Polkowski [8])

X : *hereditarily normal*

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$

$\{F_s : s \in S\}$: *hereditarily closure-preserving* , F_s : *closed* A-*w.i.d.* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X : A-*w.i.d.*

注　collection $\{A_s : s \in S\}$ of subsets of X が *hereditarily closure-preserving* とは、

$\forall S' \subset S, \forall B_s \subset A_s\,(s \in S')$ に対して、

$$\mathrm{Cl}\,(\bigcup_{s\in S'} B_s) = \bigcup_{s\in S'} \mathrm{Cl}B_s$$

が成り立つことをいう。

定義から、「locally finite $\Longrightarrow$ hereditarily closure-preserving」であることがわかる。

注　Engelking [2] による Hadziivanov の定理の証明では、hereditarily closure-preserving のみを使っているので、countably paracompact の下で、Hereditarily Closure-preserving Sum Theorem が成り立つことがわかる。

6　C-space に関する Sum Theorem

C-space に関しては、Addis と Gresham が次の定理を証明している。

Countable Sum Theorem (Addis and Gresham [1])

X : *hereditarily collectionwise normal*

$X = \bigcup_{i<\omega} F_i$, F_i : *closed* C*-space* $(i < \omega)$

$\Longrightarrow$　　X : C*-space*

Locally Finite Sum Theorem (Addis and Gresham [1])

X : *paracompact and hereditarily collectionwise normal*

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$　　$\{F_s : s \in S\}$: *locally finite* , F_s : *closed* C*-space* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$　　X : C*-space*

注　Addis と Gresham の証明においては、locally finite という性質を本質的に使っているので、そのままの証明では、Hereditarily Closure-preserving Sum Theorem が成り立つかどうかはわからない。また、上の定理を A-w.i.d. に関する Sum Theorem と比較すると、考える空間 X の条件がかなり強いことがわかる。著者は、これらの定理の改良を試みた。

Levšenko は countably paracompact あるいは hereditarily normal の条件の下で A-w.i.d. に関する Countable Sum Theorem を証明した。それに対して、Addis と Gresham は hereditarily collectionwise normal の条件の下でのみ C-space に関する Countable Sum Theorem を証明している。よって、著者は、Levšenko の countably paracompact に対する定理に対応するものとして、次の定理が成り立つことを証明した。

Countable Sum Theorem

X : *countably paracompact and collectionwise normal*

$X = \bigcup_{i<\omega} F_i$, F_i : *closed* C*-space* $(i < \omega)$

$\Longrightarrow$　　X : C*-space*

Hadziivanov 及び Polkowski の A-w.i.d. に関する Sum Theorem に対応するものとして、次の結果を得た。

Hereditarily Closure-preserving Sum Theorem

(1) X : *countably paracompact*

$X = \bigcup_{s \in S} F_s$

$\{F_s : s \in S\}$: *hereditarily closure-preserving* , F_s : *closed* C*-space* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X : C*-space*

(2) X : *hereditarily collectionwise normal*

$X = \bigcup_{s \in S} F_s$

$\{F_s : s \in S\}$: *hereditarily closure-preserving* , F_s : *closed* C*-space* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X : C*-space*

注 空間 X は (2) の条件の下では、実は、paracompact になる。このことは、次の 2 つの事実からわかる。

事実 X : *countably paracompact* C*-space* $\Longrightarrow$ X : *paracompact*

事実 空間 X に対し、

$X = \bigcup_{s \in S} F_s$

$\{F_s : s \in S\}$: *hereditarily closure-preserving* , F_s : *closed paracompact* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X : *paracompact*

7 C_f-space に関する Sum Theorem

4 節では C_f-space を定義した。C_f-space に関する Sum Theorem においては、考える空間の条件は、A-w.i.d. に関するそれと一致する。

定理

(1)**Countable Sum Theorem**

X : *countably paracompact* (あるいは、*hereditarily normal*)

$X = \bigcup_{i<\omega} F_i$, F_i : *closed* C_f*-space* $(i < \omega)$

$\Longrightarrow$ X : C_f*-space*

(2)**Hereditarily Closure-preserving Sum Theorem**

X : *countably paracompact* (あるいは、*hereditarily normal*)

