数理解析研究所講究録 1250 巻 2002 年 42-48

Free Analog of Malliavin Analysis

水尾 勝 (Masaru Mizuo)
東北大学大学院・情報科学研究科
(Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

概要

semicircular system の生成する W^* 環 $\mathcal{M}$, すなわち free group factor 上に Sobolev 空間 W_n^p $(1 < p < \infty, n \in \mathbb{Z})$ を導入し、それらの共通部分として測度論的 C^∞ 環 $\mathcal{S}$ を定める時、この環は semicircular system の生成する C^* 環 $\mathcal{A}$ の中に実現できる。さらに $\mathcal{S}$ の相対空間として Schwartz distribution $\mathcal{S}'$ を定め、その表現定理を確定する。この $\mathcal{S}'$ の部分空間として $\mathcal{M}$ が自然に実現できる。これは Gaussian system の生成する環上に同様の構造を確立した Malliavin analysis に用いる超関数構造の free probability analog の一種である。さらにこの構造が free group factor 上の derivation の理論に適していることを示すために $\mathcal{S}$ 上の C^∞ な vector field が $\mathcal{S}$ 上連続な写像となっていることを示す。

1 準備

以下証明は全て省略し理論の構成をまとめる。詳しい証明および完全な参考文献は [4] を参照。まず後に必要な事実をまとめる。

$(\mathcal{M}, \tau)$ を W^* probability space, すなわち $\mathcal{M}$ は finite W^* 環, τ は faithful normal tracial state とする。$\{s_i : i \in I\} \subset \mathcal{M}$ を semicircular system, すなわち I は添字集合, s_i $(i \in I)$ はそれぞれ τ で測って semicircular 分布を持ち、互いに free independent な関係にあるものとする。今 $\mathcal{M}$ は $\{1\} \cup \{s_i : i \in I\}$ で生成されているとする。このとき、

$$(\mathcal{M}, \tau) \cong (\star_{i\in I} W^*(\{1, s_i\}), \star_{i\in I}\tau|_{W^*(\{1,s_i\})}) \cong (\mathcal{L}(\mathbb{F}_N), \langle \cdot l_e, l_e \rangle).$$

ただし $\star$ は W^* free product, $\mathcal{L}(\mathbb{F}_N)$ は N 生成元の free group factor で $N = \mathrm{card}\ I$, $\langle \cdot l_e, l_e\rangle$ は free group の単位元が定める faithful normal tracial state。$\{1\} \cup \{s_i : i \in I\}$ が代数的に生成する*-subalgebra を $\mathcal{P}$ とすると、faithful normal state による free product は代数的 free product の closer になることより $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}\langle X_i : i \in I\rangle$。ただし $\mathbb{C}\langle X_i : i \in I\rangle$ は非可換多項式環でこの同型対応では s_i $(i \in I)$ と不定元 X_i が対応する。$T_n(X)$ を n 次 $(n \geq 0)$ の第 2 種 Chebyshev 多項式 (ただし $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ および $T_{n+1}(X) \equiv XT_n(X) - T_{n-1}(X)$ $(n \geq 1)$ で定まる) とするとき、

$$T_{\underbrace{i_1 i_1 \cdots i_1}_{m_1} \underbrace{i_2 i_2 \cdots i_2}_{m_2} \cdots \underbrace{i_n i_n \cdots i_n}_{m_n}} \equiv T_{m_1}(s_{i_1}) T_{m_2}(s_{i_2}) \cdots T_{m_n}(s_{i_n})$$
$$(n \geq 0, i_j \in I (1 \leq j \leq n), m_j \geq 0 (1 \leq j \leq n))$$

