数理解析研究所講究録 1250 巻 2002 年 22-25

Homogeneity of pure state spaces and related problems

北大大学院理学研究科　岸本晶孝 (Akitaka Kishimoto)
東北学院大　境正一郎 (Shôichirô Sakai)

今日、C^*代数は数学，物理学，情報科学等の広範囲にわたり有力な推論方法として使用されている。この現象は，量子化の思想が諸科学に，さらに浸透すると共に益々顕著になるものと思われる。従って，C^*代数の研究に於いても，より一層の深化が求められる。本講究録ではC^*代数の表現論について新しい展開を示すこととする。

一般に表現論は既約表現を building Blocks として進められる。C^*代数の表現論に於いても，一般な表現を既約表現の積分として表わすことにより，既約表現の研究に帰着させることができる。しかし，I型でないC^*代数では，積分方法は一意でなくなるため厳密には帰着できるとは言い難い。従って，因子表現を building blocks として選択する方が当当であるが，因子表現を調べることは可成り困難である。ここでは，既約表現がどのように生成されるかを調べる。

AをC^*代数とする。Aの純粋状態φをとり，GNS－構成法によりAの$*$-表現$\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$をつくると，それは既約表現である。逆に，$\{\pi, \mathcal{H}\}$を$A$の既約表現とすると，$\mathcal{H}$から任意の単位ベクトル$\xi$をとり$\varphi_\xi(x) = (\pi(x)\xi, \xi)$ $(x \in A)$と定義するとφ_ξは純粋状態となり，$\{\pi_{\varphi_\xi}, \mathcal{H}_{\varphi_\xi}\}$は$\{\pi, \mathcal{H}\}$と同値の表現になる。従って，既約表現の研究は純粋状態の研究に帰することができる。φ_1, φ_2を2つの純粋状態とする。このとき，$\{\pi_{\varphi_1}, \mathcal{H}_{\varphi_1}\}$と$\{\pi_{\varphi_2}, \mathcal{H}_{\varphi_2}\}$が同値であるための必要十分条件は，Kadison の Transitivity Theorem (cf. [7]) により，A (Aが単位元をもたないときは，Aに単位元を加えたC^*代数A_1) の中にユニタリ元uが存在して，$\varphi_2(x) = \varphi_1(u^*xu)$ $(x \in A)$とかける（即ち，φ_1とφ_2はAの内的$*$-自己同型群の下で互いに transitive である）ことである。

さて，φをAの任意の純粋状態とし，表現$\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$を考える。$I = \ker \pi_\varphi$とすると，$\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$は$C^*$代数$A/I$の忠実な既約表現と考えられる。簡単のために，$I = (0)$と仮定しよう。とくに，$A$が単純$C^*$代数ならば，すべての既約表現は忠実である。$\alpha$を$A$上の任意の$*$自己同型とし，$\varphi^\alpha(x) = \varphi(\alpha(x))$ $(x \in A)$とおくと，φ^αはAの忠実な純粋状態である。この講究録では，次の問題を考える。

問題. φ_1, φ_2 を C^*代数 A の2つの忠実な純粋状態とする。 このとき, A 上に $*$-自己同型 α が存在して, $\varphi_2 = \varphi_1^\alpha$ とかけるか?

この問題は, R.T. Powers [15] によって1967年に初めて研究され, UHF代数について肯定的に解決された。その後, Bratteli [1], Bratteli-Kishimoto [8], Futamura-Kataoka-Kishimoto [11] によって多くの C^*代数の class について肯定的に解決されてきた。とくに, Futamura-Kataoka-Kishimoto の論文には可成り広い範囲の C^*代数に適用可能な重要な手法が開発されている。

この講義録では彼等の手法を使って, すべての可分な nuclear C^*-代数について問題を肯定的に解決する。さらに, 可分な前双対空間をもつ II_1型と III型因子環については, Anderson の結果を使って問題が否定的であることを示す。

最後に, Futamura-Kataoka-Kishimoto の手法の一般性と Kadison の Transitivity の一般化 (cf. Theorem 1.21.6 in [7]) とを勘案して, 次の naive な予想を述べて講演を終了した。

予想. A を可分な C^*代数とする。このとき, 問題は肯定的である。

本研究集会の最終日に小沢登高氏により, Haagerup

[12]の中で得られた結果に若干の改良を加えることにより，吾々の論文の手法はすべての可分 C^*代数に適用可能であることが示された。即ち，次の定理が示された。

定理（岸本－小沢－境）．Aを可分な C^*代数とする。Aの2つの純粋状態 φ_1, φ_2 が $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$ をみたすならば，$\alpha \in AInn(A)$ が存在して $\varphi_1^{\alpha} = \varphi_2$ とかける（ここで，$AInn(A)$ は asymptotically inner な自己同型全体のなす $Aut(A)$ の正規部分群）。

この論文は Bulletin of Canadian Mathematical Society に出版される。吾々の原論文は雑誌には出版されないが，種々の有用な結果が含まれているので、全文を本講究録に集録することにした。