$X = \bigcup_{s \in S} F_s$

$\{F_s : s \in S\}$: *hereditarily closure-preserving* , F_s : *closed* C_f*-space* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X_f : C*-space*

8 H-C-spaceに関するSum Theorem

Haverの意味でのC-spaceは距離空間に対してのみ定義されるので、H-C-spaceに関するSum Theoremは距離空間上で考える。

定理

(1)**Countable Sum Theorem**

距離空間(X,d)に対し、

$X = \bigcup_{i<\omega} F_i$, (F_i, d_{F_i}) : *closed* H-C-*space* $(i<\omega)$

$\Longrightarrow$ (X,d) : H-C-*space*

(2)**Hereditarily Closure-preserving Sum Theorem**

距離空間(X,d)に対し、

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$

$\{F_s : s\in S\}$: *hereditarily closure-preserving* , (F_s, d_{F_s}) : *closed* H-C-*space* $(s\in S)$

$\Longrightarrow$ (X,d) : H-C-*space*

9 Point-finite Sum Theoremについて

この節では、Point-finite Sum Theoremについて述べる。

Point-finite Sum Theorem for A-w.i.d.(cf. Engelking [2])

X : *countably paracompact* (あるいは、*hereditarily normal*)

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$

$\{U_s : s\in S\}$: *point-finite* *s.t.* $F_s \subset U_s$, F_s : *closed* A-*w.i.d.* $(s\in S)$

$\Longrightarrow$ X : A-*w.i.d.*

証明は、Engelking [2] のテキストによる。テキストでは、dimensional property Pに対して、次の3つの性質(1)~(3)が成り立てば、Point-finite Sum Theorem for Pも成り立つことを証明している。

(1) Closed Subspace Theorem for P

(2) Discrete Sum Theorem for P

(3) $X = \bigcup_{n<\omega} K_n$, K_n : Pを満たす, $\bigcup_{i\leq n} K_i$: closed $(n<\omega)$

$\Longrightarrow$ X : Pを満たす

C-space、C_f-space、H-C-space に関しても、上の 3 つの性質を満たすので、次の定理を得る。

定理

(1) **Point-finite Sum Theorem for C-spaces**

X : *countably paracompact collectionwise normal*

(あるいは、*hereditarily collectionwise normal*)

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$

$\{U_s : s \in S\}$: *point-finite s.t.* $F_s \subset U_s$, F_s : *closed C-space* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X : *C-space*

(2)**Point-finite Sum Theorem for C_f-spaces**

X : *countably paracompact* (あるいは、*hereditarily normal*)

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$

$\{U_s : s \in S\}$: *point-finite s.t.* $F_s \subset U_s$, F_s : *closed C_f-space* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ X : *C_f-space*

(3)**Point-finite Sum Theorem for H-C-spaces**

距離空間 (X, d) に対し、

$X = \bigcup_{s\in S} F_s$

$\{U_s : s \in S\}$: *point-finite s.t.* $F_s \subset U_s$, (F_s, d_{F_s}) : *closed H-C-space* $(s \in S)$

$\Longrightarrow$ (X, d) : *H-C-space*

参考文献

[1] D. F. Addis and J. H. Gresham, *A class of infinite-dimensional spaces. Part : Dimension theory and Alexandroff's problem*, Fund. Math. 101 (1978), 195-205.

[2] R. Engelking, Theory of Dimensions, Finite and Infinite, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

[3] N. G. Hadziivanov, *On infinite-dimensional spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. 19(1971), 491-500.

[4] W. E. Haver, *A covering property for metric spaces*, Topology Conference at Virginia Polytechnic Institute 1973, Lecture Notes in Math. 375(1974), 108-113.

[5] C. Komoda, *Some theorems for C-spaces*, in preparation.

[6] B. T. Levšenko, *On strongly infinite-dimensional spaces*, Vestnik Moskov. Univ. 5(1959), 219-228.

[7] R. Pol, *A-weakly infinite-dimensional compactum which is not countable-dimensional*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 634-636.

[8] L. Polkowski, *A sum theorem for A-weakly infinite-dimensional spaces*, Fund. Math. 119 (1983), 7-10.

[9] D. M. Rohm, *Alternative characterizations of weak infinite-dimensionality and their relation to a problem of Alexandroff's*, Ph. D. Thesis, Oregon State University, 1987.