とおく。ただし $T_\emptyset \equiv 1$ とする。このとき $\{T_{i_1 i_2 \cdots i_n} : n \geq 0, i_j \in I(1 \leq j \leq n)\}$ は $\mathcal{P}$ の linear basis となるが、$L^2(\mathcal{M},\tau)$ の CONS にもなる。線形空間 $\mathcal{P}_n \equiv \mathrm{sp}\{T_{i_1 i_2 \cdots i_n} : i_j \in I(1 \leq j \leq n)\}$ $(n \geq 0)$ とするともちろん $\mathcal{P}_n$ $(n \geq 0)$ は互いに直交する。また $L^2(\mathcal{M},\tau)$ 上の線形作用素 L を *dom* $L = \mathcal{P}$, $L(x) = nx$ (for $x \in \mathcal{P}_n$) で定めると、$-\bar{L}^{L^2(\mathcal{M},\tau)}$ は明らかに selfadjoint で Ornstein-Uhlenbeck Laplacian とよばれている。以下 L 自身も Ornstein-Uhlenbeck Laplacian として引用する。さらに $L^2(\mathcal{M},\tau)$ 上の contraction semigroup $\exp(-\bar{L}^{L^2(\mathcal{M},\tau)}t)$ $(t \geq 0)$ は $\mathcal{M} \subset L^2(\mathcal{M},\tau)$ を global invariant にする。このとき $\exp(-\bar{L}^{L^2(\mathcal{M},\tau)}t)|_{\mathcal{M}}$ $(t \geq 0)$ は $\mathcal{M}$ 上 τ-preserving (normal) unital complete positive semigroup になり、Ornstein-Uhlenbeck semigroup と呼ばれるが、これは $\mathcal{M}$ の最も自然な拡散過程である。

2 Sobolev空間 W_n^p $(1 < p < \infty, n \geq 0)$ および C^∞ 環 $\mathcal{S}$ の導入

Definition 2.1 $x \in \mathcal{P}$ に対して

$$\|x\|_{W_n^p} \equiv \|x\|_{L^p(\mathcal{M},\tau)} + \|L^{\frac{1}{2}}x\|_{L^p(\mathcal{M},\tau)} + \cdots + \|L^{\frac{n}{2}}x\|_{L^p(\mathcal{M},\tau)}$$

を *Sobolev* W_n^p $(1 < p \leq \infty, n \geq 0)$ *norm* とよぶ。

ただし $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathcal{M},\tau)}$ は $\mathcal{M}$ の C^* norm。また以下非可換 $L^p(\mathcal{M},\tau)$ は単に L^p と記述することもある。

Definition 2.2 $\mathcal{P}$ の W_n^p *norm* $(1 < p \leq \infty, n \geq 0)$ による抽象的完備化を *Sobolev* 空間 W_n^p $(1 < p < \infty, n \geq 0)$ とよぶ。

このとき明らかに W_0^p $(1 < p < \infty)$ は $L^p(\mathcal{M},\tau)$ と同型になるが以下常にこの同型対応で両者を同一視する。$1 < p < p' < \infty$ あるいは $0 \leq n < n'$ のとき $\mathcal{P}$ (with $W_n^{p'}$ norm) から $\mathcal{P}$ (with W_n^p norm) への恒等写像 $\iota_{p',p}^n$, あるいは $\mathcal{P}$ (with $W_{n'}^p$ norm) から $\mathcal{P}$ (with W_n^p norm) への恒等写像 $\iota_{n',n}^p$ は連続なので $W_n^{p'}$ から W_n^p, あるいは $W_{n'}^p$ から W_n^p への写像 $\bar{\iota}_{p',p}^n$ および $\bar{\iota}_{n',n}^p$ に拡張される。このとき、

Proposition 2.3 上述の写像は常に *injective* である。よって全ての *Sobolev* 空間 W_n^p $(1 < p < \infty, n \geq 0)$ は $L^1(\mathcal{M},\tau)$ の部分空間と見なせる。

したがって次の可換図式を得る。ただし $\Subset$ は連続な埋蔵を示すために使う。

$$\begin{array}{ccccccccc}
L^\infty \equiv \mathcal{M} & \Subset & W_0^p = L^p & \Subset & W_0^2 = L^2 & \Subset & W_0^p = L^p & \Subset & L^1 \\
 & & (2 < p < \infty) & & & & (1 < p < 2) & & \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
 & & W_1^p & \Subset & W_1^2 & \Subset & W_1^p & & \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
 & & W_2^p & \Subset & W_2^2 & \Subset & W_2^p & & \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup & &
\end{array}$$

$n \geq 0$ に対し Sobolev 空間 W_n^p $(1 < p < \infty)$ の projective limit を $W_n^{\cap}$ とし $W_n^{\cap}$ $(n \geq 0)$ の projective limit を $\mathcal{S}$ とする。このとき、

Proposition 2.4 $W_n^{\cap}$ $(n \geq 0)$ は *Frechet $*$-algebra* になる。すなわち $W_n^{\cap}$ $(n \geq 0)$ の位相は完備局所凸距離位相で、*$*$-operation* は連続、および掛け算は両連続になる。したがって $\mathcal{S}$ も *Frechet $*$-algebra* になる。

この Proposition より $\mathcal{S}$ のことを C^∞ 環とよぶ。なお Proposition 2.3 および 2.4 の証明は次章 Proposition 3.5 を用いる。さらに、

Proposition 2.5 *(Sobolevの補題)* $C \equiv (\sum_{n \geq 1}^{\infty} (\frac{n+1}{n^2})^2)^{\frac{1}{2}}$ とおく。このとき $x \in \mathcal{P}$ に対して $\|x\|_{W_n^p} \leq C\|x\|_{W^2_{n+n'}}$ $(n \geq 0, n' \geq 4, 1 < p \leq \infty)$。したがって $W^2_{n+n'} \Subset W_n^p$ $(n \geq 0, n' \geq 4, 1 < p < \infty)$。

$\mathcal{A} \equiv C^*(\{1\} \cup \{s_i : i \in I\})$ とする。このとき定義より $\mathcal{A}$ は W_0^∞ と同型。Proposition 2.5 より以下の 3 つの Corollary を得る。

Corollary 2.6 *(Sobolevの埋蔵定理)* W_4^2 は $\mathcal{A}$ に連続に埋蔵される。すなわち $W_4^2 \Subset \mathcal{A}$。

Corollary 2.7 C^∞ 環 $\mathcal{S}$ の位相は W_n^2 $(n \geq 0)$ *norm* 族で生成される。

Corollary 2.8 C^∞ 環 $\mathcal{S}$ は *nuclear space* ではない。

3 Weak 微分 D

$I^{(2)} \equiv I \cup \text{copy of } I$, $\mathcal{M}^{(2)} \equiv W^*(\{1\} \cup \{s_i : i \in I^{(2)}\})$ とし自然に $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{(2)}$ を部分環とし、$\mathcal{M}^{(2)}$ を $\mathcal{M}$ あるいは $\mathcal{P}$ の bimodule と見なす。また $\{s_i : i \in I^{(2)}\}$ が代数的に生成する $*$-subalgebra を $\mathcal{P}^{(2)}$ および $\mathcal{M}^{(2)}$ 上の Ornstein-Uhlenbeck Laplacian を $L^{(2)}$, tracial normal state を $\tau^{(2)}$ また C^∞ 環を $\mathcal{S}^{(2)}$ とする。また $i \in I$ に対して $i + N \equiv$ copy of $i \in$ copy of I とする。このとき、

Definition 3.1 $\mathcal{M}$ から $\mathcal{P}$ *bimodule* $\mathcal{M}^{(2)}$ への *derivation* D で *dom* $D = \mathcal{P}$ かつ $D(s_i) = s_{i+N}$ $(i \in I)$ で定まるものを *weak derivation* とよぶ。

weak derivation D の *dom* $D = \mathcal{P}$ は非可換多項式環と同型なので Definition 3.1 は well-defined である。このとき、

Lemma 3.2 $D(T_{i_1 i_2 \cdots i_n}) = \sum_{k=1}^{n} T_{i_1 i_2 \cdots i_k + N \cdots i_n}$ $(n \geq 0, i_j \in I (1 \leq j \leq n))$

$i \in$ copy of I に対して $i - N \equiv$ original of $i \in I$ とする。このとき線形写像 $D_{dual} : \mathcal{P}^{(2)} \to \mathcal{P}$ を $n \geq 0$, $i_j \in I^{(2)}$ $(1 \leq j \leq n)$ に対して、

$$D_{dual}(T_{i_1 i_2 \cdots i_n}) = \begin{cases} T_{i_1 i_2 \cdots i_j - N \cdots i_n} & \text{if } \exists j \ i_j \in \text{copy of } I \text{ and } i_k \in I \ (k \neq j), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると、

Lemma 3.3 $x \in \mathcal{P},\ y \in \mathcal{P}^{(2)}$ とする。 そのとき、

$$\tau^{(2)}(y^* D(x)) = \tau(D_{dual}(y^*)x).$$

したがって D は $L^p(\mathcal{M},\tau)$ から $L^p(\mathcal{M}^{(2)},\tau^{(2)})$ $(1 < p < \infty)$ への写像とみて closable である。また、

Corollary 3.4 $x \in \mathcal{P}$ にたいして、

$$D_{dual}D(x) = L(x),$$
$$DL(x) = L^{(2)}D(x).$$

したがって $DL^{-\frac{1}{2}}$ は $\bigoplus_{i=1}^{\infty} P_i$ 上 $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{M},\tau)}$, $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{M}^{(2)},\tau^{(2)})}$ isometry になる。ただし $L^{-\frac{1}{2}}$ の定義は L の定義から明らかであるが $\bar{L}^{L^2(\mathcal{M},\tau)}$ の functional calculus だと思ってもよい。これと同様のことが L^p の場合でも成り立つ。

Proposition 3.5 $1 < p < \infty$ のとき、 $DL^{-\frac{1}{2}} : L^p(\mathcal{M},\tau) \to L^p(\mathcal{M}^{(2)},\tau^{(2)})$ は $\bigoplus_{i=1}^{\infty} P_i$ 上、上にも下にも有界。

これより以下の Corollary がすぐに従う。

Corollary 3.6 $\mathcal{P}$ 上 $\|L^{\frac{n}{2}} \cdot \|_{L^p(\mathcal{M},\tau)} \sim \|(L^{(2)})^{\frac{n-1}{2}} D \cdot \|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)},\tau^{(2)})} (1 < p < \infty, n \leq 1)$。

Corollary 3.7 $D : \mathcal{S} \to \mathcal{S}^{(2)}$ は連続。

Corollary 3.8 $x \in \mathcal{P}$ にたいして、$\|x\|_{W_1^p} \sim \|x\|_{L^p(\mathcal{M},\tau)} + \|D(x)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)},\tau^{(2)})}$ $(1 < p < \infty)$ *($\bar{D}^{L^p}$ の graph norm)*

同様に $I^{(3)} \equiv I^{(2)} \cup$copy of $I^{(2)}, I^{(4)}, \cdots, \mathcal{M}^{(3)}, \mathcal{M}^{(4)}, \cdots, D^{(2)}, D^{(3)}, \cdots$ と定義し、$\mathcal{M}^{(1)} \equiv \mathcal{M}, D^{(1)} \equiv D, \cdots$ とおく。上と同じ議論を繰り返すことで最終的に以下を得る。

Proposition 3.9 $1 < p < \infty,\ n \geq 1$ とする。$x \in \mathcal{P}$ に対して $\|x\|_{W_n^p}$ と $\|x\|_{L^p(\mathcal{M}^{(1)},\tau^{(1)})} + \|D^{(1)}(x)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)},\tau^{(2)})} + \cdots + \|D^{(n)}D^{(n-1)} \cdots D^{(1)}(x)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(n+1)},\tau^{(n+1)})}$ は同値。さらに線形写像 $D^{(n+1)}D^{(n)}D^{(n-1)} \cdots D^{(1)} : \mathcal{P}^{(1)}$ *(with* $\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{M}^{(1)},\tau^{(1)})} + \|D^{(1)}(\cdot)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(2)},\tau^{(2)})} + \cdots + \|D^{(n)} \cdot D^{(n-1)} \cdots D^{(1)}(\cdot)\|_{L^p(\mathcal{M}^{(n+1)},\tau^{(n+1)})}$ *norm)* $\to \mathcal{P}^{(n+2)}$ *(with* $\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{M}^{(n+2)},\tau^{(n+2)})}$ *norm)* は *closable*。

4 Schwartz Distribution $\mathcal{S}'$

Definition 4.1 $\mathcal{S}$ 上の連続線形汎関数の全体を *Schwartz distribution* $\mathcal{S}'$ とよぶ。$\mathcal{S}'$ 上の位相は $\mathcal{S}$ の汎弱位相を考える。

W_n^p $(1 < p < \infty, n \geq 0)$ の相対空間を $\hat{W}^q_{-n}$ $(1 < q < \infty, n \geq 0)$ と書くことにする。ただし以下 q は p の共役指数として用いる。また記号 $(\ )'$ は常に dual のためにもちいる。$1 < p < p' < \infty$ あるいは $0 \leq n < n'$ のとき $\vec{\iota}^{\,n}_{p',p}$ あるいは $\vec{\iota}^{\,p}_{n',n}$ は dense な値域を持つ。したがってその相対写像 $\hat{\iota}^{-n}_{q,q'} \equiv (\vec{\iota}^{\,n}_{p',p})' : \hat{W}^q_{-n} \to \hat{W}^{q'}_{-n}$ あるいは $\tilde{\iota}^{\,q}_{-n,-n'} \equiv (\vec{\iota}^{\,p}_{n',n})'$: $\hat{W}^q_{-n} \to \hat{W}^q_{-n'}$ は injective になる。このとき $1 < q < q' < \infty$ かつ $0 \leq n < n'$ ならば、

$$
\begin{aligned}
\hat{\iota}^{-n'}_{q,q'}\tilde{\iota}^{\,q}_{-n,-n'} &= (\vec{\iota}^{\,n'}_{p',p})'(\vec{\iota}^{\,p}_{n',n})' \\
&= (\vec{\iota}^{\,p}_{n',n}\vec{\iota}^{\,n'}_{p',p})' \\
&= (\vec{\iota}^{\,n}_{p',p}\vec{\iota}^{\,p'}_{n',n})' \\
&= \tilde{\iota}^{\,q}_{-n,-n'}\hat{\iota}^{-n}_{q,q'}
\end{aligned}
$$

したがって次の可換図式を得る。

$$
\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hat{W}^q_{-2} & \Subset & \hat{W}^2_{-2} & \Subset & \hat{W}^q_{-2} \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
\hat{W}^q_{-1} & \Subset & \hat{W}^2_{-1} & \Subset & \hat{W}^p_{-1} \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
\hat{W}^q_{-0} & \Subset & \hat{W}^2_{-0} & \Subset & \hat{W}^p_{-0} \\
(2 < q < \infty) & & & & (1 < q < 2)
\end{array}
$$

このとき $\mathcal{S}' = \cup_{1<q<\infty, n\geq 0}\hat{W}^q_{-n}$ であるが、Corollary 2.7 より、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}' &= \cup_{n=0}^{\infty}\{W_n^2 \text{ norm continuous linear function on } \mathcal{S}\} \text{ (inductive limit)} \\
&= \text{inductive } \lim_{n\geq 0} \hat{W}^2_{-n}
\end{aligned}
$$

となる。$L^p(\mathcal{M},\tau)$ $(1 < p < \infty)$ の duality より $W_0^p = L^p(\mathcal{M},\tau)$ $(1 < p < \infty)$ と $\hat{W}^p_{-0} = (W_0^q)' = (L^q(\mathcal{M},\tau))'$ は同型であるが同型対応 $\lambda_p : W_0^p \to \hat{W}^p_{-0}$ $(1 < p < \infty)$ を次のように定める。$x \in W_0^p = L^p(\mathcal{M},\tau)$ のとき

$$
\lambda_p(x) = -\tau(x\ \cdot\ ) \in \hat{W}^p_{-0} = (W_0^q)' = (L^q(\mathcal{M},\tau))'
$$

これにより最終的に次の可換図式を得る。なお以下 $\hat{\ }$ の記号は以下省略する。この図式のように $\mathcal{M}$ および $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}'$ の部分空間と見なせる。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \mathcal{S}' \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & W^p_{-2} & \Subset & W^2_{-2} & \Subset & W^p_{-2} & & \\
 & & & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
 & & & & W^p_{-1} & \Subset & W^2_{-1} & \Subset & W^p_{-1} & & \\
 & & & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
\mathcal{M} & \Subset & W_0^{\cap} & \Subset & W_0^p = L^p & \Subset & W_0^2 = L^2 & \Subset & W_0^p = L^p & \Subset & L^1 \\
 & & & & (2 < p < \infty) & & & & (1 < p < 2) & & \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
 & & W_1^{\cap} & \Subset & W_1^p & \Subset & W_1^2 & \Subset & W_1^p & & \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
 & & W_2^{\cap} & \Subset & W_2^p & \Subset & W_2^2 & \Subset & W_2^p & & \\
 & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \Cup & & & & & & & & \\
 & & \mathcal{S} & & & & & & & &
\end{array}
\tag{1}
$$

直積線形空間 $\otimes_{n=0}^{\infty}\bar{\mathcal{P}_n}^{L^2(\mathcal{M},\tau)}$ (product topology) を考える。ここで、$H_n^2 \equiv \{x = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \otimes_{n=0}^{\infty}\hat{\mathcal{P}_n}^{L^2(\mathcal{M},\tau)} : \sum_{i=0}^{\infty}(1+i)^{\frac{n}{2}}\|x_i\|^2_{L^2(\mathcal{M},\tau)} < \infty\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ とするとき明らかに $n < n'$ のとき $H^2_{n'}$ は H^2_n の部分空間となる。このときの埋め込み写像を $\kappa_{n',n}$ とする。また図式 (1) における $W^2_{n'} \Subset W^2_n$ の埋め込み写像を $\iota_{n',n}$ とする。このとき、

Proposition 4.2 *($\mathcal{S}'$ の表現定理)* $n < n'$ のとき $\kappa_{n',n} : H^2_{n'} \to H^2_n$ と $\iota_{n',n} : W^2_{n'} \to W^2_n$ は同型。したがって $\mathcal{S}'$ は $\otimes_{n=0}^{\infty}\bar{\mathcal{P}_n}^{L^2(\mathcal{M},\tau)}$ の緩増加数列の空間 $\{x = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \otimes_{n=0}^{\infty}\bar{\mathcal{P}_n}^{L^2(\mathcal{M},\tau)} : \exists n \in \mathbb{Z}\ \sum_{i=0}^{\infty}(1+i)^{\frac{n}{2}}\|x_i\|^2_{L^2(\mathcal{M},\tau)} < \infty\}$、$\mathcal{S}$ は $\otimes_{n=0}^{\infty}\bar{\mathcal{P}_n}^{L^2(\mathcal{M},\tau)}$ の急減少数列の空間 $\{x = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \otimes_{n=0}^{\infty}\bar{\mathcal{P}_n}^{L^2(\mathcal{M},\tau)} : \forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{i=0}^{\infty}(1+i)^{\frac{n}{2}}\|x_i\|^2_{L^2(\mathcal{M},\tau)} < \infty\}$ と同型。さらにこの同一視で $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in \otimes_{n=0}^{\infty}\bar{\mathcal{P}_n}^{L^2(\mathcal{M},\tau)} \in \mathcal{S}'$ のとき $\tilde{x}_n \equiv \sum_{i=0}^{n} x_i$ は $n \to \infty$ で x に収束する。したがって $\mathcal{P}$ は $\mathcal{S}'$ で *dense*。

5 C^∞ Vector Field

ここでは $N = \mathrm{card}\ I < \infty$ とする。$\mathcal{P}$ は非可換多項式環と同型なので $k = (k_1, k_1, \cdots, k_N) \in \oplus_N\mathcal{S}$ に対して $dom\ \delta_k = \mathcal{P}$, $\delta_k(s_i) = k_i$ $(i \in I)$ となる $\mathcal{S}$ 上の derivation δ_k は一意に存在する。この形の $\mathcal{S}$ 上の derivation を C^∞ vector field とよぶ。したがって C^∞ vector field の全体が作る線形空間と $\oplus_N\mathcal{S}$ は同型。一方 $\{T_{i_1 i_2 \cdots i_n}(n \geq 0, i_j \in I(1 \leq j \leq n)) : \exists 1 \leq j \leq n\ i_j \in$ copy of I and $i_k \in I(k \neq j)\} \subset \mathcal{S}^{(2)}$ が生成する線形空間 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{P}$ subbimodule となるが、$\mathcal{P}$ subbimodule $\mathcal{D}$ から $\mathcal{P}$ bimodule $\mathcal{S}$ へ

$m_k(T_{i+N}) = k_i$ $(i \in I)$ の条件で bimodule map m_k が一意に定まり、$\delta_k = m_k D$ となる。すなわち $\mathcal{P}$ subbimodule $\mathcal{D}$ は $\mathcal{P}$ の普遍微分加群である。このとき、

Proposition 5.1 *m_k : $\mathcal{D}$ (with $\mathcal{S}^{(2)}$ topology) $\rightarrow$ $\mathcal{S}$ (with $\mathcal{S}$ topology)* は連続。したがって *C^∞ vector field δ_k* は *$\mathcal{S}$* 上連続。

したがって $(\delta_k)' : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ が定義でき連続写像となるが、

Proposition 5.2 *δ_k が τ-preserving* ならば、$(\delta_k)'|_{\mathcal{P}} = \delta_k|_{\mathcal{P}}$

すなわち δ_k は $\mathcal{S}'$ 上に連続拡張できる。

参考文献

[1] M. Bożejko, Ultracontractivity and Strong Sobolev Inequality for q-Ornstein-Uhlenbeck Semigroup (-1<q<1), *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, Vol. 2, No. 2(1999), 203-220.

[2] F. Hiai and D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.77, Amer. Math. Soc., 2000.

[3] F. Lust-Piquard, Riesz Transforms on Deformed Fock Spaces, *Comm. Math. Phys.*, **205**(1999), 519-549.

[4] M. Mizuo, *Noncommutative Sobolev Spaces, C^∞ Algebra and Schwartz Distribution Associated with Operator Algebra Generated by Semicircular System*, preprint.

[5] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, 1995.